

УДК 519.95

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ
ДВИЖЕНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ДВОЙКОЙ
ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ В КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЯХ

Габриелян М.С., Мазманян Л.А.

Մ.Ս. Գաբրիելյան, Լ.Ա. Մազմանյան

Երկակի, հաստատուն փոքր կորությամբ թաղանթների տատանողական շարժման օպտիմալ
ղեկավարման մասին հակամետ իրավիճակներում

Դիտարկված է երկակի, հաստատուն փոքր կորության թաղանթների գծային տատանումների օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը, երբ նրա վրա ազդում են բաշխված հակամետ ուժեր: Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի եղանակով և բերված է անվերջ հաստ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներով բնութագրվող խաղային խնդրի: Խաղացողների օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունները որոշված են Էքստրեմալ նշանառության եղանակով: Սահմանված է ռեզուլյարության պայմանը անվերջ համակարգերի համար: Ցույց է տրված, որ եթե առաջին խաղացողի ռեսուրսները ավելի շատ են, քան երկրորդ խաղացողինը, և ազդող ուժերը պատկանում են L_2 դասին, ապա լուծվում է թաղանթի տատանումների մարման խնդիրը: Աշխատանքի վերջում բերված է թվային օրինակ:

M.S. Gabrielyan, L.A. Mazmanyanyan

**On The Optimal Control of Vibrations of the Shallow Shells of Double
Constant Curve in the Conflict Situations**

It is discussed the problem of an optimal control for the shallow shell's linear vibrations, when the distributive disposed forces influence on it. The problem is solved by the method of Fourier and it is brought to the differential game, which is described by the infinitesimal differential equations of second order. The extremal strategies are constructed by the extreme targeting method. It is defined the regularity for the infinite systems. It is shown that if the resources of the first player are more than the resources of the second player and the influencing forces belong to class L_2 , then the problem of damping of shell's vibrations is solved. In the end of the article a numerical example is given.

Исследуется задача об оптимальном управлении линейных колебаний пологих оболочек при помощи противоборствующих сил, приложенных к поверхностям оболочки. Задача решается методом Фурье и приводится к игровой задаче для бесконечной линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка. С помощью метода экстремального прицеливания определяются оптимальные управляющие силы. Определяется регулярность для бесконечных систем. Указываются условия, при которых действующие силы, принадлежащие классу L_2 , гасят колебательное движение оболочки, если ресурсы первого игрока больше, чем второго. В конце статьи приведен численный пример.

1. Рассмотрим однородную изотропную пологую панель, имеющую в плане вид прямоугольника со сторонами a, b , предполагая, что главные кривизны срединной поверхности k_x, k_y постоянны для всех ее точек. Будем считать, что панель шарнирно оперта по контуру при наличии свободного смещения точек ее краев вдоль линий кривизны x, y .

Пусть h – постоянная толщина, ρ – плотность оболочки ($\rho = \gamma/g$, где γ – удельный вес материала, g – ускорение силы тяжести). Координату z будем отсчитывать вдоль нормали к поверхности, считая z направленной к центру кривизны. Обозначим перемещения точек срединной поверхности по направлениям x, y, z через u, v, w соответственно. Для пологих оболочек можно считать перемещения точки срединной поверхности в плане равными перемещениям в плоскости, касательной к поверхности в данной точке [1].

Пусть на поверхности оболочки на множестве положительной меры действуют две перпендикулярные ограниченные распределенные силы: $F_1(x, y, t)$ и $F_2(x, y, t)$, под действием которых оболочка будет колебаться. Обозначим нормальные перемещения срединной поверхности оболочки через $w(x, y, t)$.

Дифференциальные уравнения линейных колебаний пологих оболочек будут ([1], с.227, [2], с.29)

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w - k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{F_1(x, y, t)}{h} + \frac{F_2(x, y, t)}{h} \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

где $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$ – жесткость оболочки, μ – коэффициент Пуассона, E – модуль упругости материала при растяжении (сжатии), $\Phi(\cdot)$ – функция напряжения срединной поверхности, а $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$

Пусть граничные условия удовлетворяют следующим условиям шарнирного опирания ([2], с. 110):

$$\begin{aligned} w = 0, v = 0, M_x = 0, N_x = 0 \quad \text{при } x = 0, x = a \\ w = 0, u = 0, M_y = 0, N_y = 0 \quad \text{при } y = 0, y = b \end{aligned} \quad (1.3)$$

где изгибающие моменты –

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

а нормальные усилия –

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1 - \mu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \mu \left[\frac{\partial v}{\partial y} - k_y w \right] \right\} \\ N_y &= \frac{Eh}{1 - \mu^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} - k_x w \right] \right\} \end{aligned}$$

Пусть начальные условия будут

$$w(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad \left. \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x, y) \quad (1.4)$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ – начальный прогиб и начальная скорость срединной поверхности соответственно.

