

УДК 539.3:537.2

**ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ ЛЯВА В  
СЛОИСТОЙ СИСТЕМЕ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ  
ПОДЛОЖКОЙ И МЯГКИМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СЛОЕМ  
( Исследование характеристического уравнения. – Часть I )**

**Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А.**

**Ջ. Ն. Դանոյան, Ն. Ջ. Դանոյան, Գ.Ա.Մանուկյան**

**Լյավի մակերևութային էլեկտրաառաձգական ալիքները պլեզոէլեկտրիկ հիմքով և  
փափուկ դիէլեկտրիկ շերտով շերտավոր համակարգում  
(Բնութագրիչ հավասարման հետազոտումը – Մաս I)**

Ներկա աշխատանքում հետազոտվում է Լյավի էլեկտրաառաձգական ալիքների գոյությունը և վարքը 6, 4, 622, 422, 6mm, 4mm դասի պլեզոէլեկտրիկ հիմքով և կամայական հաստությամբ իզոտրոպ դիէլեկտրիկ շերտով համակարգում՝ կախված շերտավոր համակարգի ֆիզիկա-մեխանիկական բնութագրիչներից և շերտի հարաբերական հաստությունից: Մակերևութային ալիքի բնութագրիչ հավասարումը հետազոտված է փափուկ շերտի դեպքում, երբ շերտում ծավալային առաձգական ալիքների տարածման արագությունը ավելի փոքր է հիմքում ծավալային էլեկտրաառաձգական ալիքների տարածման արագությունից: Հետազոտությունը հենվում է [13] աշխատանքում բերված մակերևութային ալիքի էլեկտրամեխանիկական կապի գործակցի (ԿԷՄԳ) վարքի ուսումնասիրության վրա: Մասնավորապես ցույց է տրված ձեռքային տիպի Լյավի ալիքների գոյությունը, որը պայմանավորված է զուտ պլեզոէլեկտրական էֆեկտով: Ուսումնասիրված են Լյավի ալիքի կառուցվածքը և ալիքային ձևերի վարքը: Բերված են ալիքային ձևերի դիսպերսիոն կորերի որակական գրաֆիկները: Քննարկված է Լյավի էլեկտրաառաձգական ալիքների կապը Լյավի սովորական ալիքների և Գույասի - Բյուստեյնի ալիքների հետ: Հետազոտված են որոշակի պայմանների բավարարող դեպքեր: Մյուս հնարավոր դեպքերը քննարկվելու են հեղինակների հաջորդ աշխատանքում:

**Z.N.Danoyan., N. Z. Danoyan, G.A.Manukyan**

**The Surface Electroelastic Love's Waves in a Layered System with a Piezoelectric  
Substructure and Soft Dielectric Isotropic Layer  
(The investigation of the characteristic equation – Part I)**

In the article is investigated the existence and the behaviour Love's surface electroelastic waves in a layered system with a piezoelectric substructure if the class 6,4, 6mm, 4mm, 622, 422 and a soft dielectric isotropic layer with a finite arbitrary thickness depending on the physicommechanical properties of the system and the relative thickness of the layer. The characteristic equation at the surface wave is investigated in the case of the soft layer when the propagation velocity of volume of clastic waves in the layer is less than the propagation velocity of the volume electroelastic waves in the substructure. In particular it is shown that the existence of split waves of Love's type due to solely piezoelectrical effect.

В работе исследуется существование и поведение электроупругих волн Лява в слоистой системе из пьезоэлектрической подложки классов 6, 4, 6mm, 4mm, 622, 422 и изотропного диэлектрического слоя произвольной толщины в зависимости от физико-механических характеристик слоистой системы и относительной толщины слоя. Характеристическое уравнение искомой поверхностной волны исследовано в случае мягкого слоя, когда скорость объемной упругой волны в слое меньше скорости объемной электроупругой волны в подложке. Исследование основано на свойствах коэффициента электромеханической связи (КЭМС) поверхностной волны, приведенных в работе [13]. В частности, показано существование волны Лява щелевого типа, обусловленной исключительно пьезоэлектрическим эффектом. Изучены структура и поведение мод волны Лява. Приведены качественные графики дисперсионных кривых. Обсужден вопрос связи электроупругих волн Лява с

обычными волнами Лява и волнами Гуляева-Блюстейна. Исследованы случаи, удовлетворяющие определенным условиям. Другие возможные случаи будут обсуждаться в следующей работе авторов.

**Введение.** Известно, что [1,2,10,12] в полубесконечной изотропной подложке, на которую нанесен изотропный слой из другого материала, могут распространяться сдвиговые поверхностные упругие волны горизонтальной поляризации, называемые волнами Лява. Волны Лява существуют только в случае мягкого слоя, когда скорость распространения объемной упругой волны в слое  $S_{02}$  меньше, чем скорость распространения электроупругой объемной волны в подложке  $S_{01}$ , причем скорость  $V_{0L}$  волны Лява удовлетворяет условию  $S_{02} < V_{0L} < S_{01}$ . Представляет интерес исследование волн Лява в слоистых системах, когда подложка или слой является пьезоэлектриком [3-10]. В [3,4,7,9] исследован вопрос существования волн Лява, когда слой является диэлектриком, а подложка – пьезоэлектриком. В [5-7] рассмотрена электроупругая задача Лява, когда слой является проводником, а подложка – пьезоэлектриком. В [8] рассматривается случай, когда слой является пьезоэлектриком, а подложка – диэлектриком. В работе [13] исследовано поведение коэффициента электромеханической связи (КЭМС)  $R(k)$  для пьезоэлектрических подложек классов 6, 4, 6mm, 4mm, 622, 422 при наличии диэлектрического слоя.

В настоящей работе на основе результатов работы [13] исследуются существование и поведение электроупругих волн Лява для пьезоэлектрических подложек классов 6, 4, 6mm, 4mm, 622, 422 с изотропным диэлектрическим мягким слоем, когда скорость объемных упругих волн в слое  $S_2$  меньше скорости объемных электроупругих волн в подложке  $S_1$ , дополняя и уточняя результаты работ [3,4,6,7].

