

УДК 539.376

ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ КОЛЬЦЕОБРАЗНОГО СТРИНГЕРА  
 К УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

Туманян Р.С.

Ռ. Ս Թումանյան

Բեռի փոխանցումը օղակաձև վերդրակից առաձգական անվերջ սալին սողքի հաշվառումով

Սողքի տեսության դրվածքով դիտարկվում է կոնտակտային խնդիր՝ օղակաձև վերդրակից առաձգական անվերջ սալին բեռի փոխանցման մասին: Խնդրի լուծումը բերվում է ըստ ժամանակի Վոլտերի օպերատոր պարունակող սինգուլյար ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարման լուծման: Չեֆիշևի բազմանդամների ապարատի օգնությամբ այդ հավասարումը բերված է Վոլտերի երկրորդ սեռի գծային ինտեգրալ հավասարումների անվերջ համակարգի: Կատարված է այդ համակարգի հետազոտություն ըստ սեղմող արտապատկերումների սկզբունքի: Ստացված են թվային արդյունքներ:

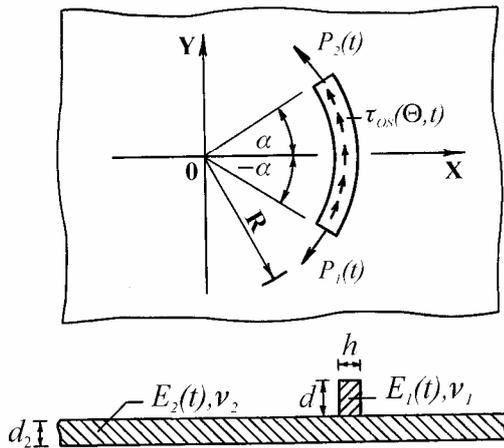
R.S. Toumanyan

A Load Transfer from Circular Stringer to an Elastic infinite plate taking into account the creep

The solution of problem is reduced to Volter's linear integral equation's infinite system of second kind. Numerical results are obtained.

В постановке теории ползучести рассматривается контактная задача о передаче нагрузки от кольцеобразного стрингера к упругой бесконечной пластине. Решение задачи сводится к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения, содержащего операторы Вольтерра по времени. При помощи аппарата многочленов Чебышева это уравнение сведено к бесконечной системе линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Проведено исследование этих систем по принципу сжимающих отображений. Получены числовые результаты.

1. Пусть бесконечная пластина высотой  $d_2$  на своей верхней грани усилена кольцеобразным стрингером с круговой осью радиуса  $R$ , имеющим высоту  $d$ , ширину  $h$ , угол раствора  $2\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi$ ). Требуется определить контактные напряжения в области соединения стрингера с пластиной в любой момент времени  $t$  ( $t \geq \tau_0$ ), если в момент времени  $t = \tau_0$  к концам стрингера приложены сосредоточенные силы  $P_1(t)$  и  $P_2(t)$  и одновременно стрингер на своей верхней грани загружен тангенциальными силами интенсивности  $\tau_{os}(\Theta, t)$ , сосредоточенными вдоль средней линии этой грани (фиг. 1). При этом считается, что  $h, d \ll R$  ( $h < d$ ).



Фиг. 1

Предполагается, что контактирующие между собой элементы (пластина, стрингер) изготовлены из упруго-ползучих материалов и обладают свойством ползучести, которая характеризуется неоднородностью процесса старения.

Предполагается также, что коэффициент поперечного сжатия при деформациях ползучести  $\nu_2(t, \tau)$  равен коэффициенту поперечного сжатия при упруго-мгновенных деформациях  $\nu_1(t)$  и постоянен во времени:

$$\nu_1(t) = \nu_2(t, \tau) = \nu = \text{const.}$$

Основные реологические характеристики стрингера:  $C_1(t, \tau)$  – мера ползучести,  $E_1(t)$  – модуль упруго-мгновенной деформации,  $\tau_1$  – постоянный по его длине возраст, а соответствующие характеристики для пластины –  $C_2(t, \tau)$ ,  $E_2(t)$ ,  $\tau_2$ .

