ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 59, №1, 2006 Механика

УДК 539.3

ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНО-ПРОВОДЯШЕЙ СРЕДЕ

Геворкян А.В.

Ա. Վ. Գևորգյան
Ալիքային հավասարումները վերջավոր հաղորդիչ միջավայրում

Արտածված են երկայնական և լայնական ալիքների տարածումը նկարագրող հավասարումները վերջավոր հաղորդիչ միջավայրում՝ արտաքին հաստատուն մագնիսական դաշտի առկայությամբ:

A.V. Gevorgyan
Wave Equations in Finitely Conducting Medium

The equations, describing longitudinal and transverse waves propogation in finitely conductincg medium with the presence of external constant magnetic field, are derived.

Выведены уравнения, описывающие распространение продольных и поперечных волн в конечно-проводящей среде при наличии внешнего постоянного магнитного поля.

Для исследования волновых движений в конечно-проводящей среде при наличии внешнего постоянного магнитного поля будем исходить из системы линеаризированных уравнений магнитоупругости, описывающей поведение электромагнитного поля и движение проводящего упругого тела (при пренебрежении током смещения относительно тока проводимости), записанной в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ в виде [1-3]

$$c_2^2\nabla^2\vec{u}+(c_1^2-c_2^2)\text{graddiv}\vec{u}+\frac{H_0}{4\pi\rho}\text{rot}\vec{h}\times\vec{i}_{H_0}=\partial_t^2\vec{u}$$

$$D\vec{h}=-\frac{4\pi\sigma H_0}{c^2}\partial_t\text{rot}(\vec{u}\times\vec{i}_{H_0}),\ D\equiv\nabla^2-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\partial_t \tag{1}$$

$$\text{div}\vec{h}=0$$

где $\vec{u}(x_1,x_2,x_3,t)$ –вектор смещения, $\vec{h}(x_1,x_2,x_3,t)$ –вектор индуцированного магнитного поля, $\vec{i}_{H_0}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ – единичный вектор направления внешнего постоянного магнитного поля H_0, c_2 –скорость распространения упругих поперечных волн в среде, c_1 –скорость продольных волн в среде, ρ –плотность материала среды, σ –удельная электропроводимость среды. Магнитная проницаемость среды принимается равной единице.

Представим вектор перемещения $\vec{u}$ через потенциальную и соленоидальную части [2].

$$\vec{u}=\text{grad}\,\varphi+\text{rot}\,\vec{\psi}\quad,\quad \text{div}\vec{\psi}=0 \tag{2}$$

где φ и $\vec{\psi}$ –функции времени и координат, называемые скалярным и векторным потенциалами (представление Ламе).

Подставляя соотношения (2) в систему уравнений (1), после простых преобразований будем иметь

$$\operatorname{grad}(\Delta_1\varphi - \frac{H_0}{4\pi\rho}\vec{h}\cdot\vec{i}_{H_0}) + \operatorname{rot}(\Delta_2\vec{\psi} - \frac{H_0}{4\pi\rho}\vec{i}_{H_0}\times\vec{h}) = 0 \qquad (3)$$

$$D\vec{h} = -H_0\,4\pi\sigma c^{-2}\partial_t \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\varphi\vec{i}_{H_0} + \vec{\psi}\times\vec{i}_{H_0})$$
$$\Delta_s \equiv c_s^2\nabla^2 - \partial_t^2, \qquad s = 1,2 \qquad (4)$$

Умножая обе части уравнения (3) скалярно на вектор $\vec{\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{H}_0}$, получим следующее соотношение:

$$\Delta_1\operatorname{div}(\varphi\vec{i}_{H_0}) = -\Delta_2\operatorname{div}(\vec{\psi}\times\vec{i}_{H_0}) \qquad (5)$$

