

УДК 393.3

УСТОЙЧИВОСТЬ БЕЗМОМЕНТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ  
 ОБОЛОЧКИ-МЕМБРАНЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Ванян Л.А.

L. A. Vanyan

Անմոմենտ գլանային մեմբրանի թաղանթի կայունությունը գազի գերձայնային հոսքում

Ուսումնասիրվում է անմոմենտ գլանային մեմբրանի թաղանթի կայունությունը գազի երկչափ գերձայնային հոսքում: Համեմատվում են անկայունության տիրույթները ըստ «պիստոնային» և ըստ ճշգրտված մոտավորության՝ երբ աերոդինամիկական ճնշման կախվածությունը մեմբրանի շարժումից կրում է դիֆերենցիալ տիպի ոչ լոկալ բնույթ: Հաշվարկները ճշգրտված տեսությամբ ցույց են տալիս փոքր գերձայնային Մախի թվի դեպքում մեմբրանի անկայունություն, ինչպես նաև զգալիորեն փոքրանում է կայունության տիրույթի վերին սահմանը, ի տարբերություն «միտոսային» տեսության:

L. A. Vanyan

The Stability Of Momentless Cylindrical Membrane Shell In Supersonic Gas Flow

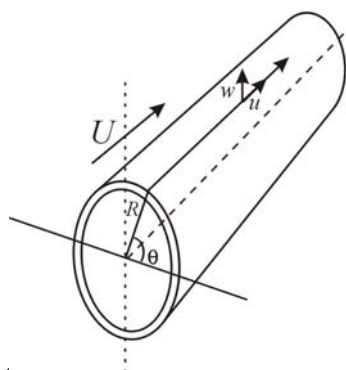
The stability of momentless cylindrical membrane shell in the two-dimensional flow of gas is investigated here. The areas of instability are compared according to “piston” theory and the one of precise approximation, when the aerodynamical pressure dependence from the motion of membrane has non-local character of differential type. Unlike the “piston” theory, the calculations according to the theory of precise approximation show the instability of membrane under the small supersonic numbers of Mach. At the same time the upper verge (border) of stability area is considerably reduced as well.

Исследуется устойчивость безмоментной цилиндрической оболочки мембраны в двумерном потоке газа. Сравниваются области неустойчивости по “поршневой” теории и по уточненному приближению, когда зависимость аэродинамического давления от движения мембраны носит нелокальный характер дифференциального типа. В отличие от “поршневой”, расчеты по уточненной теории показывают неустойчивость мембраны при малых сверхзвуковых числах Маха, а также ощутимо снижается верхняя граница области устойчивости.

Колебания безмоментной круговой цилиндрической оболочки мембраны в двумерном потоке газа описываются уравнениями:

$$\rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_0 h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{Eh}{R^2(1-\nu^2)} w + \frac{\nu Eh}{R(1-\nu^2)} \frac{\partial u}{\partial x} + P = 0 \quad (1)$$

$$\rho_0 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\nu Eh}{R(1-\nu^2)} \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$



где  $u(x, t)$ ,  $w(x, t)$  – перемещения,  $\rho_0$  – плотность материала,  $h, R$  – соответственно, толщина и радиус срединной поверхности оболочки,  $\varepsilon$  – коэффициент затухания,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль Юнга,  $N$  – усилие,  $P(x, t)$  – аэродинамическое давление.

1. По точной теории для линеаризованного потенциального потока

Фиг. 1

идеального газа зависимость давления от производных прогиба представляется интегральным оператором с весьма сложным ядром [1]. Но при больших скоростях потока газа (т.е. при больших числах Маха  $M = U/a_0$ ) для упрощения задачи можно применить «поршневою» теорию [1], представив эту зависимость в виде (2)

$$P = \rho a_0 \left( \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность газа,  $a_0$  – скорость звука для невозмущенного потока газа,  $U$  – скорость потока газа.