В указанной постановке выведем определяющие уравнения поставленной задачи. Для этого, как в [1], воздействие кольцеобразного стрингера заменим неизвестными осевыми тангенциальными  $\bar{\tau}_s(\Theta, t)$  и поперечными радиальными  $\bar{q}_s(\Theta, t)$  контактными напряжениями.

Приняв во внимание [1], при помощи известных результатов [2] с учетом ползучести вычислим деформацию бесконечной пластины в окружном направлении  $\varepsilon_\Theta^{(2)}(\Theta, t)$  и осевую деформацию  $\varepsilon_1(\Theta, t)$  стрингера. На основании условия контакта  $\varepsilon_\Theta^{(2)}(\Theta, t) = \varepsilon_1(\Theta, t)$  ( $-\alpha < \Theta < \alpha$ ,  $t \geq \tau_0$ ) решение поставленной задачи сводится к решению следующего сингулярного интегро-дифференциального уравнения, содержащего операторы Вольтерра по времени:

$$(1 - L_2^0) \left[ \int_{-\alpha}^{\alpha} \text{ctg} \frac{U - \Theta}{2} \varphi'(U, t) dU + \nu_0 C(t) - f_2(\Theta, t) \right] = \quad (1)$$

$$= \lambda(t) (1 - L_1^0) [\varphi(\Theta, t) + f_1(\Theta, t)] \quad (-\alpha < \Theta < \alpha, t \geq \tau_0)$$

при граничных условиях

$$\varphi(-\alpha, t) = 0, \quad \varphi(\alpha, t) = g(t) \quad (2)$$

Здесь введены обозначения:

$$L_i^0 [X(t)] = \int_{\tau_0}^t E_i^*(t) K_i^*(t, \tau) X(\tau) d\tau \quad (i = 1, 2)$$

$$K_i^*(t, \tau) = K_i(t + \rho_i, \tau + \rho_i), \quad E_i^*(t) = E_i(t + \rho_i)$$

$$K_i(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} [E_i^{-1}(\tau) + C_i(t, \tau)], \quad \rho_i = \tau_i - \tau_0$$

$$\lambda(t) = \frac{8\pi d_2 R E_2^*(t)}{(1 + \nu_2)(3 - \nu_2) h d E_1^*(t)}, \quad \nu_0 = \frac{2(1 - \nu_2)}{3 - \nu_2}$$

$$\varphi(\Theta, t) = \int_{-\alpha}^{\Theta} \tau(U, t) dU, \quad C(t) = \int_{-\alpha}^{\alpha} U \tau(U, t) dU$$

$$f_1(\Theta, t) = p_1(t) - \int_{-\alpha}^{\Theta} \tau_0(U, t) dU$$

$$\begin{aligned}
f_2(\Theta, t) &= v_0 \left\{ \alpha [p_1(t) + p_2(t)] + \int_{-\alpha}^{\alpha} U \tau_0(U, t) dU \right\} + \\
&+ p_1(t) \sin(\alpha + \Theta) + p_2(t) \sin(\alpha - \Theta) + \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin(U - \Theta) \tau_0(U, t) dU \\
\tau(U, t) &= \bar{\tau}_s(U, t) R / P_0, \quad \tau_0(U, t) = \tau_{os}(U, t) R / P_0 \\
p_1(t) &= P_1(t) / P_0, \quad p_2(t) = P_2(t) / P_0, \quad P(t) = P_0 g(t)
\end{aligned}$$

$v_2/l$ -коэффициент Пуассона бесконечной пластины,

$\tau(\Theta, t) = \varphi'(\Theta, t)$  – тангенциальные контактные напряжения под кольцеобразным стрингером.

