ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 59, №2, 2006 Механика

УДК 539.3

ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ УПРУГИХ ВОЛН В ОДНОРОДНОМ ИЗОТРОПНОМ ВОЛНОВОДЕ

Погосян Н.Д.

Ն.Ջ. Պողոսյան
Հարթ առաձգական ալիքների անդրադարձումը իզոտրոպ համասեռ ալիքատարում

Հոդվածում ուսումնասիրվում է հարթ լայնական և երկայնական ալիքների անդրադարձումը ալիքատարի $x=0$ միջնապատից, տարբեր եզրային պայմանների դեպքում:

N. D. Poghossyan
The Reflections of Plane Elastic Weves in Homogenous Isotropical Wavequide

In the paper the plane longitudinal and transverse (shear) waves reflection from waveqidepartition x=0 are considered in different cases of conditions on boundary x=0.

Имеется ряд работ об отражении упругих волн в волноводе в случае, когда направляющие поверхности свободны от нагрузок [1], [2].

Исследование указанных задач связано с большими трудностями. В настоящей работе предлагается в качестве модельной случай, когда на направляющих поверхностях волновода заданы условия Навье, что позволяет получить аналитические результаты.

В статье рассматривается отражение плоских продольных и поперечных (сдвиговых) волн от перегородки волновода $x=0$ при разных условиях на границе $x=0$.

1. Рассматриваются плоские волны, которые распространяются либо в области $\Gamma\{x\in[0,+\infty);\ y\in[0,h];\ z\in(-\infty,+\infty)\}$ (плоская деформация), либо в слое $\Gamma'\{x\in[0,+\infty);\ y\in[0,h],\ z\in(-b,b)\}$ (обобщенное плоское напряженное состояние) при наличии следующих граничных условий (условие Навье) [3]:

$$u\big|_{y=0}=u\big|_{y=h}=0 \qquad \left.\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right|_{y=h}=0 \tag{1.1}$$

где $u=u(x,y,t)$, $\mathrm{v}=\mathrm{v}(x,y,t)$–соответствующие компоненты перемещения $\vec{w}=\{u;v;0\}$.

Продольные волны в области Γ распространяются со скоростью

$$C_e^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}=\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho} \tag{1.2}$$

где λ и μ–упругие постоянные Ламе, ν–коэффициент Пуассона E– модуль Юнга, а ρ–плотность среды [4,5].

Продольные волны в области Γ' распространяются со скоростью

$$C_l^2=\frac{E}{(1-\nu^2)\rho} \tag{1.2.1}$$

Поперечные волны в Γ и Γ' распространяются с одинаковой скоростью [4,5]

$$C_t^2=\frac{\mu}{\rho}=\frac{E}{2(1+\nu)\rho} \tag{1.3}$$

При рассмотрении отражения продольных и поперечных волн от границы $x=0$ мы воспользуемся уравнением Ламе [4]:

$$\rho\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\overline{W}\right)+\mu\Delta\overline{W} \tag{1.4}$$

После замены

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \mathrm{v}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.5}$$

система (1.4) приводится к уравнениям [1]

$$C_l^2\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\quad C_t^2\Delta\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{1.6}$$

для потенциалов φ и ψ, где C_l определяется по формулам (1.2) и (1.2.1).

С учетом граничных условий (1.1), для φ и ψ получим выражения:

$$\begin{aligned}\varphi_n&=A_n\exp i(\omega_n t+k_{1n}x)\sin\lambda_n y+B_n xpi(\omega_n t-k_{1n}x)\sin\lambda_n y\\ \psi_n&=D_n\exp i(\omega_n t+k_{2n}x)\cos\lambda_n y+C_n\exp i(\omega_n t-k_{2n}x)\cos\lambda_n y\end{aligned} \tag{1.6.1}$$

(или суперпозиция этих выражений, так как уравнения (1.6) линейны и однородны)

$$\eta_n=\frac{\omega_n^2}{C_t^2\lambda_n^2},\quad \theta=\frac{C_t^2}{C_l^2}=\frac{1-\nu}{2}$$

где $\lambda_n=\dfrac{n\pi}{h},\qquad k_{1n}=\lambda_n\sqrt{\theta\eta_n-1},\quad k_{2n}=\lambda_n\sqrt{\eta_n-1}$

$\theta\eta_n-1>0,\quad \eta_n-1>0$ для существования нетривиального решения.