Тогда система (1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - c_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{c_2^2}{R^2} w + \frac{v c_2^2}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma \left( \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{v c_2^2}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

где  $c_1^2 = \frac{N}{\rho_0 h}$ ,  $c_2^2 = \frac{E}{\rho_0(1-v^2)}$ ,  $\gamma = \frac{\rho a_0}{\rho_0 h}$ .

Представив решение в виде бегущих волн  $w = w_0 e^{i(\omega t - kx)}$ ,  $u = u_0 e^{i(\omega t - kx)}$ , получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$D(\omega, k) \equiv \left( \omega^2 - i(\varepsilon + \gamma)\omega - c_1^2 k^2 + i\gamma U k - \frac{c_2^2}{R^2} \right) \left( \omega^2 - c_2^2 k^2 \right) - \frac{v^2 c_2^4 k^2}{R^2} = 0 \quad (4)$$

После введения безразмерных величин

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{a_0}, \alpha_2 = \frac{c_2}{a_0}, \alpha_3 = Rk, \alpha_4 = \frac{\rho}{\rho_0}, \alpha_5 = \frac{h}{R}, \lambda = \frac{\varepsilon}{\gamma} \quad (5)$$

уравнение (4) примет следующий вид:

$$\left( \Omega_0^2 - i \frac{\alpha_4}{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_5} (\lambda + 1) \Omega_0 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} + i \frac{\alpha_4}{\alpha_2^2 \alpha_3 \alpha_5} M - \frac{1}{\alpha_3^2} \right) (\Omega_0^2 - 1) - \frac{v^2}{\alpha_3^2} = 0 \quad (6)$$

где  $\Omega_0 = \omega/c_2 k$ .

Отделяя действительные и мнимые части (6), получим следующую систему:

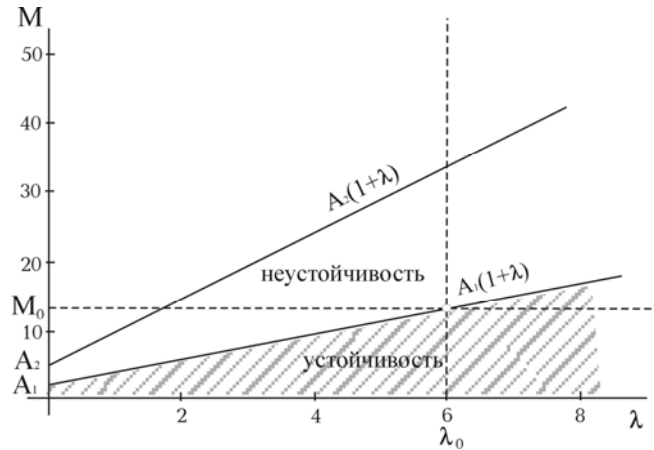
$$\begin{cases} \left( \Omega_0^2 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} - \frac{1}{\alpha_3^2} \right) (\Omega_0^2 - 1) - \frac{v^2}{\alpha_3^2} = 0 \\ \left( (\lambda + 1) \Omega_0 - \frac{M}{\alpha_2} \right) (\Omega_0^2 - 1) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

из которой получим следующие соотношения между  $M$  и  $\lambda$  (фиг. 2):

$$M_i = A_i (1 + \lambda), \text{ где } A_i = \alpha_i \Omega_{0i} \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

$$\Omega_{01} = \sqrt{\frac{\alpha_1^2 / \alpha_2^2 + \alpha_3^{-2} + 1 - \sqrt{(\alpha_1^2 / \alpha_2^2 + \alpha_3^{-2} - 1)^2 + 4v^2 / \alpha_3^2}}{2}}$$

$$\Omega_{02} = \sqrt{\frac{\alpha_1^2 / \alpha_2^2 + \alpha_3^{-2} + 1 + \sqrt{(\alpha_1^2 / \alpha_2^2 + \alpha_3^{-2} - 1)^2 + 4v^2 / \alpha_3^2}}{2}}$$



Фиг. 2

Для зафиксированных  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $\alpha_3 = 0.4$ ,  $\alpha_4 = 1/3 \cdot 10^{-3}$ ,  $\alpha_5 = 0.01$ ,  $v = 0.25$ ,  $\lambda = 6$  в табл. 1 приведены значения действительных и мнимых частей двух фазовых скоростей  $c = \omega/k$  при различных числах Маха, вычисленные из дисперсионного уравнения (6).

