ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 59, №2, 2006 Механика

УДК 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Белубекян В. М., Мгерян Д. Э.

#

Վ. Մ. Բելուբեկյան, Դ. Հ. Միհերյան

Տրանսվերսալ իզոտրոպ, առաձգական միջավայրում, մակերևութայինալիքների տարածման եռաչափ խնդիրը

Առանձգական ալիքները և մասնավորաբար մակերևութային ալիքները տրանսվերսալ իզոտրոպ միջավայրերում եղել են շատ հեղինակների հետազոտության օբյեկտ[1]: Տվյալ աշխատանքում, Ռելեյի տիպի մակերևութային ալիքների տարածման եռաչափ խնդրի համար, ստացվել են ալիքի գոյության պայմաններ կոնկրետ անիզոտրոպ նյութերի համար:

V. M. Belubekyan, D. H. Mheryan

Three-Dimensional Problem of the Surfase Waves Propagation in Transversely Isotropic Elastic Medium

Elastic waves and particulary surfase waves in transversely izotropic elastic media were object of research of many authors. In this work we obtain conditions of existense of wave for three-dimensional problem of the surfase waves propagation in transversely isotropic elastic media for concrete materials.

Упругие волны, и в частности, поверхностные волны, в трансверсально-изотропной среде были объектом исследований многих авторов [1]. В настоящей работе для трехмерной задачи распространения поверхностных волн типа Рэлея получены условия существования для конкретных анизотропных материалов.

1.Рассматривается трансверсально-изотропное упругое полупространство. Предполагается, что через все точки проходят параллельные плоскости упругой симметрии, в которых все направления являются упруго-эквивалентными (плоскости изотропии). Иначе говоря, в каждой точке имеется одно главное направление и бесконечное множество главных направлений в плоскости, нормальной к первому. Можно такое тело рассматривать как тело, через каждую точку которого проходит ось упругой симметрии бесконечно высокого порядка – ось вращения.

Предполагается, что плоскость, ограничивающее полупространство, является плоскостью изотропии. Ось z направлена нормально к плоскости изотропии, а оси x и y произвольно в этой плоскости. В таком случае полупространство в прямоугольной декартовой координатной системе занимает область $(-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, \ \ 0 \le z < \infty)$:

Система уравнений, определяющая волновые процессы в этой среде, имеет вид [2]:

$$c_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+$$
$$+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+c_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+c_{44}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+$$
$$+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.1}$$
$$c_{44}\Delta_2 w+c_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

здесь u, v, w – проекции вектора перемещения на оси координат x, y, z соответственно, c_{ij} – пять упругих независимых констант трансверсально-изотропной среды, ρ – плотность материала, Δ_2 – двумерный оператор Лапласа: $\Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (1.2

Для первого и второго уравнений из системы (1.1), по аналогии с задачей плоской деформации [3], вводится преобразование

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\chi}{\partial y},\quad v=\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\chi}{\partial x} \tag{1.3}$$

Отметим, что преобразование (1.3) было использовано также для пространственной задачи статики трансверсально-изотропного пьезоэлектрика [4], а также для пространственной задачи распространения поверхностных волн в изотропной среде [5].

С помощью преобразования (1.3) первые два уравнения системы (1.1) заменяются следующими уравнениями:

$$\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\Delta_2\chi+c_{44}\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}=\rho\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}$$
$$c_{11}\Delta_2\psi+c_{44}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial w}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

Затем третье уравнение системы (1.1) дифференцируется по z и туда подставляется выражение $\frac{\partial w}{\partial z}$ из второго уравнения системы (1.4), что дает:

$$\Delta_2^2\psi+2\alpha_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Delta_2\psi+\alpha_2\frac{\partial^4\psi}{\partial z^4}-\left(\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_2\psi-$$
$$-\left(\frac{\alpha_2}{c_2^2}+\frac{1}{c_1^2}\right)\frac{\partial^4\psi}{\partial z^2\partial t^2}+\frac{1}{c_1^2c_2^2}\frac{\partial^4\psi}{\partial t^4}=0 \tag{1.5}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\alpha_1=\frac{c_{33}c_{11}-c_{13}(c_{13}+2c_{44})}{2c_{11}c_{44}},\quad \alpha_2=\frac{c_{33}}{c_{11}}$$

$$c_1^2=\frac{c_{11}}{\rho},\quad c_2^2=\frac{c_{44}}{\rho} \tag{1.6}$$

В частном случае изотропной среды $c_{11}=c_{33}=\lambda+2\mu$, $c_{44}=\mu$, $c_{12}=c_{13}=\lambda$, из (1.6) следует $\alpha_1=\alpha_2=1$ и уравнение (1.5) приводится к виду [5]

$$\left(\Delta-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta\psi-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)=0 \tag{1.7}$$