1. Пусть на границу $x=0$ падает продольная волна

$$\varphi_0=A_n\exp i(\omega_n t+k_{1n}x)\sin\lambda_n y \tag{1.6.2}$$

тогда отражаются продольная и поперечные волны:

$$\varphi_1=B_n\exp i(\omega_n t-k_{1n}x)\sin\lambda_n y \tag{1.6.3}$$

$$\psi_1=C_n\exp i(\omega_n t-k_{2n}x)\cos\lambda_n y \tag{1.6.4}$$

Для получения общего решения надо полагать

$$\varphi=\varphi_0+\varphi_1,\quad \psi=\psi_1,\quad \theta_{1n}=\sqrt{\theta\eta_n-1},\quad \theta_{2n}=\sqrt{\eta_n-1}.$$

Пусть на границе $x=0$ выполняются условия Навье

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad \mathrm{v}|_{x=0}=0 \tag{1.7}$$

Учитывая (1.5), условия (1.7) записываются в виде

$$\left.\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)\right|_{x=0}=0;\qquad \left.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right|_{x=0}=0 \tag{1.7.1}$$

или в виде системы

$$\begin{cases} -B_n\theta_{1n}^2 + i\theta_{2n}C_n = A_n\theta_{1n}^2 \\ B_n + i\theta_{2n}C_n = -A_n \end{cases} \tag{1.7.2}$$

из (1.7.2) получим

$$i\theta_{2n}(1+\theta_{1n}^2)C_n = 0 \tag{1.7.3}$$

отсюда вытекает $C_n = 0$.

В итоге получили, что при выполнении условий (1.7) при падении на границу $x = 0$ продольной волны (1.6.2) отражается только продольная волна (1.6.3), (при этом $B_n = -A_n$)

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = -A_n \exp i(\omega_n t - k_{1n}x)\sin\lambda_n y \\ &\psi_1 = 0 \end{aligned} \tag{1.7.4}$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = iA_n k_{1n} \exp i(\omega_n t - k_{1n}x)\sin\lambda_n y \\ \mathrm{v} &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x} = -A_n\lambda_n \exp i(\omega_n t - k_{1n}x)\cos\lambda_n y \end{aligned} \tag{1.7.5}$$

Рассмотрим отражение волны (1.6.2) при условии скользящего контакта на границе [3]

$$u\big|_{x=0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \tag{1.7.6}$$

или

$$\left.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\right|_{x=0} = 0 \tag{1.7.7}$$

или

$$\begin{cases} i\theta_{1n}\lambda_n A_n - i\theta_{1n}\lambda_n B_n - \lambda_n C_n = 0 \\ i\lambda_n^2 A_n\theta_{1n} - i\lambda_n^2 b_n\theta_{1n} - \lambda_n^2\theta_{2n}C_n = 0 \end{cases} \tag{1.7.8}$$

Откуда следует $C_n = 0$, т.е. отраженная волна будет продольной и задается по формулам (1.7.5).

Усложним граничные условия при $x = 0$

$$u\big|_{x=0} = \mathrm{v}\big|_{x=0} = 0 \qquad \text{(жесткое закрепление)} \tag{1.7.9}$$

С учетом (1.5) условие принимает вид:

$$\begin{cases} B_n - i\theta_{1n}^{-1}C_n = A_n \\ B_n + i\theta_{2n}C_n = -A_n \end{cases}$$

Отсюда получим

$$C_n = \frac{2i\theta_{1n}}{\theta_{1n}\theta_{2n} + 1}A_n \tag{1.7.10}$$

Из (1.7.10) следует, что $C_n \neq 0$. Из (1.7.10) также следует, что $B_n = 0$ при $\theta_{1n}\theta_{2n} = 1$, отсюда $C_n = i\theta_{1n}A_n$ (уравнение $\theta_{1n}\theta_{2n} = 1$ имеет решение

$\eta_n = 1 + 1/\theta$) и в данном случае продольная волна трансформируется в отраженную сдвиговую волну.

С учетом (1.7.10) получим

$$\varphi_1 = \frac{\theta_{1n}\theta_{2n} - 1}{\theta_{1n}\theta_{2n} + 1} A_n \exp i(\omega_n t - k_{1n}x)\sin\lambda_n y$$
$$\psi_1 = \frac{2i\theta_{1n}}{\theta_{1n}\theta_{2n} + 1} A_n \exp i(\omega_n t - k_{2n}x)\cos\lambda_n y \qquad (1.7.11)$$

В случае $\theta_{1n}\theta_{2n} = 1$ получим

$$\psi_1 = i\theta_{1n} A_n \exp i(\omega_n t - k_{2n}x)\cos\lambda_n y$$

Рассмотрим граничное условие при $x = 0$ (свободный край)[3].