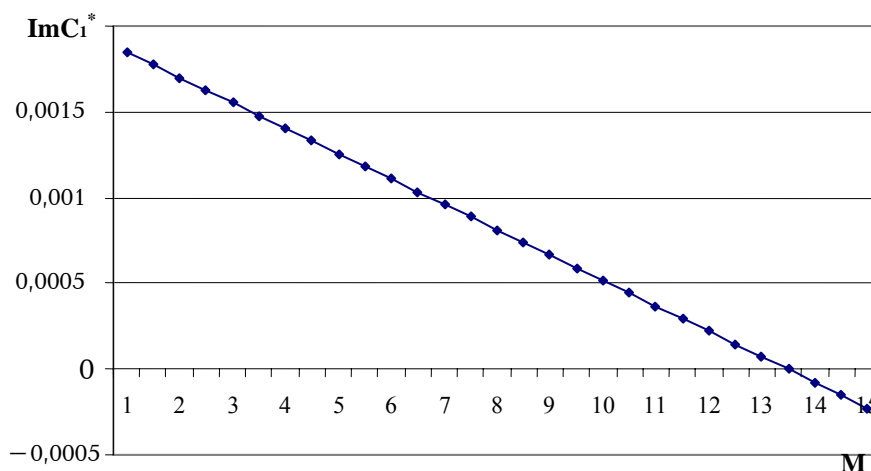
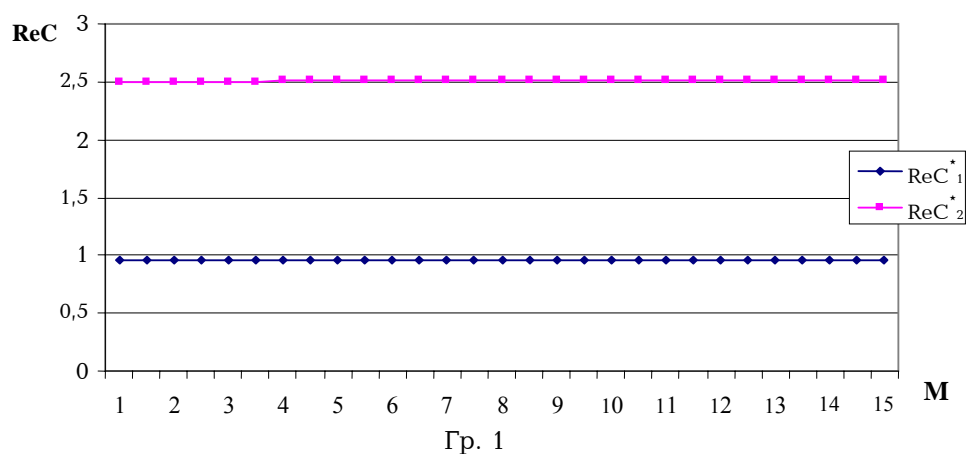
Построены графики действительных и мнимых частей двух фазовых скоростей  $c = \omega/k$  при различных числах Маха .