Условия (1.3) шарнирного опирания будут удовлетворены, если прогиб представить в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (1.5)$$

(рассматривая при этом t как параметр). Для определения $w(x, y, t)$ достаточно определить функции $f_{mn}(t)$. m, n – числа полуволн вдоль оболочки. Подставляя (1.5) в (1.2) и интегрируя, получим

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t) \frac{a^2 b^2 E (b^2 k_y m^2 + a^2 k_x n^2)}{(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2 \pi^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (1.6)$$

Так как в области $[0, a] \times [0, b]$ система функций $\left\{ \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right\}$, ($m, n = 1, 2, \dots$) ортогональная и полная, то функции $F_1(x, y, t)$, $F_2(x, y, t)$, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ можно разложить в ряд Фурье ([3], с. 173):

$$\begin{aligned} F_1(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ F_2(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \varphi(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \psi(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}_{mn}(t) &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b F_1(x, y, t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ \bar{v}_{mn}(t) &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b F_2(x, y, t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ \varphi_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \varphi(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ \psi_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \psi(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \end{aligned}$$

Подставляя (1.5), (1.6), (1.7) в уравнение (1.1), умножая на $\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ и интегрируя, получим

$$\left(\frac{Dg}{\gamma h} \frac{\pi^4 (b^2 m^2 + a^2 n^2)^2}{a^4 b^4} + \frac{Eg}{\gamma} \frac{(b^2 k_y m^2 + a^2 k_x n^2)^2}{(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \right) \frac{f_{mn}(t)}{h} + \frac{f_{mn}''(t)}{h} - \frac{g}{\gamma h^2} \bar{u}_{mn}(t) - \frac{g}{\gamma h^2} \bar{v}_{mn}(t) = 0, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.8)$$

От (1.8) перейдем к следующим безразмерным обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка, описывающим линейные колебания полой оболочки:

$$\frac{d^2 \xi_{mn}(t)}{dt^2} = -\omega_{mn}^2 \xi_{mn}(t) + u_{mn}(t) + v_{mn}(t) \quad (1.9)$$

где $\xi_{mn}(t) = \frac{f_{mn}(t)}{h}$, $u_{mn} = \frac{g}{\gamma h^2} \bar{u}_{mn}(t)$, $v_{mn} = \frac{g}{\gamma h^2} \bar{v}_{mn}(t)$

при следующих начальных условиях:

$$f_{mn}(0) = \Phi_{mn} \quad \dot{f}_{mn}(0) = \Psi_{mn}$$

Квадрат частоты собственных колебаний оболочки при малых прогибах имеет вид:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{Dg}{\gamma h} \frac{\pi^4 (b^2 m^2 + a^2 n^2)^2}{a^4 b^4} + \frac{Eg}{\gamma} \frac{(b^2 k_y m^2 + a^2 k_x n^2)^2}{(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \quad (\omega_{mn}^2 > 0, \quad m, n = 1, 2, \dots) \quad (1.10)$$

Предположим, что силы $F_1(x, y, t)$ и $F_2(x, y, t)$ принадлежат классу L_2 и удовлетворяют условиям [5]

$$\left[\int_0^a \int_0^b [F_1(x, y, t)]^2 dx dy \right]^{1/2} = \left[\frac{ab}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_{mn}^2(t) \right]^{1/2} \leq P$$

$$\left[\int_0^a \int_0^b [F_2(x, y, t)]^2 dx dy \right]^{1/2} = \left[\frac{ab}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_{mn}^2(t) \right]^{1/2} \leq Q \quad (1.11)$$

равномерно по $t \in [0, T]$.

Здесь P, Q, T – заданные положительные числа.