### 1. Основные соотношения задачи.

Пусть слоистая система, состоящая из диэлектрического изотропного слоя толщины  $h$  и полубесконечной пьезоэлектрической подложки классов 4, 6, 4mm, 6mm, 422, 622, находящихся в жестком контакте, отнесена к прямоугольной декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Ось  $Ox_3$  совпадает с главной осью симметрии ( $L_4$  или  $L_6$ ) пьезоэлектрической подложки и лежит в плоскости  $x_1=0$  границы раздела слоя и подложки, ось  $Ox_1$  направлена вглубь подложки. Вне слоистой системы (в области  $x_1 < -h$ ) предполагается вакуум или диэлектрическая среда, которая граничит со слоем без акустического контакта. Границы слоя  $x_1 = 0$  и  $x_1 < -h$  электрически свободны (неметаллизированны), граница  $x_1 = -h$  механически свободна.

Согласно [13], скорость сдвиговых электроупругих волн Лява  $V = V_L$  определяется выражением

$$V = V(k) = \omega / p, \quad \omega > 0, \quad p > 0 \quad (1.1)$$

где  $\omega$  и  $p$  – частота и волновое число волны,  $k = ph$  – относительная толщина слоя, и должна удовлетворять характеристическому уравнению поверхностной волны:

$$\beta_1(V) = c\beta_2(V)\text{tg}[k\beta_2(V)] + R(k) \quad (1.2)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$R(k) = \frac{R_1^2 \bar{\varepsilon}_2 (\bar{\varepsilon}_2 thk + 1) - K_1^2 \bar{\varepsilon}_1 (\bar{\varepsilon}_2 + thk)}{\bar{\varepsilon}_2 (\bar{\varepsilon}_2 thk + 1) + \bar{\varepsilon}_1 (\bar{\varepsilon}_2 + thk)} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \beta_1(V) &= \sqrt{1 - (V^2 / S_1^2)}, \quad \beta_2(V) = \sqrt{(V^2 / S_2^2) - 1} \\ S_1 &= \sqrt{\bar{c}_1 / \rho_1}, \quad S_2 = \sqrt{c_2 / \rho_2}, \quad \bar{c}_1 = c_1(1 + \chi_1^2) \\ \chi_1^2 &= e_1^2 / \varepsilon_1 c_1, \quad c_1 = c_{44}^{(1)}, \quad c_2 = c_{44}^{(2)}, \quad d_1 = e_{14}^{(1)} \\ e_1 &= e_{15}^{(1)}, \quad \bar{e}_1 = e_1 / \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{11}^{(1)}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{11}^{(2)}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{11}^{(3)} \\ c &= c_2 / \bar{c}_1, \quad \bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 / \varepsilon_3, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 / \varepsilon_3, \quad R_1^2 = e_1^2 / \varepsilon_1 \bar{c}_1, \quad K_1^2 = d_1^2 / \varepsilon_1 \bar{c}_1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Выше нижние индексы 1-3 относятся к подложке, слою и вакууму соответственно,  $\beta_1(V)$  и  $\beta_2(V)$  – коэффициенты затухания;  $S_1$  и  $S_2$  – скорости сдвиговых объемных волн;  $R_1^2$ ,  $K_1^2$  и  $\chi_1^2$  – коэффициенты электромеханической связи для объемной волны;  $R(k)$  – коэффициент электромеханической связи для поверхностной волны;  $c_1$  и  $c_2$  – упругие постоянные;  $e_1$  и  $d_1$  – пьезомодули;  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  – диэлектрические проницаемости;  $\rho_1$  и  $\rho_2$  – массовые плотности. Заметим, что вышеприведенные названия коэффициентов электромеханической связи используются в [2,3,8].

Из условия затухания поверхностной волны вглубь подложки (при  $x_1 \rightarrow +\infty$ ) следует, что  $\beta_1(V)$  – положительная величина, что дает необходимое условие существования поверхностной волны:

$$0 < V_L < S_1 \quad (1.5)$$

Отсюда следует, что парциальная волна в подложке всегда должна быть неоднородной. В отличие от  $\beta_1(V)$ , величина  $\beta_2(V)$  может быть как действительной, так и мнимой. В первом случае она должна быть неотрицательной, что дает условие:  $V_L \geq S_2$ . В этом случае в слое распространяются однородные упругие волны, испытывая полное внутреннее отражение от ограничивающих поверхностей слоя (как и в случае обычной волны Лява). Во втором случае, когда  $\beta_2(V)$  мнимая, имеет место условие  $V_L < S_2$ . В этом случае в слое будут распространяться неоднородные упругие парциальные волны, рождая волны Лява щелевого типа.

## 2. Исследование характеристического уравнения поверхностной волны

Из соотношений (1.3)–(1.4) следует, что при отсутствии пьезоэффекта ( $e_1 = d_1 = 0$ ) коэффициент электромеханической связи  $R(k)$  обращается в нуль, а характеристическое уравнение (1.2) совпадает с характеристическим уравнением обычной волны Лява [1,2]. При  $V \geq S_2$  обе величины  $\beta_1(V)$  и  $\beta_2(V)$

действительны и фазовая скорость искомой волны определяется из характеристического уравнения (1.2). Если же  $V < S_2$ , то  $\beta_2(V)$  становится мнимой, волны Лява становятся щелевого типа, а их скорость распространения будет определяться из преобразованного характеристического уравнения:

$$\beta_1(V) = -c\gamma_2(V)\text{th}[k\gamma_2(V)] + R(k) \quad (2.1)$$

где

$$\gamma_2(V) = \sqrt{1 - (V^2 / S_2^2)} \quad (2.2)$$

Следует подчеркнуть, что вклад пьезоэффекта в характеристических уравнениях (1.2) и (2.1) проявляется двумя факторами: наличием дополнительного члена – коэффициента электромеханической связи  $R(k)$  и зависимости скорости  $S_1 = (c_1 / \rho_1)\sqrt{1 + \chi_1^2}$  от пьезоэффекта. Отметим, что характеристические уравнения получены для классов 6 и 4. Для классов 6mm и 4mm следует в этих уравнениях и других соответствующих выражениях положить  $d_1 = 0$ , а для классов 622, 422 –  $e_1 = 0$ .