При этом, как вытекает из [1], радиальные контактные напряжения будут определяться по формуле:

$$q(\Theta, t) = -p_1(t) - \varphi(\Theta, t) + \int_{-\alpha}^{\Theta} \tau_0(U, t) dU \quad (4)$$

$$q(\Theta, t) = \bar{q}_s(\Theta, t) R / P_0$$

и при больших  $R$  можно считать  $\bar{q}_s(\Theta, t) \approx 0$ .

Следует отметить, что интеграл в (1) понимается в смысле главного значения по Коши.

2. Решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1) при граничных условиях (2) представим в виде бесконечного ряда [3, 4]

$$\begin{aligned}
\tau(\Theta, t) = \varphi'(\Theta, t) &= \frac{\sec(\Theta/2)}{\sqrt{2(\cos \Theta - \cos \alpha)}} \times \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} X_n(t) T_n \left( \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \quad (-\alpha < \Theta < \alpha, t \geq \tau_0),
\end{aligned} \quad (5)$$

где  $T_n(x)$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) – многочлены Чебышева первого рода,  $X_n(t)$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) – неизвестные коэффициенты, зависящие от времени и подлежащие определению.

Отсюда после простых преобразований получим:

$$\begin{aligned}
\varphi(\Theta, t) &= \sec \frac{\alpha}{2} \left\{ X_0(t) \left[ \pi - \arccos \left( \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \right] - \right. \\
&\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} X_n(t) \sin \left[ n \cdot \arccos \left( \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \right] \right\} \quad (-\alpha \leq \Theta \leq \alpha, t \geq \tau_0).
\end{aligned}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2), непосредственно находим:

$$X_0(t) = \pi^{-1} \cos(\alpha/2) g(t).$$

Далее, следуя известной процедуре [3,4], для определения неизвестных коэффициентов  $\{X_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$  получим следующую бесконечную систему линейных интегральных уравнений Вольтерра второго ряда:

$$Y_m(t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}^{(1)}(t) Y_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_0}^t B_{m,n}^{(2)}(t, \tau) Y_n(\tau) d\tau = N_m(t) \quad (m=1, 2, \dots; t \geq \tau_0). \quad (6)$$

Отметим, что исходя из (5), для коэффициентов интенсивности тангенциальных контактных напряжений в концевых точках стрингера получим:

$$A_1(t) = \lim_{\Theta \rightarrow \alpha} \sqrt{\alpha - \Theta} \tau(\Theta, t) = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \left[ Y_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t) \right] E_2^*(t) \quad (7)$$

$$A_2(t) = \lim_{\Theta \rightarrow -\alpha} \sqrt{\alpha + \Theta} \tau(\Theta, t) = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \left[ Y_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Y_n(t) \right] E_2^*(t)$$

3. Исследования бесконечных систем уравнений (6) проведены согласно принципу сжимающих отображений [6], придерживая при этом методику, изложенную в [5]. Исследования показали, что при выполнении условия  $t \in [\tau_0, T]$

$$\sup_m \sup_n \sum_{n=1}^{\infty} \left[ |B_{m,n}^{(1)}(t)| + \int_{\tau_0}^t |B_{m,n}^{(2)}(t, \tau)| d\tau \right] < 1$$

бесконечная система (6) имеет единственное решение, которое можно найти методом редукции или последовательных приближений.

4. Для проведения числового расчета меры ползучести стрингера  $C_1(d\Box\Box)$  и пластины  $C_2(d\Box\Box)$  приняты в форме, как в [7-9]:

$$C_1(t, \tau) = \varphi_1(\tau) \left[ 1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right]$$

$$C_2(t, \tau) = \varphi_2(\tau) \left[ 1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right]$$

где  $\varphi_1(\tau)$  и  $\varphi_2(\tau)$  – функции старения материалов стрингера и пластины, которые описывают процесс неоднородного старения. Тогда ядра ползучести  $K_1^*(t, \tau)$  и  $K_2^*(t, \tau)$  примут вид:

$$K_i^*(t, \tau) = K_i(t + \rho_i, \tau + \rho_i), \quad \rho_i = \tau_i - \tau_0$$

$$K_i(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{E_i(\tau)} + \varphi_i(\tau) \left[ 1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right] \right\}$$

$$\varphi_i(\tau) = C_i + \frac{A_i}{\tau} \quad (i = 1, 2).$$

Численный анализ проведен с учетом разновозрастности контактирующих элементов.