Таблица 1

$M$	$\text{Re } C_1^*$	$\text{Im } C_1^*$	$\text{Re } C_2^*$	$\text{Im } C_2^*$
1.0	0.962513	0.00184954	2.50514	0.139734
1.5	0.962506	0.00177571	2.50516	0.137683
2.0	0.962499	0.00170184	2.50517	0.135632
2.5	0.962493	0.00162793	2.50518	0.133581
3.0	0.962487	0.00155399	2.5052	0.13153
3.5	0.962481	0.00148002	2.50522	0.129479
4.0	0.962476	0.00140601	2.50524	0.127429
4.5	0.962471	0.00133198	2.50526	0.125378
5.0	0.962466	0.00125791	2.50528	0.123327
5.5	0.962461	0.00118382	2.50531	0.121277
6.0	0.962457	0.00110971	2.50533	0.119226
6.5	0.962453	0.00103557	2.50536	0.117176
7.0	0.962449	0.00096141	2.50539	0.115126
7.5	0.962446	0.00088723	2.50542	0.113075
8.0	0.962442	0.000813032	2.50545	0.111025
8.5	0.962439	0.000738818	2.50548	0.108975
9.0	0.962437	0.000664588	2.50552	0.106925

9.5	0.962435	0.000590346	2.50555	0.104875
10.0	0.962433	0.000516092	2.50559	0.102826
10.5	0.962431	0.000441828	2.50563	0.100776
11.0	0.962429	0.000367556	2.50567	0.098727
11.5	0.962428	0.000293278	2.50572	0.096677
12.0	0.962427	0.000218995	2.50576	0.094628
12.5	0.962427	0.000144708	2.50581	0.092579
13.0	0.962427	0.000070421	2.50586	0.09053
13.5	0.962427	-3.86689x10 <sup>-6</sup>	2.5059	0.088481
14.0	0.962427	-0.0000781526	2.50596	0.086432
14.5	0.962428	-0.000152435	2.50601	0.084384
15.0	0.962428	-0.000226711	2.50606	0.082335

здесь.  $C^* = c/c_2 5$



Неустойчивость мембраны соответствует отрицательным значениям мнимых частей  $\omega$  [1], и как видно из табл. 1 и фиг. 2,  $M = 13.5$  является точкой, с

которой начинается область неустойчивости для больших чисел Маха. Назовем ее “верхней границей” устойчивости.

2. “Поршневое” приближение применимо при больших сверхзвуковых скоростях потока. При небольших же сверхзвуковых числах Маха оно становится непригодным. В работе [2] построено новое приближение для аэродинамического давления, которое применимо также при малых числах Маха.

$$\frac{D_1 P}{Dt} = \rho a_0 \frac{D_1}{Dt} \left[ \frac{Dw}{Dt} - \frac{a_0 w}{2R} \right] + \chi \rho a_0^3 \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{3}{4} \frac{w}{R^2} \right] \quad (9)$$

$$\frac{D_1}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (U - a_0) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}$$

где  $\chi$  – поправочный коэффициент ( $\chi = 0$  соответствует “поршневому” приближению).

Представив решение в виде бегущих волн  $w = w_0 \exp(i(\omega t - kx))$ ,  $u = u_0 \exp(i(\omega t - kx))$ , получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$D(\omega, k) \equiv \left( \frac{\omega - ka_0(M-1)}{\gamma a_0^2} \left( i \left( \omega^2 - c_1^2 k^2 - \frac{c_2^2}{R^2} + \frac{\gamma a_0}{2R} \right) - \gamma(a_0 k M - \omega(\lambda + 1)) \right) + \right. \quad (10)$$

$$\left. + \chi k^2 - \frac{3\chi}{4R^2} \right) (\omega^2 - c_2^2 k^2) - i \frac{v^2 c_2^4 k^2}{\gamma a_0^2 R^2} (\omega - ka_0(M-1)) = 0$$

Перейдя на безразмерные величины (5), уравнение (10) примет вид:

$$\left( i \left( \Omega_0 - \frac{M-1}{\alpha_2} \right) \left( \Omega_0^2 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} - \frac{1}{\alpha_3^2} + \frac{\alpha_4}{2\alpha_2^2 \alpha_3^2 \alpha_5} \right) - \frac{\alpha_4}{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_5} \left( \Omega_0 - \frac{M-1}{\alpha_2} \right) \times \right. \quad (11)$$

$$\left. \times \left( \frac{M}{\alpha_2} - \Omega_0(\lambda + 1) \right) + \frac{\alpha_4}{\alpha_2^3 \alpha_3 \alpha_5} \left( \chi - \frac{3\chi}{4\alpha_3^2} \right) \right) (1 - \Omega_0^2) + i \frac{v^2}{\alpha_3^2} \left( \Omega_0 - \frac{M-1}{\alpha_2} \right) = 0$$