Далее, как и в работе [13], принимается следующее ограничение:

$$|R(k)| \ll 1 \quad (2.3)$$

что имеет место для большинства известных пьезоэлектриков [3,11].

Итак, пусть слоистая система имеет мягкий слой, т.е. скорости объемных волн удовлетворяют условию:

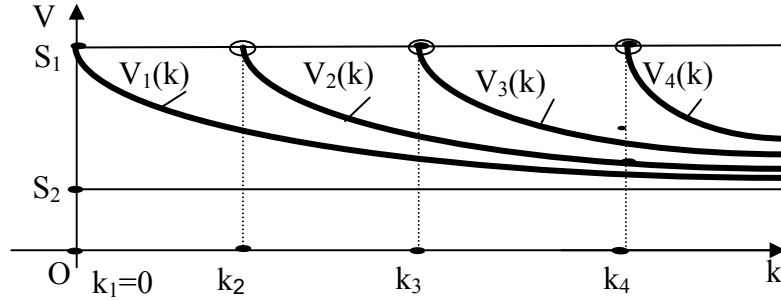
$$S_2 < S_1 \quad (2.4)$$

При отсутствии пьезоэффекта ( $e_1 = d_1 = 0$ ) и наличии мягкого слоя ( $S_2 = S_{02} < S_{01} = S_1$ ) волны Лява имеют скорость, удовлетворяющую условию  $S_{02} < S_{0L} < S_{01}$ , и описываются только уравнением (1.2) при  $e_1 = d_1 = 0$ . Как известно [12], в этом случае для каждого значения относительной толщины слоя  $k \in (0, \infty]$  существуют несколько мод волны Лява, фазовые скорости  $V = V_n(k)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) которых удовлетворяют условию:

$$V_1(k) < V_2(k) < \dots < V_n(k) \quad (2.5)$$

Критические значения  $k_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), при которых начинается рождение новых мод, определяются из уравнения (1.2) при условии  $\beta_1(V) = 0$ , так что каждая мода начинается с объемной волны, распространяющейся со скоростью  $V = S_1 = \text{const.}$  ( $V_n(k_n) = S_1$ ), причем для первой моды  $k_1 = 0$ . При увеличении параметра  $k$  скорости всех мод монотонно убывают, стремясь асимптотически к скорости  $S_2$  объемных сдвиговых волн в слое при  $k \rightarrow \infty$ . В пределе получаем случай двух полупространств, когда слиянием всех мод получается единственная так называемая объемно-поверхностная волна [12], которая должна распространяться со скоростью  $V = S_2$ . Однако, как показывает непосредственное простое исследование, в случае двух полупространств граничная задача не имеет решения такого вида. Поведение дисперсионных

кривых для мод обычной волны Лява показано на фиг. 1. При наличии пьезоэффекта ситуация оказывается более сложной и зависит от поведения коэффициента электромеханической связи  $R(k)$  поверхностной волны. Сначала рассмотрим слоистые системы с условием  $R(k) > 0$  [13].



Фиг.1

Случай I. Слоистые системы, определяемые условием  $R(k) > 0$ .

Когда  $k = 0$ , т.е.  $h = 0$  (слой отсутствует), характеристические уравнения (1.2) и (2.1) совпадают и принимают вид  $\beta_1(V) = R_0$ , где  $R_0 \equiv R(0)$ . Это уравнение при  $R_0 > 0$  всегда имеет решение:

$$V = V_{GB} \equiv S_1 \sqrt{1 - R_0^2} < S_1 \quad (2.6)$$

Этот факт следует из того, что согласно (2.3) имеют место условия:

$$|R_0| \ll 1, \quad |R_\infty| \ll 1 \quad (2.7)$$

где  $R_\infty \equiv R(\infty)$ . Величина  $V_{GB} \equiv S_1 \sqrt{1 - R_0^2}$  представляет собой скорость так называемой поверхностной волны Гуляева-Блюстейна, которая существует в пьезоэлектрической полубесконечной среде при условии  $R_0^2 < 1$ , что всегда имеет место согласно (2.7). Скорость волны Гуляева-Блюстейна  $V_{GB}$  всегда меньше скорости объемных электроупругих волн в той же среде  $S_1$ .

При  $k = \infty$ , т.е. когда слой становится полупространством ( $h = \infty$ ), то, как покажем в дальнейшем, вдоль общей границы упругих полупространств могут распространяться как поверхностные, так и объемно-поверхностные волны, причем в зависимости от значений параметров слоистой среды одна или обе волны могут не распространяться.

Очевидно, что соотношение между значениями скоростей  $V_G$  и  $S_2$  могут быть различными в зависимости от значений характеристик слоистой системы:

$$\begin{aligned} \text{a) } & V_{GB} > S_2 \quad \text{при} \quad \beta_1(S_2) > R_0 \\ \text{b) } & V_{GB} = S_2 \quad \text{при} \quad \beta_1(S_2) = R_0 \\ \text{c) } & V_{GB} < S_2 \quad \text{при} \quad \beta_1(S_2) < R_0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\beta_1(S_2) = \sqrt{1 - (S_1 / S_2)^2} \quad (2.9)$$

Согласно условию получения характеристических уравнений (1.2) и (2.1), из (2.7) имеем: при условии а) значение  $V = V_{GB}$  является решением уравнения (1.2) при  $k \rightarrow \infty$ , а уравнение (2.1) не имеет решения. При условии с) имеется обратная ситуация. При условии б)  $V = V_{GB} = S_2$  будет решением обоих уравнений при  $k \rightarrow 0$ .