где Δ – трехмерный оператор Лапласа

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Таким образом, система уравнений (1.1) привелась к решению автономных первого уравнения из (1.4) и уравнения (1.5). Второе уравнение из (1.4) будет определять функцию перемещения w после определения искомых ψ и χ. При постановке задачи нахождения поверхностной волны необходимо удовлетворить условиям затухания

$$\lim_{z\to\infty}u=0,\quad \lim_{z\to\infty}v=0,\quad \lim_{z\to\infty}w=0 \tag{1.8}$$

Из первых двух условий (1.8) и из (1.3) следуют условия затухания для функций ψ и χ:

$$\lim_{z\to\infty}\chi=0,\quad \lim_{z\to\infty}\psi=0 \tag{1.9}$$

2. Решения первого уравнения из (1.4) и уравнения (1.5) представляются в виде

$$\begin{aligned}\chi&=\Phi(z)\exp i(\omega t-k_1x-k_2y)\\ \psi&=F(z)\exp i(\omega t-k_1x-k_2y)\end{aligned} \tag{2.1}$$

Подстановка (2.1) в первое уравнение из (1.4) и в уравнение (1.5) приводит к решению обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомых функций Φ и F. Решение указанных дифференциальных уравнений, удовлетворяющих условиям затухания (1.9), имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi&=Be^{-p_3\Gamma z}\\ F&=A_1e^{-p_1\Gamma z}+A_2e^{-p_2\Gamma z}\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$p_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}\left\{\alpha_1-\frac{1}{2}(\alpha_2+\theta)\eta\pm\sqrt{\left[\alpha_1-\frac{1}{2}(\alpha_2+\theta)\eta\right]^2-\alpha_2(1-\eta)(1-\theta\eta)}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

$$p_3=\frac{1}{\sqrt{\alpha_3}}\sqrt{1-\alpha_3\eta} \tag{2.4}$$

$$\theta=\frac{c_{44}}{c_{11}},\ \eta=\frac{\omega^2}{c_2^2\Gamma^2},\ \Gamma^2=k_1^2+k_2^2,\ \alpha_3=\frac{2c_{44}}{c_{11}-c_{12}} \tag{2.5}$$

Из (2.2)–(2.4) следует, что для удовлетворения условиям затухания (1.9) необходимо выполнение условий

$$0<\eta<\min(1,\alpha_3^{-1},\theta^{-1}) \tag{2.6}$$

В случае изотропного материала $\alpha_3=1$ $\theta\le 0{,}5$.

Подстановкой (2.1) с учетом (2.2) во второе уравнение системы (1.4), искомая функция w с учетом условия затухания (1.8) определяется следующим образом:

$$w=\frac{c_{44}\Gamma}{c_{13}+c_{44}}\left[\frac{p_1^2-\theta^{-1}(1-\theta\eta)}{p_1}A_1e^{-p_1\Gamma z}+\frac{p_2^2-\theta^{-1}(1-\theta\eta)}{p_2}A_2e^{-p_2\Gamma z}\right]\times \tag{2.7}$$
$$\times\exp i(\omega t-k_1x-k_2y)$$

3. Рассматривается полупространство со свободной от нагрузки поверхностью

$$\sigma_{33}=0,\ \sigma_{31}=0,\ \sigma_{32}=0 \text{ при } z=0 \tag{3.1}$$

Граничные условия (3.1) в перемещениях имеют вид

$$c_{13}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+c_{33}\frac{\partial w}{\partial z}=0\ ,\ \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=0 \tag{3.2}$$

Подстановка (1.3) с учетом (2.1), (2.2) и (2.7) в граничные условия (3.2) приводит к следующей системе уравнений относительно произвольных постоянных A_1, A_2, B:

$$\begin{aligned}&\left[p_1^2-\theta^{-1}(1-\theta\eta)+\alpha_4\right]A_1+\left[p_2^2-\theta^{-1}(1-\theta\eta)+\alpha_4\right]A_2=0\\&\left[\frac{p_1^2-\theta^{-1}(1-\theta\eta)}{p_1}-\alpha_5p_1\right]A_1+\left[\frac{p_2^2-\theta^{-1}(1-\theta\eta)}{p_2}-\alpha_5p_2\right]A_2=0\\&p_3B=0\end{aligned} \tag{3.3}$$