Для вязкоупругих характеристик пластины и стрингера приняты следующие значения:

$$E = E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad \gamma = 0,026 \text{ сум.}^{-1}, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu = 1/6,$$

$$C = C_1 = C_2 = 0,9 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}, \quad \tau_1 = \tau_0, \quad \rho_1 = 0; \quad \rho_2 = \tau_2 - \tau_0 = \tau_2 - \tau_1.$$

$$A = A_1 = A_2 = 4,82 \cdot 10^{-4} \text{ сум. МПа}^{-1},$$

При числовых расчетах было положено  $\tau_{0s}(\Theta, t) \equiv 0$  и рассмотрены два случая нагружения стрингера: симметричное нагружение, когда

$$P_1(t) = P_1 = \text{const}, \quad P_2(t) = P_2 = \text{const}, \quad P_1 = P_2,$$

$$\tau(-\Theta, t) = -\tau(\Theta, t), \quad q(\alpha, t) = -1$$

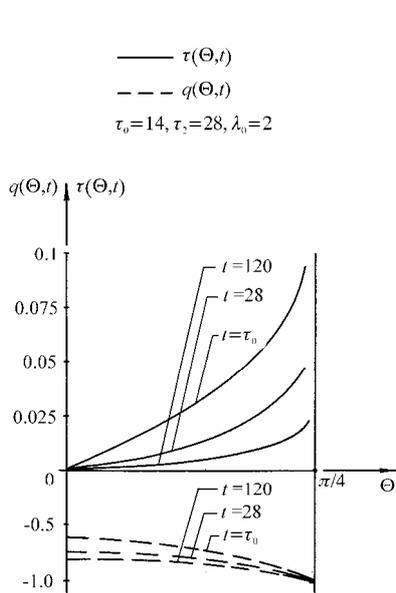
и косимметричное нагружение, когда

$$P_1(t) = P_1 = \text{const}, \quad P_2(t) = P_2 = \text{const}, \quad P_2 = -P_1,$$

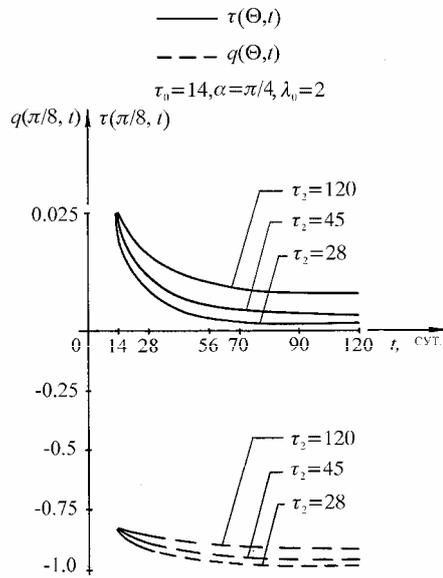
$$\tau(-\Theta, t) = \tau(\Theta, t), \quad q(\alpha, t) = -1/2.$$

Результаты вычислений в довольно широком диапазоне возрастов  $\tau_1$  и  $\tau_2$  контактирующих элементов и времени  $t$  приведены в виде таблиц и иллюстрированы на графиках.