Рассмотрим следующую игровую ситуацию. Пусть первый игрок, распоряжающийся управлениями u_{mn} ($m, n = 1, 2, \dots$), стремится минимизировать

значение величины $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\zeta_{mn}^2(\mathcal{G}) + \xi_{mn}(\mathcal{G})]$ при самом упорном сопротивлении

второго игрока, распоряжающегося управляющими воздействиями v_{mn} ($m, n = 1, 2, \dots$), а второй игрок в свою очередь стремится максимизировать

значение величины $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\zeta_{mn}^2(\mathcal{G}) + \xi_{mn}(\mathcal{G})]$ при самом упорном сопротивлении

со стороны первого игрока. Величину \mathcal{G} ($0 < \mathcal{G} \leq T$) определим ниже.

Динамика игры определяется бесконечной системой дифференциальных уравнений (1.9).

Определение: Задача для системы (1.9) назовем регулярной, если она регулярна для любых конечных m, n из (1.9).

С помощью метода экстремального прицеливания были построены оптимальные управляющие воздействия каждого игрока и гипотетическое рассогласование [5,6]:

$$u_{mn}^{(0)}(\tau) = - \frac{P \left[l_{mn}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) + l_{mn}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) \right]}{\sqrt{\lambda_{mn}} \left[\sum_{r,j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{rj}} \left(l_{rj}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) + l_{rj}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) \right)^2 \right]^{1/2}}$$

$$v_{mn}^{(0)}(\tau) = \frac{Q \left[l_{mn}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) + l_{mn}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) \right]}{\sqrt{\lambda_{mn}} \left[\sum_{r,j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{rj}} \left(l_{rj}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) + l_{rj}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (1.12)$$

$$\varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T) = \max_{\sum_{m,n=1}^{\infty} [(l_{mn}^{(1)})^2 + (l_{mn}^{(2)})^2] \leq 1} \left\{ \sum_{m,n=1}^{\infty} [l_{mn}^{(1)} a_{mn} + l_{mn}^{(2)} b_{mn}] - (P - Q) \times \right.$$

$$\left. \times \int_t^T \left[\sum_{r,j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{rj}} \left(l_{rj}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) + l_{rj}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) \right)^2 \right]^{1/2} d\tau \right\} \quad (1.13)$$

где

$$a_{mn} = z_{mn}^{(1)}(t) \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - t) + z_{mn}^{(2)}(t) \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - t)$$

$$b_{mn} = z_{mn}^{(2)}(t) \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - t) - z_{mn}^{(1)}(t) \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - t)$$

$$z_{mn}^{(1)} = \xi_{mn}, \quad z_{mn}^{(2)} = \frac{\xi_{mn}}{\sqrt{\lambda_{mn}}} \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

При условии $P > Q$ выражение в фигурных скобках в формуле (1.13) является вогнутой функцией по переменным $l_{rj}^{(1)}$ и $l_{rj}^{(2)}$ ($r, j = 1, 2, \dots$), следовательно, максимум в (1.13) при любых $z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)$ достигается на единственном векторе $(l_{mn}^{(1)})^0, (l_{mn}^{(2)})^0$ ($m, n = 1, 2, \dots$), т.е. при любых начальных значениях игровая ситуация регулярна [5,7]. Получены уравнения, из которых определяются компоненты вектора l^0 [5,6].

Заметим, что $\varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T)$ – ограниченная величина, так как ряды, участвующие в выражениях (1.13), сходятся, следовательно, оптимальные управляющие воздействия, определяемые формулой (1.12) равномерно по $\tau \in [0, T]$, составляют сходящиеся квадратом ряды ([5], [4], с.173). Для определения момента $T = \mathcal{G}$, при котором гипотетическое рассогласование в первый раз превращается в нуль, нужно найти наименьший корень уравнения:

$$\varepsilon^{(0)}(t_*, \{z_{mn}^{(1)}(t_*), z_{mn}^{(2)}(t_*)\}, T) = 0, \quad (1.14)$$

где $(t_*, \{z_{mn}^{(1)}(t_*), z_{mn}^{(2)}(t_*)\})$ ($0 \leq t_* \leq T$) – начальные позиции.

2. Численный пример. Исследуем случай, когда оболочка совершает колебания с образованием четырех полуволн вдоль каждой стороны ($m = 4, n = 4$).

Так как $(I_{mn}^{(1)})^0, (I_{mn}^{(2)})^0, \varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T), u_{mn}^{(0)}$ и $v_{mn}^{(0)}$ ($m, n = 1, 2, 3, 4$) трудно представить в аналитической форме, то задачу решим численно.

