

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ
 ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЯТИСЛОЙНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ
 ПОЛОСЫ И НЕКОТОРОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Саакян А.В.

Լ.Ա.Աղալովյան, Ռ.Ս.Գևորգյան, Ա.Վ.Սահակյան

Հնգաշերտ իզոտրոպ շերտառածգական շերտի համար խառը եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը և որոշ կիրառություն

Չերտառածգական շերտի համար առածգականության տեսության երկչափ հավասարումների ասիմպտոտիկ ինտեգրմամբ հաշվարկված են համաչափ հավաքված հնգաշերտ իզոտրոպ շերտի ներքին խնդրի լարումների թեկոորը և տեղափոխությունների վեկտորը, երբ շերտերի մի մասի միջև տեղի ունի ոչ լրիվ կոնտակտ Կուլոնի օրենքով: Կատարված է վերլուծություն մի մասնավոր դեպքի համար, որով կարելի է մոդելավորել սկավառակային արգելակների լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը արգելակման ժամանակ:

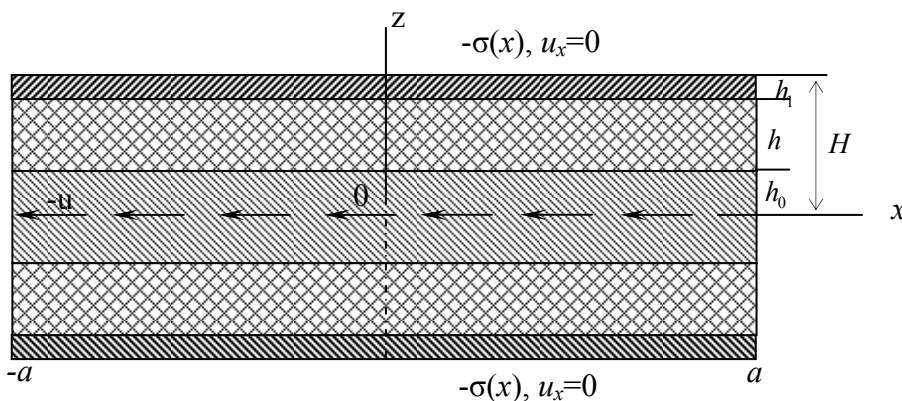
L.A. Aghalovyan, R.S. Gevorgyan, A.V. Sahakyan

Asymptotic solution of a mixed boundary value problem for five-layer isotrope thermoelastic strip and some application

By asymptotic integration of the two-dimensional equations of elasticity theory for a thermoelastic strip, the components of stress tensor and components of displacement vector are calculated in inner problem of symmetrical assembled five-layer strip, when between a parts of layers there are noncomplete contact subjected to Coulomb law of dry friction. Analysis of the special case, which can model of stress-strain state of brake pads at braking, is carried out.

Асимптотическим интегрированием двумерных уравнений теории упругости для термоупругой полосы вычислены компоненты тензора напряжений и вектора перемещения во внутренней задаче симметрично собранной пятислойной изотропной полосы, когда между частью слоев осуществляется неполный контакт по закону сухого трения Кулона. Проведен анализ для частного случая, которым можно смоделировать напряженно-деформированное состояние дисковых тормозных колодок при торможении.

Постановка задачи. Пусть имеем составную полосу, занимающую область $\Omega = \{x, z : |x| \leq a, -H \leq z \leq H, |a| \gg H = h_0 + h + h_1\}$ и состоящую из пяти симметрично собранных слоев, упругим и температурным характеристикам которых в дальнейшем придаются индексы в соответствии с индексами их толщин (фиг.1). При этом предполагается, что средний слой имеет возможность скольжения и в зоне контакта со соседними слоями имеет место закон Кулона



Фиг.1.

сухого трения с коэффициентом трения f .