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{v}}\right)\right|_{x=0} = 0 \qquad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)\right|_{x=0} = 0 \qquad (1.7.12)$$

С учетом (1.5) получим

$$\left.\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \mathrm{v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + (1-\mathrm{v})\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right]\right|_{x=0} = 0$$
$$\left.\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]\right|_{x=0} = 0$$

Подставляя значения φ и ψ, получим

$$\begin{cases} -\lambda_n^2\theta_{1n}^2 A_n - \lambda_n^2\theta_{1n}^2 B_n - \mathrm{v}\lambda_n^2 A_n - \mathrm{v}\lambda_n^2 B_n + i\lambda_n^2(1-\mathrm{v})\theta_{1n}C_n = 0 \\ 2i\lambda_n^2\theta_{1n}A_n - 2i\lambda_n^2\theta_{1n}B_n - \lambda_n^2 C_n + \lambda_n^2\theta_{2n}^2 C_n = 0 \end{cases} \qquad (1.7.13)$$

Из (1.7.13) следует

$$i\left[\frac{(1-\mathrm{v})\theta_{2n}}{\theta_{1n}^2 + \mathrm{v}} + \frac{\theta_{2n}^2 - 1}{2\theta_{1n}}\right]C_n = 2A_n$$

или
$$i\,\frac{2(1-\mathrm{v})\theta_{1n}\theta_{2n} + (\theta_{2n}^2 - 1)(\theta_{1n}^2 + \mathrm{v})}{2\theta_{1n}(\theta_{1n}^2 + \mathrm{v})}C_n = 2A_n$$

С учетом того, что в случае области Γ' (пластинка) $\theta = \frac{1-\mathrm{v}}{2}$, имеем

$$i\,\frac{2(1-v)\theta_{1n}\theta_{2n} + (\eta_n - 2)\cdot\frac{1}{2}(1-\mathrm{v})(\eta_n - 2)}{2\theta_{1n}\frac{1-\mathrm{v}}{2}(\eta_n - 2)}C_n = 2A_n$$

$$i\,\frac{(\eta_n - 2)^2 + 4\theta_{1n}\theta_{2n}}{2\theta_{1n}(\eta_n - 2)}C_n = 2A_n$$

Используя полученное соотношение, получим

$$C_n = -i\frac{4\theta_{1n}(\eta_n - 2)}{(\eta_n - 2)^2 + 4\theta_{1n}\theta_{2n}}A_n$$

$$B_n = A_n - i\frac{\theta_{2n}^2 - 1}{2\theta_{1n}}C_n = \frac{4\theta_{1n}\theta_{2n} - (\eta_n - 2)^2}{4\theta_{1n}\theta_{2n} + (\eta_n - 2)^2}A_n \qquad (1.7.14)$$

В случае $B_n = 0$ падающая продольная волна полностью трансформируется в поперечную волну.

Из (1.7.14) следует, что $B_n = 0$ при

$$4\theta_{1n}\theta_{2n} - (\eta_n - 2)^2 = 0,$$

или
$$(\eta_n - 2)^2 - 4\sqrt{(\theta\eta_n - 1)(\eta_n - 1)} = 0 \qquad (1.7.15)$$

Получили знакомое уравнение Рэлея. Например, при $\theta = \dfrac{1}{3}$ уравнение (1.7.15) имеет решение $\eta_n = 4$, которое удовлетворяет условиям

$\theta\eta_n - 1 > 0, \quad \eta_n - 1 > 0$

2. Пусть на границу $x = 0$ падает поперечная волна

$$\psi_0 = D_n \exp i(\omega_n t + k_{2n}x)\cos\lambda_n y \qquad (2.1.1)$$

тогда отражаются волны:

$$\psi_1 = C_n \exp i(\omega_n t - k_{2n}x)\cos\lambda_n y \qquad (2.1.2)$$

$$\varphi_1 = B_n \exp i(\omega_n t - k_{1n}x)\sin\lambda_n y \qquad (2.1.3)$$

В данном случае надо полагать $\varphi = \varphi_1$, $\psi = \psi_0 + \psi_1$. Рассмотрим случай граничных условий (1.7) (условия Навье).

С учетом (1.5) получим

$$-\lambda_n^2\theta_{1n}B_n - i\lambda_n^2\theta_{2n}D_n + i\lambda_n^2\theta_{2n}C_n = 0$$

$$\lambda_n B_n - i\lambda_n\theta_{2n}D_n + i\lambda_n\theta_{2n}C_n = 0$$

После элементарных преобразований получим

$$\begin{cases} -\theta_{1n}B_n + i\theta_{2n}C_n = i\theta_{2n}D_n \\ B_n + i\theta_{2n}C_n = i\theta_{2n}D_n \end{cases}$$

Из полученной системы следует $(1 + \theta_{1n})B_n = 0$, так как $1 + \theta_{1n} \neq 0$, то $B_n = 0$ и $C_n = D_n$.