действительные и мнимые части которого составляют систему (12)

$$\begin{cases} \left( \Omega_0^2 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} - \frac{1}{\alpha_3^2} + \frac{\alpha_4}{2\alpha_2^2 \alpha_3^2 \alpha_5} \right) (1 - \Omega_0^2) + \frac{v^2}{\alpha_3^2} = 0 \\ \left( \Omega_0 - \frac{M-1}{\alpha_2} \right) \left( \frac{M}{\alpha_2} - \Omega_0(\lambda + 1) \right) - \frac{1}{\alpha_2^2} \left( \chi - \frac{3\chi}{4\alpha_3^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Для  $\chi = 0$  из (12) получаем

$$M_i = A_i(1 + \lambda), \quad M_j = A_j + 1, \quad \text{где } A_i = \alpha_i \Omega_{0i}, \quad i = 1, 2,$$

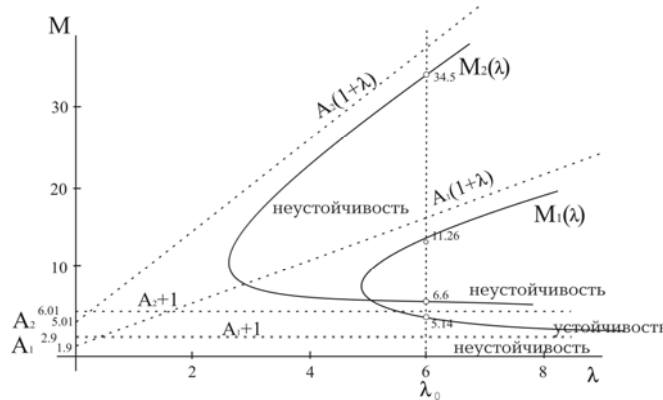
$$\Omega_{01} = \sqrt{\frac{\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_3^2} - \frac{\alpha_4}{2\alpha_2^2 \alpha_3^2 \alpha_5} + 1 - \sqrt{\left( \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_3^2} - \frac{\alpha_4}{2\alpha_2^2 \alpha_3^2 \alpha_5} - 1 \right)^2 + \frac{4v^2}{\alpha_3^2}}}{2}}$$

$$\Omega_{02} = \sqrt{\frac{\alpha_1^2 + \frac{1}{\alpha_2^2} - \frac{\alpha_4}{2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_5} + 1 + \sqrt{\left(\frac{\alpha_1^2 + \frac{1}{\alpha_2^2} - \frac{\alpha_4}{2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_5} - 1\right)^2 + \frac{4\nu^2}{\alpha_3^2}}}{2}} \quad (13)$$

При  $\chi \neq 0$  из (12) получаем

$$\lambda = \frac{1}{\alpha_2 \Omega_0} \left( \frac{4\alpha_3^2 \chi - 3\chi}{4\alpha_3^2 (\alpha_2 \Omega_0 - M + 1)} + M \right) - 1 \quad (14)$$

что соответствует кривым  $M_1(\lambda)$ ,  $M_2(\lambda)$  для  $\Omega_{01}$ ,  $\Omega_{02}$ . Линии (13) являются асимптотами для кривых  $M_1(\lambda)$  и  $M_2(\lambda)$