На внешних краях полосы заданы симметричные смешанные граничные условия

$$\sigma_{zz}(x, \pm H) = -\sigma(x); \quad u_x(x, \pm H) = 0 \quad (1.1)$$

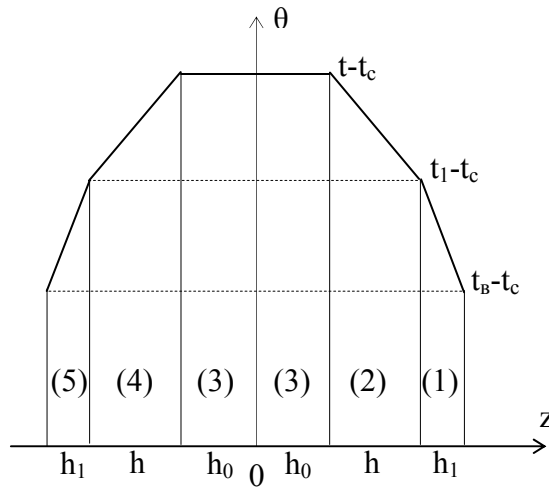
Считается, что ось симметрии полосы жестко смещается на $-u = \text{const}$

$$u_x(x, 0) = -u, \quad u_z(x, 0) = 0, \quad (1.2)$$

а условия контакта между слоями имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{jz}^{(1)}(x, h_0 + h) &= \sigma_{jz}^{(2)}(x, h_0 + h), \quad u_j^{(1)}(x, h_0 + h) = u_j^{(2)}(x, h_0 + h) \\ \sigma_{jz}^{(4)}(x, -h_0 - h) &= \sigma_{jz}^{(5)}(x, -h_0 - h), \quad u_j^{(4)}(x, -h_0 - h) = u_j^{(5)}(x, -h_0 - h) \quad j = x, z \\ \sigma_{zz}^{(2)}(x, h_0) &= \sigma_{zz}^{(3)}(x, h_0), \quad u_z^{(2)}(x, h_0) = u_z^{(3)}(x, h_0) \\ \sigma_{xz}^{(2)}(x, h_0) &= \sigma_{xz}^{(3)}(x, h_0) = f \sigma_{zz}^{(3)}(x, h_0) \\ \sigma_{zz}^{(4)}(x, -h_0) &= \sigma_{zz}^{(3)}(x, -h_0), \quad u_z^{(4)}(x, -h_0) = u_z^{(3)}(x, -h_0) \\ \sigma_{xz}^{(4)}(x, -h_0) &= \sigma_{xz}^{(3)}(x, -h_0) = f \sigma_{zz}^{(3)}(x, -h_0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

По модели Дюгамеля-Неймана [1-3] учитывается также влияние изменения температурного поля θ на напряженное состояние. Исходя из того, что средний слой тонок и его нагревание за счет действия сил трения происходит симметрично с обоих продольных краев, будем полагать, что в среднем слое $|z| \leq h_0$ поддерживается постоянная температура t , а в полосах $h_0 < |z| \leq h + h_1$ температура меняется кусочно-линейно (фиг.2). При этом считается, что на гранях $z = \pm(h_0 + h + h_1)$ имеет место теплообмен с окружающей средой, имеющей температуру t_c .



Фиг.2.

Исходя из принятых предположений, для изменения температур θ в каждом слое будем иметь:

$$\begin{aligned}
 \theta_3 &= t - t_c = \text{const} & -h_0 \leq z \leq h_0 \\
 \theta_2 &= t - t_c - \frac{z - h_0}{h} (t - t_1) & h_0 \leq z \leq h_0 + h \\
 \theta_4 &= t - t_c + \frac{z + h_0}{h} (t - t_1) & -h_0 - h \leq z \leq -h_0 \\
 \theta_1 &= \frac{(t_1 - t_c)}{\lambda_1 + \alpha h_1} [\lambda_1 - \alpha (z - h_0 - h - h_1)] & h_0 + h \leq z \leq h_0 + h_1 + h \\
 \theta_5 &= \frac{(t_1 - t_c)}{\lambda_1 + \alpha h_1} [\lambda_1 + \alpha (z + h_0 + h + h_1)] & -h_0 - h - h_1 \leq z \leq -h_0 - h
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

где t_1 – температура на контактной линии $z = h_0 + h$, которая определяется из условия равенства тепловых потоков на этой линии и дается формулой

$$t_1 = \frac{\lambda_2 (\lambda_1 + \alpha h_1) t + \lambda_1 \alpha h t_c}{\lambda_1 \lambda_2 - \alpha (\lambda_1 h - \lambda_2 h_1)} \tag{1.5}$$

λ_1, λ_2 – коэффициенты теплопроводности соответственно первого (пятого) и второго (четвертого) слоев, α – коэффициент теплообмена внешнего слоя со средой.

Требуется определить напряженно-деформированное состояние полосы.