Теперь рассмотрим изменение поведения решений характеристических уравнений, когда параметр  $k$  начинает возрастать от значения 0 при наличии условий (2.8). Сначала рассмотрим случай а) из (2.8):  $\beta_1(S_2) > R_0$ , или  $V_{GB} > S_2$ .

Случай I(a).  $R(k) > 0$ ,  $V_{GB} > S_2$  ( $\beta_1(S_2) > R_0$ ). Производя замену в характеристическом уравнении (1.2)

$$k \beta_2(V) \equiv \eta \quad (2.10)$$

преобразуем его к виду

$$\text{tg } \eta = f(k, \eta) \quad (2.11)$$

где

$$f(k, \eta) \equiv (k / c \eta) g(k, \eta) \quad (2.12)$$

$$g(k, \eta) \equiv \sqrt{\beta_1^2(S_2) - (S_2 \eta / S_1 k)^2} - R(k) \quad (2.13)$$

Из (2.10) следует, что скорость  $V$  выражается через  $k$  и  $\eta$  следующим образом:

$$V = S_2 \sqrt{1 + (\eta / k)^2} \quad (2.14)$$

Легко видеть, что функция  $f(k, \eta)$  при  $k > 0$  действительна в промежутке

$$0 \leq \eta \leq \eta^*(k) \quad (2.15)$$

где

$$\eta^*(k) \equiv k \beta_2(S_1), \quad \beta_2(S_1) = \sqrt{(S_1 / S_2)^2 - 1} \quad (2.16)$$

причем, согласно (2.14), имеем:

$$V = S_2 \text{ при } \eta = 0 \text{ и } V = S_1 \text{ при } \eta = \eta^* \quad (2.17)$$

Определим знак функции  $f(k, \eta)$  в концах промежутка (2.15) при фиксированном значении  $k$ . Согласно (2.12), (2.13) и (2.16) имеем:

$$f(k, \eta^*(k)) \equiv f^*(k) = -R(k) / c, \quad \beta_2(S_1) < 0 \quad (2.18)$$

так как  $R(k) > 0$ .

При  $\eta = 0$  функция  $g(k, 0)$  из (2.13) имеет вид:

$$g^*(k) = \beta_1(S_2) - R(k) \quad (2.19)$$

знак которого зависит от значений характеристик слоистой системы и параметра  $k$ .

При условии а) имеем:

1. Для слоистых систем с условиями (3.10) и (3.12) ([13], Фиг. За, 4а):

$$g^*(k) > 0, k \in [0, \infty] \quad (2.20)$$

2. Для слоистых систем с условиями (3.8) ([13], Фиг. 2а):

$$а) g^*(k) \geq 0, k \in [0, \infty] \text{ при } \beta_1(S_2) \geq R_\infty \quad (2.21)$$

$$б) g^*(k) \geq 0, k \in [0, k_{\text{пер}}]; g^*(k) < 0, k \in (k_{\text{пер}}, \infty] \text{ при } \beta_1(S_2) < R_\infty \quad (2.22)$$

где  $k = k_{\text{пер}}$  определяется из условия:

$$R(k_{\text{пер}}) = \beta_1(S_2) \quad (2.23)$$

Отметим, что в случае (2.21)  $g^*(\infty) = 0$  при  $\beta_1(S_2) = R_\infty$ . Далее, из (2.10) следует, что

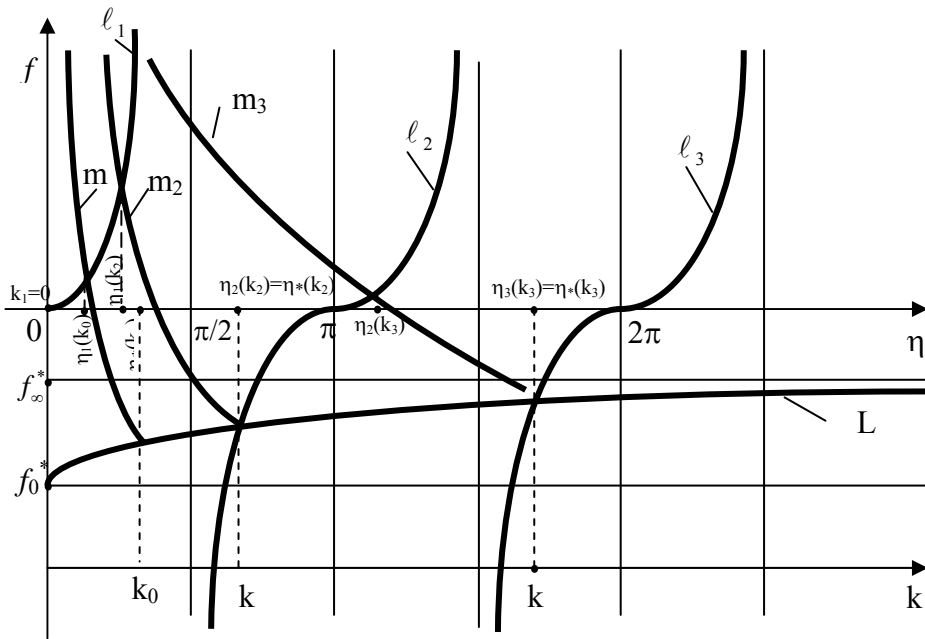
$$\begin{aligned} f(k, 0) &= +\infty && \text{при } g^*(k) > 0 \\ f(k, 0) &= -\infty && \text{при } g^*(k) < 0 \\ f(k_{\text{пер}}, 0) &= 0/0 = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

При  $k = k_{\text{пер}}$  получается неопределенность вида  $0/0$ , раскрытие которой приводит к значению  $f(k_{\text{пер}}, 0) = 0$ . Отсюда приходим к следующему заключению.

Функция  $f(k, \eta)$  при фиксированном значении  $k > 0$  в промежутке  $0 \leq \eta \leq \eta^*(k)$  обладает свойствами:

- 1) Монотонно убывает от значения  $+\infty$  до значения  $f^*(k) \equiv f(k, \eta^*(k)) < 0$  при  $g^*(k) > 0$ ;
- 2) Монотонно возрастает от  $-\infty$  до значения  $f^*(k) < 0$  при  $g^*(k) < 0$ ;
- 3) Монотонно убывает от 0 до значения  $f^*(k_{\text{пер}}) < 0$  при  $k = k_{\text{пер}}$ , т.е. при  $g^*(k) = 0$ .