Применяя оператор D к уравнению (3), с учетом (4) и соотношений

$$\vec{i}_{H_0}\times D\vec{h} = -H_0\,4\pi\sigma c^{-2}\partial_t\left[\operatorname{grad}(\vec{i}_{H_0}\cdot\vec{F}) + \operatorname{rot}(\vec{i}_{H_0}\times\vec{F})\right]$$

$$\vec{i}_{H_0}\cdot D\vec{h} = H_0\,4\pi\sigma c^{-2}\partial_t\operatorname{div}(\vec{i}_{H_0}\times\vec{F})$$

$$\vec{F} = \operatorname{rot}(\varphi\cdot\vec{i}_{H_0} + \vec{\psi}\times\vec{i}_{H_0})$$

приходим к

$$\operatorname{grad}\left[D\Delta_1\varphi - 4\pi\sigma \mathrm{v}^2 c^{-2}\partial_t\operatorname{div}(\vec{i}_{H_0}\times\vec{F})\right] + \operatorname{rot}\left[D\Delta_2\vec{\psi} + 4\pi\sigma \mathrm{v}^2 c^{-2}\partial_t\operatorname{rot}(\vec{i}_{H_0}\times\vec{F})\right] = 0$$

$$\mathrm{v}^2 = \frac{H_o^2}{4\pi\rho} \qquad (6)$$

Применяя к уравнению (6) поочередно операции div и rot, получим систему уравнений [1-2].

$$\left[D\Delta_1\varphi - 4\pi\sigma \mathrm{v}^2 c^{-2}\partial_t\operatorname{div}(\vec{i}_{H_0}\times\vec{F})\right] = 0 \qquad (7)$$

$$\left[D\Delta_2\vec{\psi} + 4\pi\sigma \mathrm{v}^2 c^{-2}\partial_t\operatorname{rot}(\vec{i}_{H_0}\times\vec{F})\right] = 0 \qquad (8)$$

Далее, используя тождества

$$\operatorname{div}\left(\vec{i}_{H_0}\times\vec{F}\right) = \nabla^2\varphi - \operatorname{div}\left(\vec{i}_{H_0}\operatorname{div}\left(\varphi\vec{i}_{H_0} + \vec{\psi}\times\vec{i}_{H_0}\right)\right) \qquad (9)$$
$$\operatorname{rot}\left(\vec{F}\times\vec{i}_{H_0}\right) = \left(\vec{i}_{H_0}\nabla\right)\left(\vec{i}_{H_0}\nabla\right)\vec{\psi} + \operatorname{rot}\left(\vec{i}_{H_0}\operatorname{div}\left(\varphi\vec{i}_{H_0}\right)\right)$$

уравнения (7) и (8) примут вид:

$$D\Delta_1\varphi - 4\pi\sigma \mathrm{v}^2 c^{-2}\partial_t\left[\nabla^2\varphi - \operatorname{div}\left(\vec{i}_{H_0}\operatorname{div}\left(\varphi\vec{i}_{H_0} + \vec{\psi}\times\vec{i}_{H_0}\right)\right)\right] = 0 \qquad (10)$$

$$D\Delta_2\vec{\psi} - 4\pi\sigma \mathrm{v}^2 c^{-2}\partial_t\left[(\vec{i}_{H_0}\nabla)(\vec{i}_{H_0}\nabla)\vec{\psi} + \operatorname{rot}\left(\vec{i}_{H_0}\operatorname{div}(\varphi\vec{i}_{H_0})\right)\right] = 0 \qquad (11)$$

$$\vec{i}_{H_0}\nabla \equiv \alpha_k\partial_k \qquad \text{(суммировать)}$$

Учитывая соотношение (5), из уравнений (10) и (11) исключив, соответственно, функции $\vec{\psi}$ и φ, получим

$$D\Delta_1\Delta_2\varphi - 4\pi\sigma \mathrm{v}^2 c^{-2}\partial_t\left[\Delta_2\nabla^2\varphi + \left(\Delta_1 - \Delta_2\right)\operatorname{div}(\vec{i}_{H_0}\operatorname{div}(\varphi\vec{i}_{H_0}))\right] = 0 \qquad (12)$$

$$D\Delta_1\Delta_2\vec{\psi} - 4\pi\sigma \mathrm{v}^2 c^{-2}\partial_t\left[(\vec{i}_{H_0}\nabla)(\vec{i}_{H_0}\nabla)\Delta_1\vec{\psi} - \Delta_2\operatorname{rot}(\vec{i}_{H_0}\operatorname{div}(\vec{\psi}\times\vec{i}_{H_0}))\right] = 0 \qquad (13)$$