Решение задачи. Для решения поставленной задачи в уравнениях плоской деформации теории упругости с учетом влияния температурного поля, записанных для каждого слоя,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \quad (x, z) \\
\frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{1-\nu}{2G} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{2G} \sigma_{zz} + \alpha(1+\nu)\theta \quad (x, z) \\
\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} &= \frac{1}{G} \sigma_{xz}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

переходим к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \zeta = \frac{z}{H} = \varepsilon^{-1} \frac{z}{a}, \quad \varepsilon = \frac{H}{a}, \quad u = \frac{u_x}{a}, \quad w = \frac{u_z}{a} \tag{2.2}$$

и получаем сингулярно возмущенную малым параметром ε систему уравнений, решение которой ищем в виде асимптотического разложения [1-3]

$$Q(\xi, \zeta) = \sum_{s=0}^S \varepsilon^{\chi_Q+s} Q^{(s)}(\xi, \zeta) \tag{2.3}$$

где для данного класса задач асимптотические порядки величин имеют вид $\chi_\sigma = 1$ (для всех напряжений) и $\chi_u = 0$ (для всех перемещений).

Одновременно представим температурную функцию в виде

$$\theta = \sum_{s=0}^S \varepsilon^{-1+s} \theta^{(s)}(\xi, \zeta) \tag{2.4}$$

Подставив (2.3), (2.4) в возмущенную систему уравнений и приравняв соответствующие коэффициенты при ε^k в левых и правых частях, получим непротиворечивую систему уравнений относительно коэффициентов разложения (2.3), решение которой выражается через рекуррентные формулы, которые в размерных координатах и перемещениях имеют вид:

$$\begin{aligned}
Q &= \sum_{s=0}^S Q^{(s)}(x, z) \\
\sigma_{jz}^{(s)} &= \sigma_{jz}^{(s)}(x) + \sigma_{jz_*}^{(s)}(x, z) \\
\sigma_{xx}^{(s)} &= \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{zz}^{(s)} + \frac{2G}{1-\nu} \frac{\partial u_x^{(s-1)}}{\partial x} - \frac{2(1+\nu)G}{1-\nu} \theta^{(s)} \\
u_x^{(s)} &= u_{x0}^{(s)}(x) + \frac{z}{G} \sigma_{xz0}^{(s)} + u_{x_*}^{(s)}(x, z) \\
u_z^{(s)} &= u_{z0}^{(s)}(x) + \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} z \sigma_{zz0}^{(s)} + u_{z_*}^{(s)}(x, z) \\
\sigma_{jz_*}^{(s)} &= - \int_0^z \frac{\partial \sigma_{xj}^{(s-1)}}{\partial x} dz \quad j = x, z \\
u_{x_*}^{(s)} &= \int_0^z \left(\frac{1}{G} \sigma_{xz_*}^{(s)} - \frac{\partial u_z^{(s-1)}}{\partial x} \right) dz
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$u_{z_*}^{(s)} = \int_0^z \left(\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} z \sigma_{zz_*}^{(s)} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_x^{(s-1)}}{\partial x} \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta^{(s)} \right) dz$$

где величины $\sigma_{jz_0}^{(s)}$, $u_{j_0}^{(s)}$ ($j = x, z$) – по четыре функции интегрирования для каждого слоя, которые должны определяться из условий (1.1)-(1.3).

Уравнения (2.1) и их общее решение, выраженное рекуррентными формулами (2.5), справедливы для всех слоев, поэтому величинам не приписаны индексы, указывающие слой.

Удовлетворив граничным условиям (1.1), условиям симметрии (1.2) и условиям контакта слоев (1.3) для $s = 0$ (первого шага итерации) получаем

1) для первого слоя ($h_0 + h \leq z \leq h_0 + h_1 + h$)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(1,0)} &= -\frac{\nu_1}{1-\nu_1} \sigma(x) - \frac{2\alpha_1(1+\nu_1)}{1-\nu_1} \left[t_1 - t_c - \frac{z-h-h_0}{h_1} (t_1 - t_s) \right] \\ \sigma_{zz}^{(1,0)} &= -\sigma(x), \quad \sigma_{xz}^{(1,0)} = f\sigma(x), \quad u_x^{(1,0)} = \frac{1}{G_1} (z - h_0 - h_1 - h) f\sigma(x) \\ u_z^{(1,0)} &= -\frac{1-2\nu_1}{2(1-\nu_1)G_1} (z - h_0 - h) \sigma(x) - \frac{1-2\nu_0}{2G_0(1-\nu_0)} h_0 \sigma(x) - \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} h \sigma(x) + \\ &+ \alpha_1 \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \left[(t_1 - t_c)(z - h - h_0) - \frac{(z - h - h_0)^2}{2h_1} (t_1 - t_s) \right] + \\ &+ \frac{\alpha h}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu} (t + t_1 - 2t_c) - \alpha_0 h_0 \frac{1+\nu_0}{1-\nu_0} (t - t_c) \end{aligned} \quad (2.6)$$