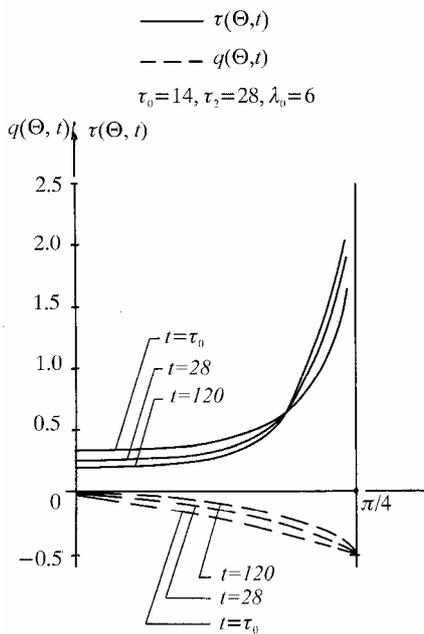
Графики изменения контактных напряжений  $\tau(\Theta, t)$  и  $q(\Theta, t)$  для различных моментов времени  $t$  при  $0 < \Theta < \pi/4$  представлены на фиг. 2 при симметричном нагружении и на фиг. 4 при кососимметричном нагружении. Кривая  $t = \tau_0$



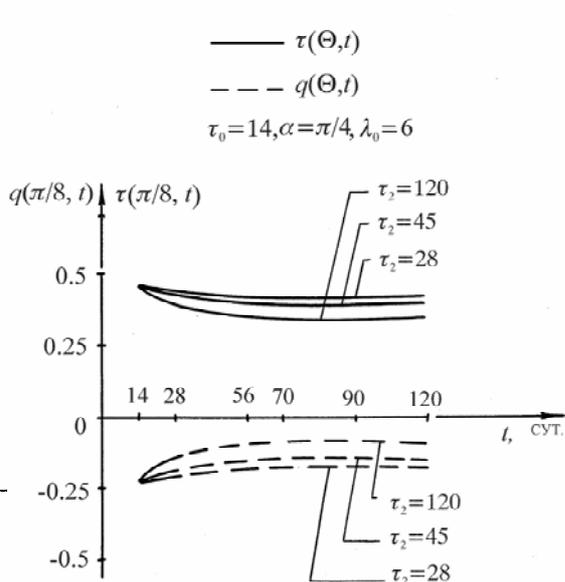
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

соответствует чисто упругому контакту стрингера с пластиной.

Графики изменения контактных напряжений во времени при различных значениях возраста основания  $\tau_2$  представлены на фиг. 3 при симметричном

нагружении в фиксированной точке  $\Theta = \pi/8$  и на фиг. 5, 6 при кососимметричном нагружении в двух фиксированных точках  $\Theta = \pi/8$  и  $\Theta = 2\pi/9$ .

В табл. 1 и 2 приведены значения  $A_1(t)$  при различных значениях  $t$  и  $\tau_2$ . Причем  $A_2(t) = -A_1(t)$  при симметричном нагружении (табл. 1) и  $A_2(t) = A_1(t)$  при кососимметричном нагружении (табл. 2).

Анализ числовых результатов при симметричном нагружении стрингера показывает, что

1) учет фактора неоднородности старения контактирующих тел по сравнению с упругим случаем приводит к существенному перераспределению контактных напряжений, причем с возрастанием времени  $t$  контактные напряжения заметно падают и при больших  $t$  мало отличаются друг от друга (фиг. 2);

2) в фиксированной точке ( $\Theta = \text{const}$ ) контактные напряжения с возрастанием времени  $t$  уменьшаются, а с возрастанием возраста пластины  $\tau_2$  увеличиваются (фиг. 3);

3) коэффициенты интенсивности тангенциальных контактных напряжений при фиксированном времени  $t$  с возрастанием возраста пластины  $\tau_2$  увеличиваются, а при фиксированном  $\tau_2$  с возрастанием времени  $t$  уменьшаются. При этом значения коэффициента интенсивности  $A_1(t)$  с учетом ползучести остаются меньшими значений  $A_1(t)$  в чисто упругом случае (табл. 1).