Используя полученные свойства функции  $f(k, \eta)$ , можно графически исследовать поведение решений характеристического уравнения (2.11).



Фиг.2

Случай I(a).1. Слоистые системы с условием (3.10) ([13], Фиг.3.a ). Построим графики функций  $\operatorname{tg}\eta$  и  $\operatorname{tg}(k, \eta)$  для фиксированного значения  $k > 0$ . На фиг. 2 кривые  $l_1, l_2, l_3$  и т.д. представляют собой графики ветвей функции  $\operatorname{tg}\eta$ , а кривые  $m_2, m_3$ , и т.д. – графики функции  $f(k, \eta)$  при некоторых значениях параметра  $k$  (смысл которых будет ясен из дальнейшего изложения), когда  $\eta$ ; меняется в промежутке  $0 \leq \eta \leq \eta^*(k)$ ,  $L$  – график функции  $f^*(k)$  при  $k > 0$ . Здесь:

$$f_0^* \equiv f^*(0) = -R_0 / c\beta_2(S_1), f_\infty^* \equiv f^*(\infty) = -R_\infty / c\beta_2(S_1) \quad (2.25)$$

При фиксированном значении  $k$  точки пересечения графика функции  $f(k, \eta)$  с кривыми  $l_1, l_2, l_3$ , и т.д. как раз определяют значения корней  $\eta = \eta_n(k)$  характеристического уравнения (2.11), которым отвечают фазовые скорости мод волны Лява соответствующего порядка  $V = V_n(k)$ :

$$V_n(k) = S_2 \sqrt{1 + (\eta_n(k)/k)^2} \quad (2.26)$$

Графики решений характеристического уравнения  $V_n(k)$  называются дисперсионными кривыми волны Лява.

Как видно из фиг. 2, в окрестности точки  $k = k_1 = 0 (\eta = 0)$  графики функции  $f(k, \eta)$  при фиксированном значении  $k = k_{12}$ , например кривая  $m_{12}$ , пересекаются только с графиком первой ветви  $l_1$  функции  $\operatorname{tg}\eta$ , причем абсцисса



точки пересечения  $\eta = \eta_1(k)$  возрастает с увеличением  $k$ . При некотором значении  $k = k_2$ , которое удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg}\eta^*(k_2) = f^*(k_2) \text{ или } \operatorname{tg}(k_2\beta_2(S_1)) = -R(k)/c\beta_2(S_1) \quad (2.27)$$

график функции  $f(k, \eta) = f(k_2, \eta)$  (кривая  $m_2$ ) впервые пересекается с графиком второй ветви  $l_2$  функции  $\operatorname{tg}\eta$ , причем абсцисса точки пересечения определяется соотношением:  $\eta = \eta_2(k_2) = \eta^*(k_2)$ . Именно от этого значения  $k$ , т.е. от значения  $k_2$  начинается вторая ветвь решения характеристического уравнения, при этом  $V_2(k_2) = S_1$ , т.е. вторая мода волны Лява начинается от объемной волны, которая распространяется со скоростью  $S_1$ . При дальнейшем увеличении  $k$  до некоторого значения  $k_3$ , определяемого уравнением

$$\operatorname{tg}\eta^*(k_3) = f^*(k_3) \quad (2.28)$$

характеристическое уравнение (2.11) для каждого значения  $k > 0$  имеет два решения:  $\eta_1(k)$  и  $\eta_2(k)$ , которым соответствуют первая и вторая моды волны Лява, причем скорости их распространения удовлетворяют условию:  $V_1(k) < V_2(k)$ . Начиная со значения  $k_3$  параметра  $k$ , возникает третья мода волны Лява, которая при  $k = k_3$  является объемной и распространяется со скоростью  $V = V_3(k_3) = S_1$ . При дальнейшем увеличении  $k$  вышеуказанная картина аналогично повторяется: начиная с некоторых определенных значений  $k_4, k_5, \dots, k_n$  и т.д. начинаются следующие высшие моды. При увеличении параметра  $k$  скорости всех мод уменьшаются, причем они удовлетворяют условию (2.5). В пределе при  $k \rightarrow \infty$  все моды, сливаясь между собой, образуют единственную объемно-поверхностную волну, которая должна распространяться со скоростью  $V = S_2$ . Однако, как и в случае обычной волны Лява, такая волна не существует, не является решением граничной задачи для двух полупространств. В самом деле, в этом случае для объемно-поверхностной волны непосредственно получаем условие

$$\beta_1(S_2) = R_\infty \quad (2.29)$$

которое можно получить также из характеристического уравнения (1.2), подставляя в нем  $V = S_2, \beta_2(S_2) = 0, k = \infty, R_\infty = R(\infty)$ . Равенство (2.29) имеет место, если  $0 < R_\infty < 1$ . Итак, если для слоистой системы одновременно выполняются условия

$$0 < R_\infty < 1, \beta_1(S_2) = R_\infty \quad (2.30)$$

то при  $k \rightarrow \infty$  существуют объемно-поверхностные волны, которые убывают вглубь пьезоэлектрической среды. Если же первое условие нарушается или при его выполнении нарушается второе условие, то волны указанного типа не существуют. При существовании этих волн скорость их распространения определится формулой:

$$V = S_2 = S_1\sqrt{1 - R_\infty^2} \quad (2.31)$$

Так как в нашем случае  $\beta_1(S_2) > R_2$ , то отсюда следует, что в слоистых системах с условием (3.10) из [13] при  $k = \infty$  объемно-поверхностные волны не могут распространяться подобно обычным волнам Лява.