2) Для второго слоя ($h_0 \leq z \leq h_0 + h$)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(2)} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \sigma(x) - \frac{2\alpha G(1+\nu)}{1-\nu} \left[t - t_c + \frac{z-h_0}{h} (t + t_1) \right] \\ \sigma_{zz}^{(2,0)} &= -\sigma(x), \quad \sigma_{xz}^{(2,0)} = f\sigma(x) \quad u_x^{(2)} = -\left(\frac{z-h-h_0}{G} - \frac{h_1}{G_1} \right) f\sigma(x) \\ u_z^{(2)} &= -\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} (z - h_0) \sigma(x) + \frac{1-2\nu_0}{2G_0(1-\nu_0)} h_0 \sigma(x) + \\ &+ \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[(t - t_c)(z - h_0) + \frac{(z - h_0)^2}{2h} (t - t_1) \right] + \alpha_0 \frac{1+\nu_0}{(1-\nu_0)} h_0 (t - t_c) \end{aligned} \quad (2.7)$$

3) Для третьего слоя ($-h_0 \leq z \leq h_0$)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(3)} &= -\frac{\nu_0}{1-\nu_0} \sigma(x) - \frac{2\alpha_0(1+\nu_0)}{1-\nu_0} G_0 (t - t_c) \\ \sigma_{zz}^{(3,0)} &= -\sigma(x), \quad \sigma_{xz}^{(3,0)} = f\sigma(x) \text{sign}(z) \end{aligned}$$

$$u_x^{(3)} = -u + \frac{1}{G_0} z f \sigma(x) \quad (2.8)$$

$$u_z^{(3)} = -\frac{1-2\nu_0}{2G_0(1-\nu_0)} z \sigma(x) + z \frac{\alpha_0(1+\nu_0)}{1-\nu_0} (t-t_c)$$

4) Для четвертого слоя ($-h-h_0 \leq z \leq -h_0$)

$$\sigma_{xx}^{(4)} = -\frac{\nu}{1-\nu} \sigma(x) - \frac{2\alpha(1+\nu)}{1-\nu} G\theta$$

$$\sigma_{zz}^{(4,0)} = -\sigma(x), \quad \sigma_{xz}^{(4,0)} = -f \sigma(x)$$

$$u_x^{(4)} = -\left(\frac{z+h+h_0}{G} + \frac{h_1}{G_1} \right) f \sigma(x)$$

$$u_z^{(4)} = -\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} (z+h_0) \sigma(x) + \frac{1-2\nu_0}{2G(1-\nu_0)} h \sigma(x) - \alpha_0 \frac{1+\nu_0}{(1-\nu_0)} h_0 (t-t_c) +$$

$$+ \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[(t-t_c)(z+h_0) + \frac{(z+h_0)^2}{2h} (t-t_1) \right] \quad (2.9)$$

5) Для пятого слоя ($-h_1-h_0-h \leq z \leq -h_0-h$)

$$\sigma_{xx}^{(5)} = -\frac{\nu_1}{1-\nu_1} \sigma(x) - \frac{2\alpha_1 G_1 (1+\nu_1)}{1-\nu_1} \left[t_1 - t_c + \frac{z+h+h_0}{h_1} (t_1 - t_6) \right]$$

$$\sigma_{zz}^{(5,0)} = -\sigma(x), \quad \sigma_{xz}^{(5,0)} = -f \sigma(x)$$

$$u_x^{(5)} = -\frac{1}{G_1} (z+h_1+h+h_0) f \sigma(x),$$

$$u_z^{(5)} = -\frac{1-2\nu_1}{2(1-\nu_1)G_1} (z+h+h_0) \sigma(x) + \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} h \sigma(x) +$$

$$+ \frac{1-2\nu_0}{2G_0(1-\nu_0)} h_0 \sigma(x) - \alpha_0 h_0 (t-t_c) +$$

$$+ \alpha_1 \left[(t_1 - t_c)(z+h+h_0) + \frac{(z+h+h_0)^2}{2h_1} (t_1 - t_6) \right] - \frac{\alpha h}{2} (t+t_1 - 2t_c) \quad (2.10)$$