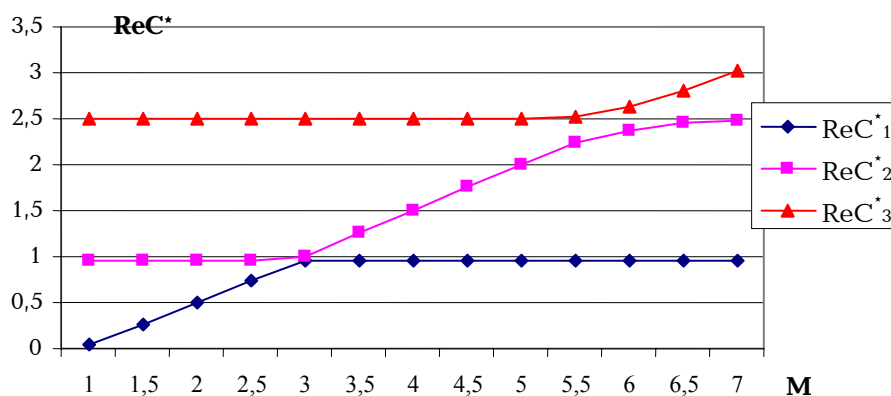
Фиг. 3

Для зафиксированных  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $\alpha_3 = 0.4$ ,  $\alpha_4 = 1/3 \cdot 10^{-3}$ ,  $\alpha_5 = 0.01$ ,  $\nu = 0.25$ ,  $\lambda = 6$ ,  $\chi = 5$  в табл. 2 приведены значения действительных и мнимых частей трех фазовых скоростей  $c = \omega/k$  (по уточненной теории имеются уже три фазовые скорости, что является следствием повышения порядка дифференциального уравнения для прогиба, по сравнению с "поршневой" теорией) при различных числах Маха, вычисленные из дисперсионного уравнения (6).

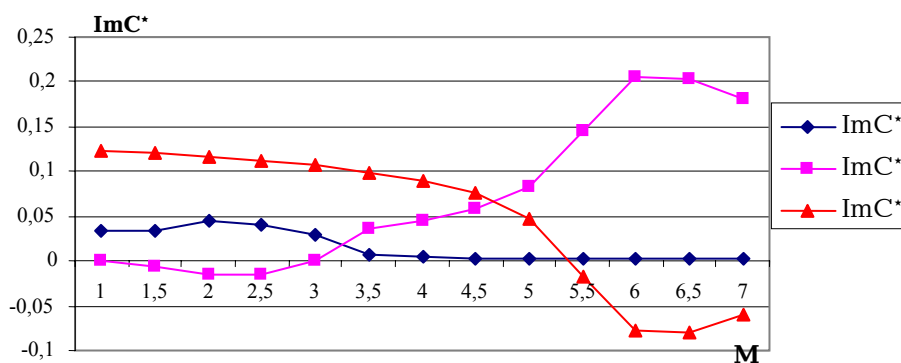
Таблица 2

$M$	$\text{Re } C_1^*$	$\text{Im } C_1^*$	$\text{Re } C_2^*$	$\text{Im } C_2^*$	$\text{Re } C_3^*$	$\text{Im } C_3^*$
1.0	0.0499267	0.0329894	0.962428	0.00033733	2.5045	0.123949
1.5	0.250102	0.0334784	0.962428	-0.006	2.50441	0.120948
2.0	0.500289	0.045	0.962479	-0.015	2.50427	0.116816
2.5	0.749887	0.0401898	0.963164	-0.015	2.50406	0.112093
3.0	0.963423	0.029	1	0	2.50375	0.106484
3.5	0.963323	0.0061325	1.25063	0.0360398	2.50328	0.0994585
4.0	0.962808	0.0039216	1.50197	0.0449458	2.50251	0.0899489
4.5	0.96266	0.00305583	1.75342	0.0575963	2.50125	0.0754349
5.0	0.962592	0.00256915	2.00482	0.0826633	2.49996	0.0481952
5.5	0.962553	0.0022419	2.23528	0.146038	2.51958	-0.0174533
6.0	0.962526	0.00199662	2.37037	0.205046	2.63456	-0.0787681

<b>6.5</b>	0.962507	0.00179902	2.44707	0.204124	2.80792	-0.0801582
<b>7.0</b>	0.962493	0.0016316	2.48242	0.180496	3.02263	-0.0588364



Гр. 3



Гр. 4

Как видно из табл. 2, в отличие от “поршневой” теории, по уточненной теории имеет место также неустойчивость при малых сверхзвуковых числах Маха [3,4,5]. Для больших же чисел Маха неустойчивость начинается уже с  $M = 5.4$  (по “поршневой” теории неустойчивость начиналась с  $M = 13.5$ ).