Из (3.3) при $p_3\ne 0$ следует B=0 и равенство нулю детерминанта приводит к дисперсионному уравнению, которое преобразуется к виду [6]

$$R(\eta)=(p_1-p_2)R_1(\eta) \tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned}R_1(\eta)&=\frac{c_{13}}{c_{44}}\frac{(1-\eta)(1-\theta\eta)}{\alpha_2}+\theta^{-1}(1-\theta\eta)\frac{2}{\alpha_2}\left[\alpha_1-\frac{1}{2}(\alpha_2+\theta)\eta\right]+\\&+\left\{\theta^{-1}(1-\theta\eta)-\frac{c_{13}}{c_{44}}\left[\alpha_4-\theta^{-1}(1-\theta\eta)\right]\right\}p_1p_2+\theta^{-1}(1-\theta\eta)\left[\alpha_4-\theta^{-1}(1-\theta\eta)\right]\end{aligned} \tag{3.5}$$

В (3.3) и (3.5) дополнительно использованы обозначения

$$\alpha_4 = \frac{c_{13}(c_{13}+c_{44})}{c_{33}c_{44}},\ \alpha_5 = \frac{c_{13}+c_{44}}{c_{44}} \tag{3.6}$$

В этом случае $A_2 = -\dfrac{p_1^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta)+\alpha_4}{p_2^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta)+\alpha_4}\grave{A}_1,\ \ B=0$

Компоненты вектора перемещения имеют следующий вид:

$$u = -k_1 i\left[e^{-p_1\Gamma z} - e^{-p_2\Gamma z}\frac{p_1^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta)+\alpha_4}{p_2^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta)+\alpha_4}\right]A_1 \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y)$$

$$v = -k_2 i\left[e^{-p_1\Gamma z} - e^{-p_2\Gamma z}\frac{p_1^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta)+\alpha_4}{p_2^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta)+\alpha_4}\right]A_1 \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y) \tag{3.7}$$

$$w = \frac{c_{44}\Gamma}{c_{13}+c_{44}}\left[\frac{p_1^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta)}{p_1}e^{-p_1\Gamma z} - \frac{p_2^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta)}{p_2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{p_1^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta)+\alpha_4}{p_2^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta)+\alpha_4}e^{-p_2\Gamma z}\right]A_1 \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y)$$

В частном случае изотропной среды уравнение $p_1 - p_2 = 0$ имеет единственное решение $\eta = 0$. Корню уравнения $p_1 - p_2 = 0$ соответствует тривиальное решение: $u = v = w = 0$. В табл.1 приводятся корни уравнения $p_1 - p_2 = 0$ для некоторых трансверсально-изотропных материалов. Характеристики материалов взяты из монографии [7].

Таблица 1

материал	Условия затухания	η
Be(бериллий)	(0 ; 0,8172)	0,9382; -2,1731
ЦТЦ-4(керамика)	(0 ; 1)	$\varnothing$
ZnO(окись цинка)	(0 ; 1)	$\varnothing$
CdS(сульфид кадмия)	(0 ; 1)	$\varnothing$
Ti(титан)	(0 ; 0,7537)	$\varnothing$
Zn(цинк)	(0 ; 1)	0,9858; -80,2468
Y(итрий)	(0 ; 1)	$\varnothing$
TiO2(оксид титана)	(0 ; 0,3880)	0,9976; -1,4812
Sn(anag)	(0 ; 1)	$\varnothing$
Cd(кадмий)	(0 ; 1)	0,7009; -10,4816
In(индий)	(0 ; 0,3846)	0,5484; -8,9361

Из исследованных материалов только для Zn и Cd получается корень в интервале затухания, но этим корням соответствует тривиальное решение, поскольку если $p_1 = p_2$, то $u = v = w = 0$.