Наконец, можно показать, что в этом случае характеристическое уравнение (2.1) в интервале  $(0, S_2)$  решений не имеет. Действительно, уравнение (2.1) можно привести к виду:

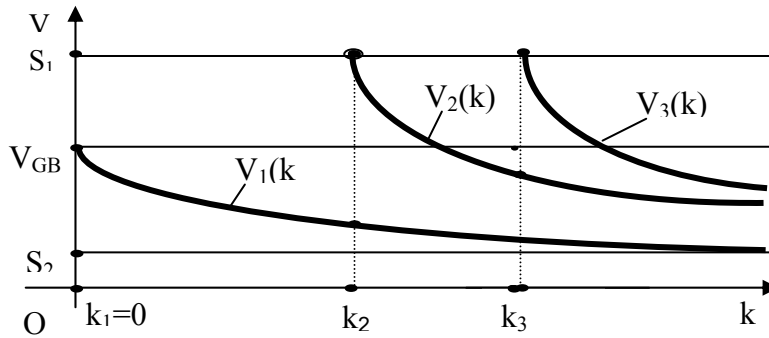
$$\mu(k, V) \equiv \beta_1(V) + c\gamma_2(V)\text{th}[k\gamma_2(V)] = R(k) \quad (2.32)$$

В этом случае имеется оценка:  $\mu(k, V) \geq \mu(0, V) > R_0 > R(k)$ . Откуда следует, что при любом значении параметра  $V$  из интервала  $(0, S_2)$  графики функций  $\mu(k, V)$  и  $R(k)$  не пересекаются, т.е. уравнение (2.32) в этом интервале решений не имеет.

Таким образом, в слоистых системах с условием (3.10) из [13], при  $\beta_1(S_2) > R_0$  электроупругие волны Лява существуют и имеют следующую структуру: первая мода волны Лява начинается с поверхностной волны Гуляева–Блюстейна, имеющей скорость  $V = V_{GB} < S_1$  при  $k = k_1 = 0$  и при увеличении  $k$  распространяется с убывающей скоростью  $V = V_1(k)$ , которая стремится к скорости  $S_2$  объемных волн в слое при  $k \rightarrow \infty$ . При некотором определенном значении  $k_2$ , зависящем от характеристик слоистой системы, возникает объемная электроупругая волна со скоростью распространения  $S_1$ . Из этой волны при увеличении параметра  $k$  возникает вторая мода волны Лява, скорость распространения которой  $V = V_2(k)$  при увеличении  $k$  убывает от значения  $S_1$  и в пределе при  $k \rightarrow \infty$  стремится к значению  $S_2$ , равную скорости распространения объемных упругих волн в слое. Далее, таким же образом при некотором определенном значении  $k_3$ , зависящем от характеристик слоистой системы, возникает объемная электроупругая волна со скоростью распространения  $S_1$ . Из этой волны при увеличении параметра  $k$  возникает третья мода волны Лява, скорость распространения которой  $V = V_3(k)$  при увеличении  $k$  убывает от значения  $S_1$  и в пределе при  $k \rightarrow \infty$  стремится к значению  $S_2$ , равную скорости распространения объемных упругих волн в слое. Далее, таким же образом возникают остальные более высокие моды  $V_4(k)$ ,  $V_5(k)$  и т.д. волны Лява, число которых при  $k \rightarrow \infty$  стремится к бесконечности, и которые распространяются с убывающими скоростями, удовлетворяющими условию (2.5). В пределе при  $k \rightarrow \infty$  все моды сливаясь, составляют одну объемно-поверхностную волну со скоростью распространения  $S_2$ , которая не может распространяться в рассматриваемых слоистых системах. В этом случае поведение дисперсионных кривых показано на фиг.3.

Случай I(a).2. Слоистые системы с условиями (3.12) и (3.8) из [13, Фиг.4.а, 2.а]. Легко показать, что для систем (3.12) и для систем (3.8) с дополнительным условием  $\beta_1(S_2) \geq R_\infty$  можно провести такие же исследования,

как в случае (3.10). В результате приходим к заключению: в таких слоистых системах при наличии мягкого слоя ( $S_2 < S_1$ ) и условия  $V_{GB} > S_2$  волны Лява существуют при любом значении  $k > 0$ , а их скорость распространения



Фиг.3

принадлежит интервалу  $(S_2, S_1)$ , причем поведение мод волны Лява описывается дисперсионными кривыми, показанными на фиг 3. Для слоистых систем (3.12) имеет место условие  $\beta_1(S_2) > R_0 = R_\infty$ , что согласно (2.30) показывает отсутствие объемно-поверхностных волн в случае двух полупространств.

Такие волны отсутствуют также в слоистых системах (3.8), когда  $\beta_1(S_2) > R_\infty$ . А когда для таких систем имеет место условие  $\beta_1(S_2) = R_\infty$ , то при  $k \rightarrow \infty$  в них существуют объемно-поверхностные волны.

Случай I(a).3. Слоистые системы (3.8) с дополнительным условием  $\beta_1(S_2) < R_\infty$ . Как будет показано ниже, в этом случае поведение мод волны Лява имеет определенную особенность, отсутствующую у слоистых пьезоэлектрических систем с симметрией 622, 6mm, 422, 4mm.

В этом случае в интервале  $(0, k_{\text{пер}})$  для фиксированного значения  $k$  поведение функции  $f(k, \eta)$  в интервале  $0 \leq \eta \leq \eta^*(k)$  подобно предыдущему случаю, а именно: функция  $f(k, \eta)$  на концах указанного интервала принимает значения:  $f(k, 0) = \infty$  и  $f(k, \eta^*(k) = f^*(k) < 0) = f^*(k)$ , и графики функции  $f(k, \eta)$  для фиксированных значений  $k$  пересекаются с ветвями графика функции  $\text{tg}\eta$  в точках с абсциссами  $\eta_1(k), \eta_2(k), \eta_3(k)$  и т.д., причем насколько больше  $k_{\text{пер}}$ , настолько больше и число этих пересечений и имеет место условие (фиг.4):

$$0 = k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_{\text{пер}} \quad (2.33)$$

