ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 59, №1, 2006 Механика

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЕ

Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.

Առաձգական սյունի կայունության մասին
Լ.Ա. Մովսիսյան, Գ.Գ. Ներսիսյան

Դիտարկվում են առաձգական կոնսոլային հեծանի կայունության խնդիրները, երբ ազատ եզրում տրվում են պայմաններ գծային կապերի տեսքով ծռող մոմենտի և պտտման անկյան միջև, կամ կտրող ուժի ու ճկվածքի միջև: Կապերը կարող են լինել ինչպես առաձգական, այնպես էլ առաձգամածուցիկ: Վերջին դեպքում ստատիկական դրվածքով ստացվում է, որ երկարատև կրիտիկական ուժը մեծ է քան ակնթարթայինը, իսկ դինամիկական դրվածքի դեպքում ստացված է, որ այդ կապերը խաղում են դիստաբիլիզացիոն դեր:

L.A. Movsisyan, G.G. Nersisyan
On the Stability of Elastic Columns

The stability of a column in two cases when on its end are given a lineare condition between bending moment and angle of turning or between cuttig forse and displacement. For viscoelastic connection in static statement longtime critical forse is greater than instantenous one and in dynamical statement viscoelastic connection destabilisises the sistem.

Известно, что классическая задача устойчивости консольной балки, когда на свободном конце действует следящая сила, в статической постановке не имеет решения [1,2]. Известны также еще различные модификации этой задачи (напр. [3-6] и др.).

В настоящей статье рассматриваются две задачи устойчивости, когда на ,,свободном'' конце заданы условия комбинационного типа – вместо момента – линейная связь между моментом и углом поворота и вместо перерезывающей силы – сила и прогиб. Связи эти двоякого рода: упругие и вязкоупругие, причем для последних два случая изучаются.

Показано, что статический и динамический подходы при упругих связях дают для критической силы одинаковые значения. В рассмотренных задачах длительная критическая сила (статическая постановка) больше, чем мгновенная. При динамическом рассмотрении внешние вязкоупругие связи играют дестабилизирующую роль и получаемая критическая сила меньше, чем при отсутствии вязкости.

1. Если решение уравнения балки

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^4}+\frac{Pl^2}{EJ}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\rho F l^2}{EJ}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (1.1)$$

искать в виде $(0\le x\le 1)$

$$w=X(x)\,e^{i\omega t} \qquad (1.2)$$

то для $X(x)$ получим обыкновенное уравнение

$$X^{IV}+2\lambda X''-\Omega^4 X=0 \qquad (1.3)$$

здесь $$2\lambda = \frac{Pl^2}{EJ}\ , \quad \Omega^4 = \frac{\rho F l^4}{EJ}\omega^2 \tag{1.4}$$

Обозначения – общепринятые и нет надобности разъяснения.

Конец балки $x = 0$ жестко заделан –

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \Rightarrow \quad X(0) = X'(0) = 0 \tag{1.5}$$

На конце $x = 1$ заданы два типа комбинированных условий

а)

$$Q = \frac{EJ}{l^3}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \Rightarrow \ X'''(1) = 0$$

$$M + \tilde{A}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{EJ}{l^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\tilde{A}}{l}\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$X''(1) + \tilde{\alpha}X'(1) = 0\ , \quad \tilde{\alpha} = \frac{l\tilde{A}}{EJ} \tag{1.6}$$

б)

$$M = 0\ , \ X''(1) = 0$$

$$Q - \tilde{A}w = 0 \quad \Rightarrow X'''(1) - \tilde{\beta}X(1) = 0$$

$$\tilde{\beta} = \frac{l^3\tilde{A}}{EJ} \tag{1.7}$$

Для коэффициента пропорциональности $\tilde{A}$ будут рассмотрены три случая.