Для численного примера возьмем оболочку из стали, которая имеет следующие значения параметров: $a = 1$ м, $b = 0.5$ м, $k_x = \frac{1}{5}$, $k_y = \frac{1}{2}$, $h = 0.001$ м, $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, $E = 200$ ГПа = $2 \cdot 10^{11}$ н/м², $\mu = 0,3$, $P = 8$, $Q = 2$, $t = 0$.

Пусть начальный прогиб и начальная скорость срединной поверхности будут

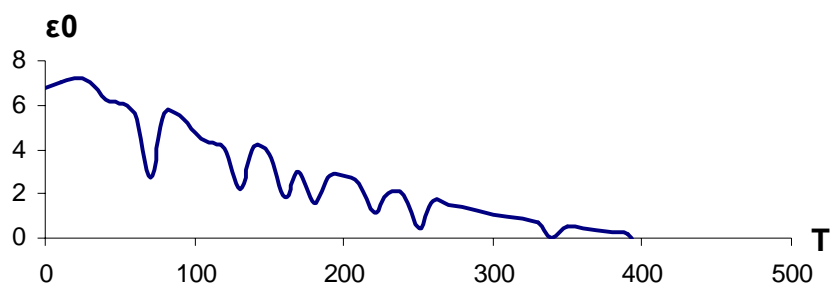
$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{1}{100}x^2 + \frac{1}{200}y^2 \\ \psi(x, y) &= \frac{1}{50}x^2 + \frac{1}{100}y^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Вычисляя квадрат частоты собственных колебаний оболочки при малых прогибах из (1.10) для $m = 4, n = 4$, получим

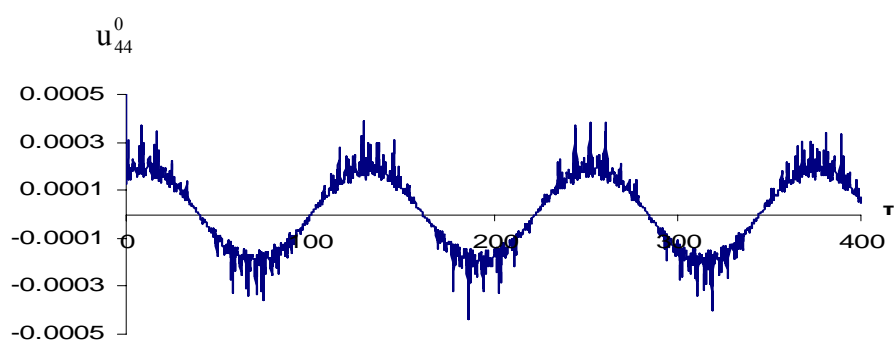
$$\begin{aligned} \lambda_{11} = \omega_{11}^2 &= 173905, & \lambda_{12} = \omega_{12}^2 &= 128072, & \lambda_{13} = \omega_{13}^2 &= 142361 \\ \lambda_{14} = \omega_{14}^2 &= 203988, & \lambda_{21} = \omega_{21}^2 &= 315566, & \lambda_{22} = \omega_{22}^2 &= 182482 \\ \lambda_{23} = \omega_{23}^2 &= 172237, & \lambda_{24} = \omega_{24}^2 &= 227224, & \lambda_{31} = \omega_{31}^2 &= 430053 \\ \lambda_{32} = \omega_{32}^2 &= 257536, & \lambda_{33} = \omega_{33}^2 &= 219650, & \lambda_{34} = \omega_{34}^2 &= 265894 \\ \lambda_{41} = \omega_{41}^2 &= 505559, & \lambda_{42} = \omega_{42}^2 &= 337524, & \lambda_{43} = \omega_{43}^2 &= 280934 \\ \lambda_{44} = \omega_{44}^2 &= 319717 \end{aligned}$$

Учитывая эти значения, с помощью программы «Mathematica 5.0» и «Microsoft Excel» численным методом вычислены $(I_{mn}^{(1)})^0, (I_{mn}^{(2)})^0$ ($m = 1, 2, 3, 4; n = 1, 2, 3, 4$), а следовательно, вычислены гипотетическое рассогласование из (1.13) и оптимальные управляющие воздействия из (1.12).