Уравнения (12) и (13) с помощью следующих тождеств

$$\operatorname{rot}\left(\vec{i}_{H_0}\operatorname{div}(\vec{\psi}\times\vec{i}_{H_0})\right) = (\vec{i}_{H_0}\nabla)(\vec{i}_{H_0}\nabla)\vec{\psi} - \nabla^2\vec{\psi} - \operatorname{rotrot}\left((\vec{\psi}\cdot\vec{i}_{H_0})\vec{i}_{H_0}\right)$$

$$\operatorname{div}\left(\vec{i}_{H_0}\operatorname{div}(\varphi\cdot\vec{i}_{H_0})\right)=(\vec{i}_{H_0}\nabla)(\vec{i}_{H_0}\nabla)\varphi$$

преобразуются к виду

$$\left\{D\Delta_1\Delta_2-4\pi\sigma v^2c^{-2}\partial_t\left[\Delta_2\nabla^2+\left(\Delta_1-\Delta_2\right)\left(\vec{i}_{H_0}\nabla\right)\left(\vec{i}_{H_0}\nabla\right)\right]\right\}\varphi=0 \qquad (14)$$

$$\left\{D\Delta_1\Delta_2-4\pi\sigma v^2c^{-2}\partial_t\left[\Delta_2\nabla^2+\left(\Delta_1-\Delta_2\right)\left(\vec{i}_{H_0}\nabla\right)\left(\vec{i}_{H_0}\nabla\right)\right]\right\}\vec{\psi}-$$
$$-4\pi\sigma v^2c^{-2}\partial_t\Delta_2\operatorname{rotrot}\left(\vec{\psi}\cdot\vec{i}_{H_0}\right)\vec{i}_{H_0}=0 \qquad (15)$$

Для исключения последнего члена уравнения (15) умножим обе части уравнения (11) скалярно на единичный вектор $\vec{i}_{H_0}$, тогда

$$\left[D\Delta_2-4\pi\sigma v^2c^{-2}\partial_t(\vec{i}_{H_0}\nabla)(\vec{i}_{H_0}\nabla)\right](\vec{\psi}\cdot\vec{i}_{H_0})=0 \qquad (16)$$

Наконец, с учетом (16) из (14) и (15) приходим к окончательным уравнениям для продольных и поперечных волн соответственно,

$$L\varphi=0 \qquad (17)$$

$$TL\vec{\psi}=0 \qquad (18)$$

$$L=D\Delta_1\Delta_2-4\pi\sigma v^2c^{-2}\partial_t\left[\Delta_2\nabla^2+(\Delta_1-\Delta_2)(\vec{i}_{H_0}\nabla)(\vec{i}_{H_0}\nabla)\right]$$

$$T=D\Delta_2-4\pi\sigma v^2c^{-2}\partial_t(\vec{i}_{H_0}\nabla)(\vec{i}_{H_0}\nabla)$$

Существенное упрощение уравнения (18) достигается, если использовать теорему Боджио [2], которая утверждает, что решение уравнения (18) получается как сумма решений более простых уравнений:

$$L\vec{\psi}'=0 \qquad (19)$$

$$T\vec{\psi}''=0 \quad \vec{\psi}=\vec{\psi}'+\vec{\psi}'' \qquad (20)$$

Отметим также, что уравнения (17) и (18) могут существенно упрощаться, в частности, в случае одномерных, плоских и антиплоских задач в зависимости от направления внешнего постоянного магнитного поля.

Еще одно обстоятельство.

При выводе уравнений (17) и (18) требовалось достаточной гладкости решений. Однако волновые уравнения (17) и (18) описывают волновые процессы в конечно-проводящей среде при любой гладкости решений и при любых обобщенных решениях [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1. М.:Наука, 1983. 528с.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.:Наука, 1982. 620с.
4. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328с.

Институт Механики

Поступила в редакцию