Следовательно, отражается только поперечная волна, а отраженная продольная волна отсутствует. При наличии условия (1.7.7) (скользящий контакт) имеем

$$\begin{cases} -i\lambda_n\theta_{1n}B_n - \lambda_n D_n - \lambda_n C_n = 0 \\ -i\lambda_n^2\theta_{1n}B_n + \lambda_n^2\theta_{2n}D_n + \lambda_n^2\theta_{2n}C_n = 0 \end{cases}$$

От полученной системы следует, что $B_n = 0$ и $C_n = -D_n$, и опять отраженная продольная волна (2.1.3) отсутствует.

В случае $u\big|_{x=0} = \mathrm{v}\big|_{x=0} = 0$ (жеское закрепление) имеем

$$\begin{cases} i\theta_{1n}B_n + C_n = -D_n \\ B_n + i\theta_{2n}C_n = i\theta_{2n}D_n \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений относительно B_n и C_n, получим

$$B_n = \frac{2i\theta_{2n}}{\theta_{1n}\theta_{2n} + 1} D_n \qquad C_n = \frac{\theta_{1n}\theta_{2n} - 1}{\theta_{1n}\theta_{2n} + 1} D_n \tag{2.1.4}$$

Из (2.1.4) следует, что при $\omega_n = C_t\lambda_n$ имеем $B_n = 0$, а второе из полученных соотношений показывает, что отраженная поперечная волна имеет меньшую амплитуду.

В случае граничных условий (1.7.12) с учетом (1.5) получим

$$\begin{cases} -\lambda_n^2\theta_{1n}^2 B_n - \nu\lambda_n^2 B_n - i\lambda_n^2(1-\nu)\theta_2 Dn + i\lambda_n^2(1-\nu)\theta_{2n}C_n = 0 \\ 2i\lambda_n^2\theta_{1n}B_n - \lambda_n^2 D_n - \lambda_n^2 C_n + \lambda_n^2\theta_{2n}^2 D_n + \lambda_n^2\theta_{2n}^2 C_n = 0 \end{cases}$$

После некоторых преобразований получим

$$\begin{cases} -\left(\theta_{1n}^2 + \nu\right)B_n + i(1-\nu)\theta_{2n}C_n = i(1-\nu)\theta_{2n}D_n \\ -2i\theta_{1n}B_n + \left(\theta_{2n}^2 - 1\right)C_n = -\left(\theta_{2n}^2 - 1\right)D_n \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Определитель этой системы $\Delta \neq 0$.

Решив эту систему относительно B_n и C_n, получим

$$B_n = -\frac{4i\theta_{2n}(\eta_n - 2)D_n}{(\eta_n - 2)^2 + 4\theta_{1n}\theta_{2n}} \tag{2.1.6}$$

Из (2.1.6) следует, что при $\eta_n = 2$ отраженной продольной волны не существует

$$\varphi_1 = -\frac{4i\theta_{2n}(\eta_n - 2)}{(\eta_n - 2)^2 + 4\theta_{1n}\theta_{2n}} D_n \exp i(\omega_n t - k_{1n}x)$$

$$\psi_1 = -D_n \exp i(\omega_n t - k_{2n}x)\cos\lambda_n y$$

В итоге получено, что при падении продольной волны на стенку $x = 0$ волновода $\Gamma\{x \in [0,+\infty\ );\quad y \in [0,h];\quad z \in (-\infty,+\infty)\ \}$ или волновода Г' $\{x \in [0;+\infty), y \in [0;h], z \in (-b,b)\}$ и при наличии на границе $x = 0$ условий Навье или скользящего контакта, отраженная волна будеть продольной (т.е. трансформация продольной волны в сдвиговую не происходит). При наличии на границе $x = 0$ граничных условий жесткого закрепления или свободного края есть отраженная, продольная и поперечные волны. При этом в некоторых частных случаях падающая продольная волна полностью трансформируется в отраженную сдвиговую волну.

Аналогичные выводы имеют место при падении на границу волновода поперечной волны.

В конце статьи хочу выразить благодарность М.В. Белубекяну за существенные консультации по данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Городецкая Н.С., Гринченко В.Т. Анализ физических особенностей явления краевого резонанса в упругих телах. // Акустический Вестник. 2004. Т.7. №1. С.30–43.
2. Городецкая Н.С. Еще раз о краевом резонансе. // Акустический Вестник. 2000. Т.3. №4. С.35–44.
3. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин учитывающих поперечные сдвиги. // В сб: Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван: Изд. НАН Армении. 2002. С.67–88.
4. Новацкий В Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872с.
5. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука. 1982.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
29.12.2005