Отметим, что величина параметра  $k_{\text{пер}}$  зависит от того, в каком соотношении делится отрезок  $[R_0 = R_\infty]$  величиной  $\beta_1(S_2)$ , причем насколько  $\beta_1(S_2)$  близка к  $R_\infty$ , настолько больше и  $k_{\text{пер}}$ ; когда  $\beta_1(S_2) \rightarrow R_\infty$ , то  $k_{\text{пер}} \rightarrow \infty$ , когда

$\beta_1(S_2) \rightarrow R_0$ , то  $k_{\text{пер}} \rightarrow 0$ . Когда  $k = k_{\text{пер}}$ , то  $f(k_{\text{пер}}, 0) = 0$ ,  $f(k_{\text{пер}}, \eta_*(k_{\text{пер}})) = f^*(k_{\text{пер}}) < 0$  и в этом случае график функции  $f(k_{\text{пер}}, \eta)$  (кривая  $m_{\text{пер}}$ ) пересекается с первой ветвью  $l_1$  графика функции  $\text{tg}\eta$  в точке с абсциссой  $\eta = \eta_1(k_{\text{пер}}) = 0$ , т.е. в начале координат, которой соответствует

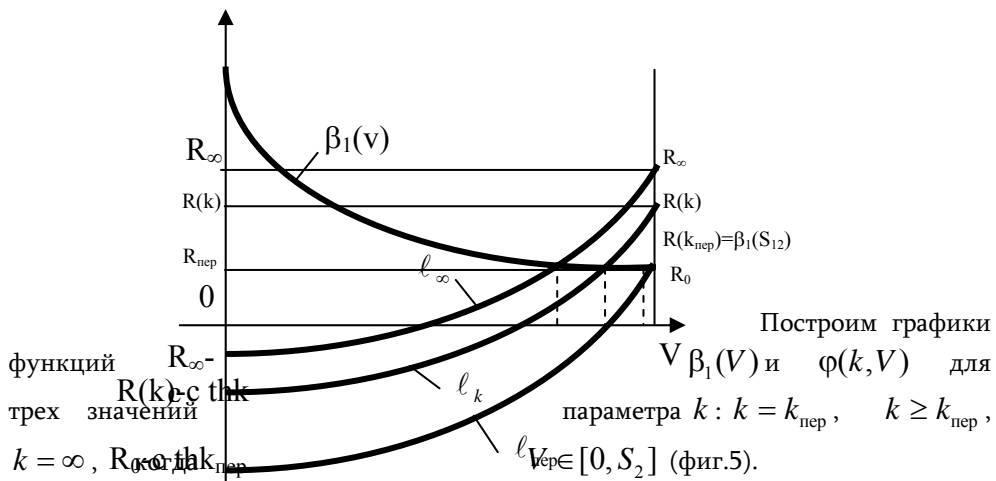


первая мода волны Лява, распространяющейся со скоростью  $V_1(k_{пер}) = S_2$ . Точкам пересечения графика функции  $f(k_{пер}, \eta)$  с графиками остальных ветвей функции  $\text{tg}\eta$  соответствует абсцисса  $\eta_2(k_{пер}), \eta_3(k_{пер})$  и т.д., которым и соответствуют скорости высших мод волны Лява  $V_2(k_{пер}), V_3(k_{пер})$  и т.д. Далее, когда  $k > k_{пер}$ , то  $f(k, 0) = -\infty$ ,  $f(k, \eta^*(k)) = f^*(k) < 0$  и график функции  $f(k, \eta)$  уже не пересекается с первой ветвью  $l_1$  функции  $\text{tg}\eta$ , но обязательно пересекается с ветвями  $l_2, l_3, \dots, l_n$  этой функции (на фиг.4 показан случай, когда  $n=3$ ), определяя соответствующие абсциссы  $\eta_1(k), \eta_2(k), \dots, \eta_n(k)$  точек пересечения и соответствующие скорости мод  $V_2(k), V_3(k), \dots, V_n(k)$ . Начиная с некоторого значения  $k = k_{n+1} > k_{пер}$ , возникают моды порядка  $n+1$  и выше так, как в предыдущем случае.

Таким образом, для рассматриваемых слоистых систем при значениях  $k \in [0; k_{пер}]$  первая мода волны Лява существует и описывается характеристическим уравнением (2.11) (или (1.2)), остальные моды существуют при любом значении параметра  $k$  и описываются характеристическим уравнением (2.1).

Теперь рассмотрим первую моду, когда  $k \geq k_{пер}$ . Ясно, что при  $k = k_{пер}$  скорость  $V = V_1 = S_2$  удовлетворяет также уравнению (2.1). При  $k \geq k_{пер}$  из (2.1) имеем:

$$\beta_1(V) = -c\gamma_2(V)\text{th}[k\gamma_2(V)] + R(k) \equiv \varphi(k, V) \quad (2.34)$$



Как видно из фиг.5, для любого значения  $k \geq k_{пер}$  графики функций  $\beta_1(V)$  и  $\varphi(k, V)$  пересекаются в одной точке, абсцисса которой дает скорость  $V = V_1 = V_1(k)$ . Когда  $k$  начинает увеличиваться от значения  $k = k_{пер}$ , скорость  $V$  убывает от значения  $S_2$  и когда  $k \rightarrow \infty$ , то  $V \rightarrow V_\infty$ , что определяется из уравнения:

$$\beta_1(V_\infty) = -c\gamma_2(V_\infty) + R_\infty \quad (2.35)$$

Легко видеть, что характеристическое уравнение (2.34) не имеет решений, принадлежащих интервалу  $(0, V_\infty)$ .