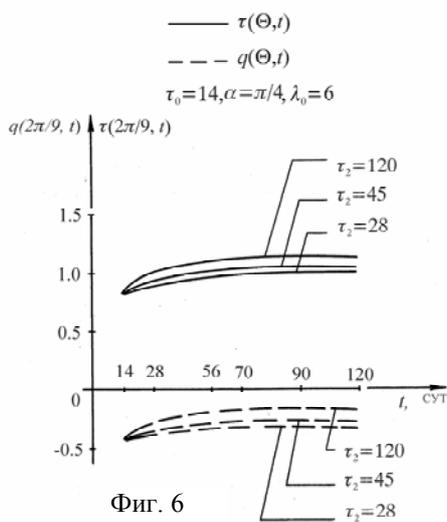
Анализ числовых результатов при кососимметричном нагружении стрингера показывает, что

1) с возрастанием времени  $t$  контактные напряжения  $\tau(\Theta, t)$  и  $q(\Theta, t)$  уменьшаются, причем графики  $\tau(\Theta, t)$  при различных значениях времени  $t$  пересекаются в определенной точке (фиг. 4);

2) в фиксированной точке  $\Theta = \pi/8$  и находящейся левее от указанной точки пересечения графиков, с возрастанием времени  $t$  и возраста пластины  $\tau_2$  контактные напряжения  $\tau(\Theta, t)$  и  $q(\Theta, t)$  уменьшаются (фиг. 5), а в другой фиксированной точке  $\Theta = 2\pi/9$  и находящейся правее от той же точки пересечения графиков, с возрастанием времени  $t$  и возраста пластины  $\tau_2$  тангенциальные контактные напряжения  $\tau(\Theta, t)$  возрастают, а радиальные контактные напряжения  $q(\Theta, t)$  убывают (фиг. 6);

3) коэффициенты интенсивности с возрастанием времени  $t$  и возраста пластины  $\tau_2$  возрастают (табл. 2).

Отметим, что для остальных значений  $\tau_2$  и  $\lambda_0$  ( $\lambda_0 = 8\pi d_2 R / (1 + \nu_2)(3 - \nu_2) = \text{const}$ ) и  $\alpha$  ход изменения контактных напряжений в обоих случаях нагружения, в основном, такой же, что на фиг. 2-6. Необходимо подчеркнуть, что характер распределения контактных напряжений существенно зависит от нагрузки, параметров ползучести и положения точки в контактной зоне. Все эти факторы



Фиг. 6

конкретных практических расчетах конструкций из стареющих материалов следует учесть.

Таблица 1

$\lambda_0 = 2, \alpha = \pi/4, \tau_0 = \tau_1 = 14 \text{ сут.}$				
$t$	28	45	90	120
14	0.02932	0.02932	0.02932	0.02932
28	0.01086	0.01299	0.01607	0.01689
56	0.00341	0.00577	0.01041	0.01195
70	0.00267	0.00480	0.00940	0.01105
120	0.00218	0.00392	0.00801	0.00966

Таблица 2

$\lambda_0 = 6, \alpha = \pi/4, \tau_0 = \tau_1 = 14 \text{ сут.}$				
$t$	28	45	90	120
14	0.33261	0.33261	0.33261	0.33261
28	0.34320	0.34653	0.35190	0.35349
56	0.34761	0.35185	0.36023	0.36318
70	0.34844	0.35276	0.36172	0.36501
120	0.34989	0.35434	0.36418	0.36803

Автор благодарит профессора Мхитаряна С. М. за постановку задачи и обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мхитарян С.М., Туманян Р.С. Передача нагрузки от кольцеобразного стрингера к упругой бесконечной пластине // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1984. Т. 37. 1 1. С. 3-15.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
4. Морарь Г.А., Попов Г.Я. К периодической контактной задаче для полубесконечности с упругими накладками // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 1. С. 172-178.
5. Давтян З.А., Мхитарян С.М. О двух контактных задачах кручения цилиндров при помощи цилиндрических оболочек с учетом их вязкоупругих свойств // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1984. Т. 37. 1 3. С. 3-17.
6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
7. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.-Л.: Гостехиздат, 1952. 324с.
8. Арутюнян Н.Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. 1 3. С. 153-164.

9. Арутюнян Н.Х. Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.

Ванадзорский филиал Государственного  
инженерного университета Армении

Поступила в редакцию  
10.05.2005