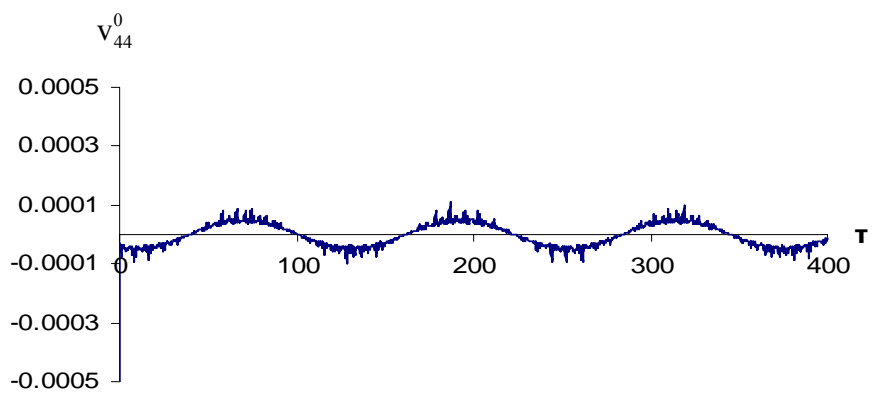
Ниже представлены зависимости $\varepsilon^0\{T, 0, 500\}$ (фиг. 1), $u_{44}^0\{\tau, 0, 400\}$ (фиг. 2), $v_{44}^0\{\tau, 0, 400\}$ (фиг. 3).



Фиг. 1

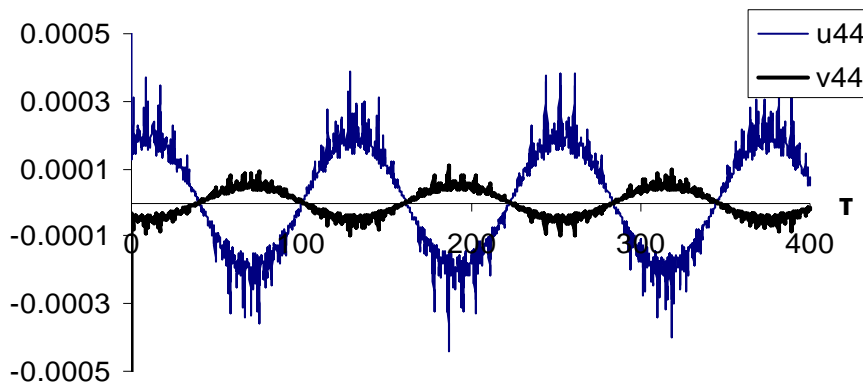


Фиг. 2



Фиг. 3

u_{44}^0, v_{44}^0



Фиг. 4

Из фиг. 4 видно, что u_{44}^0 и v_{44}^0 имеют противоборствующее влияние в том же интервале времени. При этом, когда $v_{44}^0 = 0$, то u_{44}^0 также превращается в нуль. Остальные оптимальные управляющие воздействия $u_{mn}^0 \{ \tau, 0, 400 \}$, $v_{mn}^0 \{ \tau, 0, 400 \}$ ($m, n = 1, 2, 3, 4$) имеют тот же характер, что и $u_{44}^0 \{ \tau, 0, 400 \}$ (фиг. 2) и $v_{44}^0 \{ \tau, 0, 400 \}$ (фиг. 3).

Из фиг. 1 следует, что в момент $\mathcal{G} \approx 400$ гипотетическое рассогласование превращается в нуль, т.е. игра заканчивается в пользу первого игрока, когда его ресурсы больше, чем у второго.

Следовательно, при $P > Q$ первый игрок, распоряжающийся управлением u_{mn}^0 , гасит колебательное движение оболочки (которая совершает колебания с образованием конечных счетов полуволн вдоль каждой стороны) при самом упорном сопротивлении со стороны второго игрока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Наука. 1956. 416с.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука. 1972. 432с.
3. Tolstov G.P. Fourier Series. New York. Dover Publications. 1962. 336p.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1989. 624с.
5. Габриелян М.С. Об оптимальном управлении механической системой мощности континуума в конфликтных ситуациях. //Изв. НАН РА. Механика. 1998. Т.51. № 4. С. 72–76.
6. Мазмяян Л.А. Об оптимальном управлении линейных колебаний пластинки в конфликтных ситуациях. //В сб.: Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем. Ереван. 2002. С. 48–52.
7. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры.

М.: Наука. 1974. 456с.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
20.06.2005