1. $\tilde{A}$ – скалярная величина - $\tilde{A}u = Au$ и

$$\tilde{\alpha} = \frac{lA}{EJ} = \alpha = \text{const} \tag{1.8}$$

2. $\tilde{A}$ – вязкоупругий оператор по Фохту -

$$\tilde{A}u = A\left(1 + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)u\ , \ \ \tilde{\alpha} = \alpha\left(1 + i\delta\Omega^2\right)$$

$$\delta = \varepsilon\frac{1}{l^2}\left(\frac{EJ}{\rho F}\right)^{1/2} \tag{1.9}$$

3. $\tilde{A}$ – среда типа Кельвина-Максвелла –

$$\tilde{A}u = A\left[u - \frac{A_1}{n}\int_{-\infty}^{t}\varepsilon^{-\frac{1}{n}}\cdot u(\tau)d\tau\right]$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha\left[1 - \frac{A_1}{1+\gamma^2\Omega^4} + i\frac{A_1\gamma\Omega^2}{1+\gamma^2\Omega^4}\right]$$

$$\gamma = \frac{n}{l^2}\left(\frac{EJ}{\rho F}\right)^{1/2} \tag{1.10}$$

Для второй задачи в формулах (1.9)-(1.10) α должны быть заменены на β

$$\beta = \frac{l^3 A}{EJ}$$

2.Сначала задачи рассмотрим в статической постановке. Тогда потребуя, чтобы решение уравнения устойчивости

$$w = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + C_3 x + C_4 \qquad (2.1)$$

удовлетворяло условиям (1-5)-(1-7), для первой задачи получим

$$k + \tilde{\alpha} \sin k = 0 \quad , \quad k^2 = 2\lambda = \frac{Pl^2}{EJ} \qquad (2.2)$$

и для второй задачи, соответственно,

$$k^3 = \tilde{\beta}\left(k \cos k - \sin k\right) \qquad (2.3)$$

Сначала изучим случай, когда $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ постоянные. Уравнения (2.2) и (2.3) имеют корни как для положительных, так и для отрицательных α и β. Однако в обоих случаях будем принимать положительные значения, что соответствует тому, что при изгибе консольной балки, если вместо условий $M = Q = 0$ заданы условия типа (1.6) или (1.7), то прогиб на конце должен быть меньше, чем при свободном конце.

Уравнение (2.2) при $\alpha \to \infty$ имеет корень [1]

$$k = \pi, \; P_{\text{кр}} = \frac{EJ\pi^2}{l^2} \qquad (2.4)$$

Анализ уравнения (2.2) показывает, что для каждого α имеются два корня. Например, для $\alpha = \dfrac{11\pi}{3}$ корни эти следующие: $k_1 = 3.445$ и $k_2 = 5.759$. Предельной α, при котором (2.2) имеет действительный корень

$$\alpha = \frac{3\pi}{2}, \qquad k = \frac{3\pi}{2}, \qquad P_{\text{кр}} = \frac{9EJ\pi^2}{4l^2} \qquad (2.5)$$

И что еще важно, в интервале изменения α чем больше α, тем меньше соответствующий корень. Такой факт интересен для вязкоупругой связи.

Случай (1.9) ничего нового не дает в смысле значения критической силы в отличие от вышеприведенных. А вот при (1.10) вместо уравнения (2.2) получим

$$kc(t) + \alpha\left[c(t) - \frac{A_1}{n}\int_0^t e^{-\frac{1}{n}(t-\tau)} c(\tau)d\tau\right] = 0 \qquad (2.6)$$

которое для $c(t)$ дает (при $t = 0 \quad c = c_0$)

$$c = c_0 \; \exp\left\{-\frac{k + \alpha(1 - A_1) \sin k}{n(k + \alpha \sin k)}\right\} t \qquad (2.7)$$

откуда для длительной критической силы

$$k + \alpha\left(1 - A_1\right)\sin k = 0 \qquad (2.8)$$

Но, так как $\alpha\left(1 - A_1\right) < \alpha$, то согласно вышеприведенному факту относительно зависимости k от α, выходит, что длительная критическая нагрузка больше, чем мгновенная. В общем-то, интересный факт, обнаруженный еще и в [6] для другой задачи.

Относительно уравнения (2.3) можно сказать почти все, что и для первой задачи. При $\alpha \to \infty$ корень уравнения [1]

$$k = 4,493 \ ; \quad P_{\text{кр}} = 20.187 \frac{EJ}{l^2} \tag{2.9}$$

Здесь также имеется предельный α, при котором имеется действительный корень

$$\alpha = 4\pi^2 \ , \quad k = 2\pi, \quad P_{\text{кр}} = \frac{4EJ\pi^2}{l^2} \tag{2.10}$$

и с увеличением α корень уменьшается. Следовательно, и здесь длительная критическая сила больше, чем мгновенная.