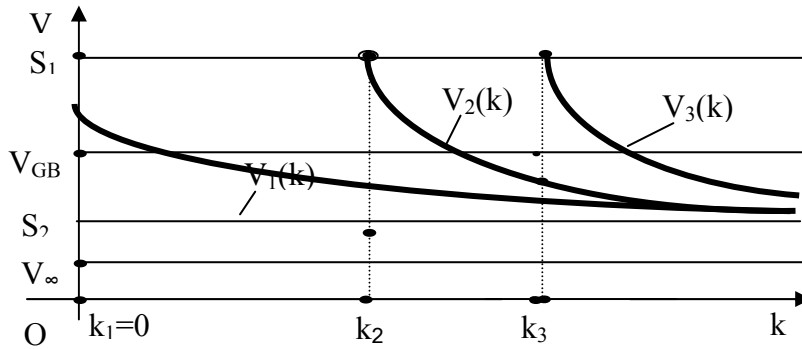
Таким образом, для слоистых систем (3.8) из [13] с дополнительным условием  $\beta_1(S_2) < R_\infty$  поведение мод волны Лява следующее: первая мода волны Лява начинается с волны Гуляева–Блюстеина при  $k = k_1 = 0$  и распространяется при увеличении  $k$  с убывающей скоростью  $V = V_1(k)$ . При достижении  $k$  некоторого определенного значения  $k_{\text{пер}}$ , скорость принимает значение  $V = V(k_{\text{пер}})$ , которое равняется скорости объемных волн в слое  $S_2$ . В дальнейшем, при увеличении  $k$  скорость первой моды продолжает уменьшаться и при  $k \rightarrow \infty$  стремится к определенному значению  $V_\infty$ , причем в интервале  $(0, k_{\text{пер}})$  первая мода обычного типа (как классические волны Лява), а в интервале  $(k_{\text{пер}}, \infty)$  – щелевого типа, значение  $k_{\text{пер}}$  является переходным между этими случаями. Подобными свойствами не обладают как обычные волны Лява, так и электроупругие волны Лява для предыдущих слоистых систем.

Начиная с некоторого значения  $k_2$ , возникает вторая мода волны Лява и при увеличении  $k$  при определенных критических значениях  $k_3, k_4$  и т.д. возникают остальные высшие моды и подобно предыдущим системам в пределе, когда  $k \rightarrow \infty$ , эти моды сливаясь, составляют одну объемно-поверхностную волну, которая не может распространяться в рассматриваемой слоистой системе.

В этом случае поведение дисперсионных кривых показано на фиг.6.

Отметим следующий важный факт. Легко показать, основываясь на предыдущих рассуждениях, что в случае мягкого слоя характеристическое уравнение (1.2) при условии (2.3) для коэффициента электромеханической связи  $R(k)$  всегда имеет решение при некотором значении  $k_2$  параметра  $k$ , описывающее объемную волну,

от которой рождается вторая мода волны Лява.



Фиг.6

При увеличении  $k$  появляются другие решения, описывающие остальные высшие моды, скорость которых, уменьшаясь с увеличением  $k$ , при  $k \rightarrow \infty$

стремится к значению  $S_2$  – скорости объемных волн в слое. При этом, в предельном случае двух полупространств существование объемно–поверхностной волны определяется по условию (2.18). Первая же мода в зависимости от поведения  $R(k)$ , как выяснилось выше, может иметь различные поведения. Поэтому в дальнейшем будем исследовать, в основном, поведение первой моды, которое в общем случае описывается обоими характеристическими уравнениями (1.2) и (2.1).

Выше мы рассматривали поведение мод электроупругой волны Лява в мягких слоистых системах ( $S_2 < S_1$ ), для которых коэффициент электромеханической связи  $R(k) > 0$ , а скорость волны Гуляева–Блюстеина в подложке удовлетворяет условию  $S_2 < V_{GB}$ . В следующей работе будем исследовать волновой процесс в указанных слоистых системах при предположениях: 1)  $V_{GB} = S_2$ , 2)  $V_{GB} < S_2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Love A.E.H. Some problems of Geodinamics. London: Cambrige University Press. 1911, 180p.
2. Дъелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424с.
3. Кессених Г.Г., Любимов В.Н., Шувалов Л.А. О поверхностных волнах Лява в пьезоэлектриках. // Кристаллография. 1982. Т.27. №3. С.437-443
4. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А. Поведение мод сдвиговых волн Лява в пьезоэлектрических подложках с диэлектрическим слоем. Ереван: Материалы Всесоюз. науч. семинара, 1991, с.49-54
5. Curtis R.G., Redwood M. Transvers surface wave on a piezoelectric material carring a metal layer of finite thickness.// J. Appl. Phys. 1973. Vol.44. N5. P.2002-2007
6. Даноян З.Н., Манукян Г.А. Поведение мод сдвиговых поверхностных электроупругих волн Лява в гексагональных и тетрагональных пьезоэлектрических подложках с проводящим слоем.– Тезисы докладов “Механика неоднородных структур”, Львов, 1991. С. 101.
7. Даноян З.Н. Манукян Г.А. О поверхностных электроупругих волнах Лява в пьезоэлектрических подложках с металлизированным диэлектрическим слоем.// Изв. АН Арм. ССР, Механика. 1995.Т. 48. №3. С.43-52.
8. Кессених Г.Г., Любимов В.Н., Филиппов В.В. Поперечные поверхностные акустические волны для изотропной подложки с пьезоэлектрическим слоем. // Акуст. журнал. 1985. Т.31. вып.4. С.492-495
9. Аветисян А.С. Поверхностные сдвиговые волны в пьезоэлектрическом полупространстве с диэлектрическим слоем.–III Всесоюзн. симпоз. « Теоретические вопросы магнитоупругости » (тезисы докладов), Ереван - Цахкадзор, 1984, с. 7-10.
10. Балакирев М.К., Гилянский И.А. Волны в пьезоэлектриках. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
11. Иона Ф.,Ширане Д. Сегнетоэлектрические кристаллы.–М.:Мир,1965
12. Олинер А. Поверхностные акустические волны. М.:Наука,1981.281с.
13. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. Поверхностные электроупругие волны Лява в слоистой системе с пьезоэлектрической подложкой и диэлектрическим слоем. (Исследование поведения коэффициента



электромеханической  
// Изв.НАН РА. Механика.2003. Т. 56. №4. С.46-55.

связи).

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
9.09.2005