Значения функции $R_1(\eta)$ на концах интервала [0,1] имеют вид:

$$R_1(0) = \frac{c_{13}+c_{44}}{c_{33}c_{44}^2}\frac{\sqrt{c_{11}}}{\sqrt{c_{33}}}\left(c_{11}c_{33}-c_{13}^2\right),\ R_1(1) = \frac{c_{11}-c_{44}}{c_{33}c_{44}^2}\left(-c_{13}c_{44}-c_{44}^2\right) \quad (3.8)$$

Из (3.8) следует, что $R_1(1)<0,$ а знак выражения $R_1(0)$ определяет выражение $c_{11}c_{33}-c_{13}^2$, который положительный для тех материалов, которые мы исследуем.

$$R_1(\alpha_3^{-1}) = \frac{c_{44}+c_{13}}{4c_{33}c_{44}^2}\times$$

$$\times\left\{c_{12}^2-c_{11}^2+(c_{11}c_{33}+c_{12}c_{33}-2c_{13}^2)\frac{\sqrt{(2c_{44}-c_{11}+c_{12})(c_{11}+c_{12})}}{\sqrt{c_{44}c_{33}}}\right\} \quad (3.9)$$

Знак (3.9) определяет выражение

$$\left\{c_{12}^2-c_{11}^2+(c_{11}c_{33}+c_{12}c_{33}-2c_{13}^2)\frac{\sqrt{(2c_{44}-c_{11}+c_{12})(c_{11}+c_{12})}}{\sqrt{c_{44}c_{33}}}\right\}$$

Для Ti условия затухания–промежуток $(0;\alpha_3^{-1})$. Из $R_1(\alpha_3^{-1})>0\Rightarrow$, что уравнение $R_1(\eta)=0$ не имеет действительных корней в промежутке $(0;\alpha_3^{-1})$.

Для Be условия затухания–промежуток $(0;\alpha_3^{-1})$. Из $R_1(\alpha_3^{-1})<0\Rightarrow$, что уравнение $R_1(\eta)=0$ имеет действительный корень в промежутке $(0;\alpha_3^{-1})$.

В табл. 2 приводятся корни уравнения $R_1(\eta)=0$ в промежутке условия затухания для некоторых трансверсально-изотропных материалов.

Таблица 2

материал	Условия затухания (2.6)	$R_1(\eta)$ в концах промежутка затух.	η
Be(бериллий)	(0 ; 0,8172)	1,8175; -0,1081	0,7443
ЦТЦ-4 (керамика)	(0 ; 1)	15,2686; -3,8364	0,88886
ZnO(окись цинка)	(0 ; 1)	12,8193; -2,7533	0,9131
CdS(сульфид кадмиа)	(0 ; 1)	16,5452; -3,0995	0,9374
Ti(титан)	(0 ; 0,7537)	6,8425; 0,9130	$\varnothing$
Zn(цинк)	(0 ; 1)	10,3983; -4,2645	0,7489
Y(итрий)	(0 ; 1)	5,1063; -1,2035	0.8676
TiO_2(оксид титана)	(0 ; 0,3880)	2,9913; 1,2744	$\varnothing$
Sn(anag)	(0 ; 1)	6,1082; -1,3361	0,8849
Cd(кадмий)	(0 ; 1)	18,4050; -5,5514	0.8638
In(индий)	(0 ; 0,3846)	8,4165; 1,6617	$\varnothing$

В табл. 1 и 2 приведены также численные результаты для \ и \, которые не являются чисто трансверсально-изотропными, но имеют близкие к ним свойства.

Когда верхний предел промежутка затухания становится меньше, чем 0,8, то уравнение $R_1(\eta) = 0$ не имеет действительного решения в этом промежутке и, следовательно, поверхностная волна не существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chadwiek P. Wave Propagation in Transversely Isotropic Elastic Media.Parts 1 – 3, Procced of the Roy. Soc. of London (A). 1989, ν. 422, ¹ 1862, p 23 – 121.
2. Royer D., Dieulesaint E. Elastic Waves in Solids. V1. Springer - Verlag Berlin Heidellerg 2000 374p.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
4. Wang Z., Zheng B. The general solution of the three – dimensional prob- lems in piezoelectric media.// Int. J. Solids and Structures. 1995. Vol. 32. N1. PP. 105 – 115.
5. Белубекян В. М., Белубекян М. В. Трехмерная задача поверхностных волн Релея. // Докл. НАН Армении. 2005. Т. 105. №4. С. 362 –369.
6. Белубекян М. В. Поверхностные волны в упругих средах. // В сб.: Проблемы механики деформируемого твердого тела. Ереван: Изд. НАН Армении. 1997. С. 79–96.
7. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.:Наука, 1977. 399 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
22.12.2005