где t_6 – температура на внешних краях пятислойной полосы, определяемая формулой

$$t_6 = t_c + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \alpha h_1} \frac{\lambda_2 (\lambda_1 + \alpha h_1) (t-t_c) + 2\lambda_1 \alpha h t_c}{\lambda_1 \lambda_2 - \alpha (\lambda_1 h - \lambda_2 h_1)} \quad (2.11)$$

Выведенные формулы (2.6)-(2.10) описывают напряженно-деформированное состояние полосы с точностью $O(\varepsilon)$. Для более точных расчетов необходимо продолжить итерационный процесс по формулам (2.5). При этом, если функции,

заданные на продольных краях полосы, являются многочленами степени n , то после $n + 1$ шага итерационный процесс обрывается и приводит к математически точному решению внутренней краевой задачи пятислойной полосы. Таким образом, (2.6)-(2.10) дают математически точные значения компонентов тензора напряжений и вектора перемещения, если считать функции, заданные на продольных краях, постоянными.

Частный случай. Приведенными формулами (2.6)-(2.10) можно моделировать напряженно-деформированное состояние тормозной колодки автомобилей при торможении, предполагая, что на внешних поверхностях заданы нормальные напряжения σ .

Выведенные формулы (2.6)-(2.10) позволяют провести также примерный энергетический расчет тормозной колодки. Предполагается, что торможение начинается в момент, когда диск автомобиля (третий слой модельной задачи) имеет кинетическую энергию K_0 , которая расходуется на преодоление сил трения и приводит к неизбежному разогреву особенно среднего слоя. Следовательно, заданием величины температуры t среднего слоя, которая тем выше, чем выше кинетическая энергия K_0 , неявным образом учитывается и ее влияние. Таким образом кинетическая энергия K_0 превращается в работу сил трения $A_{\text{тр}}$, которая, в свою очередь, в тепловую энергию $E_{\text{теп}}$ и энергию упругой деформации $E_{\text{деф}}$

$$K_0 = A_{\text{тр}} = E_{\text{теп}} + E_{\text{деф}} \quad (3.1)$$

При этом работа силы трения будет

$$A_{\text{тр}} = f \sigma a b u \quad (3.2)$$

где a и b – продольные размеры колодки, u – жесткое перемещение третьего слоя.

Энергия деформации будет

$$\begin{aligned}
 E_{\text{деф}} = & \frac{ab}{2G_0} \int_0^h [(1-\nu_0)(\sigma_{xx}^{(3)^2} + \sigma_{zz}^{(3)^2}) - 2\nu_0\sigma_{xx}^{(3)}\sigma_{zz}^{(3)} + \sigma_{xz}^{(3)^2}] dz + \\
 & + \frac{1}{2G} \int_{h_0}^{h_0+h} [(1-\nu)(\sigma_{xx}^{(2)^2} + \sigma_{zz}^{(2)^2}) - 2\nu\sigma_{xx}^{(2)}\sigma_{zz}^{(2)} + 2\sigma_{xz}^{(2)^2}] dz + \\
 & + \frac{1}{2G_1} \int_{h_0+h}^{h_0+h+h_1} [(1-\nu_1)(\sigma_{xx}^{(1)^2} + \sigma_{zz}^{(1)^2}) - 2\nu_1\sigma_{xx}^{(1)}\sigma_{zz}^{(1)} + 2\sigma_{xz}^{(1)^2}] dz
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

А энергия нагревания диска и колодки определяется по формуле

$$E_{\text{теп}} = C_1 m_1 (t_1 + t_6 - 2t_c) + C m (t + t_1 - 2t_c) + C_0 m_0 (t - t_c) \quad (3.4)$$

где C_1, C, C_0 – удельные теплоемкости материалов первого (пятого), второго (четвертого) и третьего слоев, m_1, m, m_0 – их массы, а температуры t_1 и t_6 определяются формулами (1.5) и (2.11).

Подставив (3.2)-(3.4) в (3.1), получим связь между жестким перемещением u и заданным нормальным напряжением σ .

Работа выполнена в рамках проекта МНТЦ А-892.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией// В сб.: “Гр.IV симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов.” Новосибирск: Наука, 1984. С. 105-110.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.:Наука, 1997. 414с.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи для анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Гитутюн (Наука) 2005, 468с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
13.02.2006