В табл. 3 приведены области неустойчивостей для различных  $\chi$ .

Таблица 3

	$\chi = 0.1$	$\chi = 0.2$	$\chi = 0.3$	$\chi = 0.4$	$\chi = 0.5$	$\chi = 1$
Область неустойчивости	с $M = 2.9$ по 2.99	с $M = 2.9$ по 2.99	с $M = 2.9$ по 2.99	с $M = 2.8$ по 2.99	с $M = 2.8$ по 2.99	с $M = 2.6$ по 2.99
	с $M = 6.1$	с $M = 6$	с $M = 6$	с $M = 6$	с $M = 6$	с $M = 5.9$

	$\chi = 1.5$	$\chi = 2$	$\chi = 2.5$	$\chi = 3$	$\chi = 3.5$	$\chi = 4$
Область неустойчивости	с $M = 2.5$ по 2.99	с $M = 2.3$ по 2.99	с $M = 2.2$ по 2.99	с $M = 2$ по 2.99	с $M = 1.9$ по 2.99	с $M = 1.7$ по 2.99
	с $M = 5.9$	с $M = 5.8$	с $M = 5.8$	с $M = 5.7$	с $M = 5.6$	с $M = 5.6$

	$\chi = 2.5$	$\chi = 3$	$\chi = 3.5$	$\chi = 4$	$\chi = 4.5$	$\chi = 5$
Область неустойчивости	с $M = 2.2$ по 2.99	с $M = 2$ по 2.99	с $M = 1.9$ по 2.99	с $M = 1.7$ по 2.99	с $M = 1.6$ по 2.99	с $M = 1.4$ по 2.99
	с $M = 5.8$	с $M = 5.7$	с $M = 5.6$	с $M = 5.6$	с $M = 5.6$	с $M = 5.4$

Уже при малых  $\chi$  уточненная теория дает существенную разницу как для малых, так и для больших сверхзвуковых чисел Маха, по сравнению с “поршневой” теорией, значительно уменьшает область устойчивости, ощутимо снижая ее верхнюю границу.

В работе [5] исследована устойчивость конечной мембраны при малых числах Маха по одной моде. Расчеты по УТ показывают неустойчивость конечной мембраны с закрепленными концами при малых скоростях Маха.

В работе [6] показано, что неустойчивость бесконечной мембраны при малых сверхзвуковых скоростях всегда имеет конвективный характер. Для конечной же мембраны вопрос остается открытым.

Автор выражает благодарность профессору М.В. Белубеяну за помощь и ценные указания.



#### ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339с.
2. Минасян М.М., Минасян Д.М. Новое приближение в задаче о флаттере пластинки в сверхзвуковом потоке газа. // Докл. НАН РА. 2001. Т.1. №1. С.49-54.
3. Минасян Д.М. Флаттер пластинки при малых сверхзвуковых скоростях потока газа. Ереван: Канд. диссертация. 2002. 115с.
4. Белубекян М.В., Минасян М.М. О характере неустойчивости бесконечной мембраны в сверхзвуковом потоке газа. // Изв. НАН РА. Механика. 2001. Т.53. №3. С.29-35.
5. Ванян Л.А. К устойчивости конечной мембраны в сверхзвуковом потоке газа при малых числах Маха. // Сб. научных трудов конференции “Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем”. 2002. С. 134-137.
6. Ванян Л.А., Минасян М.М. К флаттеру мембраны в сверхзвуковом потоке газа. // Изв. НАН РА. Механика. 2002. Т.55. №3. с. 59-64.

Ереванский  
государственный университет

Поступила в редакцию  
28.09.2005