3. Решение уравнения (1.3) есть

$$X(x) = C_1 \operatorname{ch} p_1 x + C_2 \operatorname{sh} p_1 x + C_3 \cos p_2 x + C_4 \sin p_2 x \tag{3.1}$$

$$p_1 = \left(\sqrt{\lambda^2 + \Omega^4} - \lambda\right)^{1/2} \ , \quad p_2 = \left(\sqrt{\lambda^2 + \Omega^4} + \lambda\right)^{1/2}$$

После удовлетворения условиям (1.4) и (1.5) для определения критических сил для первой задачи получим уравнение

$$p_1^4 + p_2^4 + p_1 p_2 \left(p_2^4 - p_1^2\right)\left(1 + \operatorname{sh} p_1 \sin p_2\right) + 2 p_1^2 p_2^2 \operatorname{ch} p_1 \cos p_2 +$$

$$+\tilde{\alpha}\left(p_1^2 + p_2^2\right)\left(p_1 \operatorname{sh} p_1 \cos p_2 + p_2 \operatorname{ch} p_1 \sin p_2\right) = 0 \tag{3.2}$$

отсюда при $\Omega = 0$ получается (2.2), а при $\lambda = \alpha = 0$–уравнение для определения собственных частот консольной балки [8]

$$\operatorname{ch}\rho \cos p + 1 = 0 \ , \quad p_1 = p_2 = p$$

Для второй задачи аналогичное уравнение будет

$$p_2\left(p_2^4 + p_1^4\right) + 2 p_1^2 p_2^3 \operatorname{ch} p_1 \cos p_2 + p_1 p_2^2\, p\left(p_2^2 - p_1^2\right)\operatorname{sh} p_1 \sin p_2 +$$

$$+\tilde{\alpha}\left(p_1^2 + p_2^2\right)\left(\operatorname{ch} p_1 \sin p_2 - \frac{p_2}{p_1}\operatorname{sh} p_1 \cos p_2\right) = 0 \tag{3.3}$$

4. Корни уравнений (3.2) и (3.3) определялись численно. Задавались значения для λ и определялись Ω. Так как нас интересовал качественный вывод, а не точное значение критической силы, шаги для λ принимались 0.5.

В качестве критерия потери устойчивости при упругих связях принимаются такие λ, при которых частоты Ω становятся нулями. Для вязкоупругих случаев $\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$ и в качестве критерия неустойчивости - $\Omega_2 \le 0$.

В табл. 1 и 2 приведены некоторые результаты вычислений. Табл. 1 соответствует уравнению (3.2) (первые задачи), а табл. 2 – (3.2).

В первых столбцах для проверки программы приведены случаи упругих связей, хотя, как уже отметили из (3.2) и (3.3) при $\Omega = 0$ получаются (2.2) и (2.3). Вторые и третьи столбцы – для связей (1.9), а последний столбец – (1.10) .

В каждой клетке первые числа соответствуют Ω_1, а вторые $10^5 \cdot \Omega_2$. В каждой клетке есть две строки. Для табл. 1 в первых строках помещены Ω_1 и Ω_2 при $\alpha = 10$, а во вторых – при $\alpha = 4.712$, которым соответствуют критические λ в упругой постановке $\lambda_{\text{кр}} = 6.125$ и $\lambda_{\text{кр}} = 11.103$. То же самое относится и к табл. 2. В первых строках приведены Ω для $\beta = 105{,}646$, а во вторых $\beta = 36.167$ с соответствующими $\lambda_{кр} = 11.103$ и $\lambda_{кр} = 15.113$..

Для материала (1.10) в качестве A_1 бралось $A_1 = 0{,}5$, что соответствует тому, что длительный коэффициент жесткости пружины равен половине мгновенного коэффициента.

Как видно из приведенных таблиц при вязкоупругих связях балка теряет устойчивость задолго до значения статических критических сил. т.е. внешнее трение приводит к дестабилизации общей системы, как и в [5]. Таким образом, и в этих задачах существуют зоны квазиустойчивости [5]. Надо отметить, что изменение знака Ω_2 с положительного на отрицательный, как видно из таблиц, так и изменяющихся данных для $\delta = 0.05$,0.1, мало зависит от значений δ .

5.Выводы.

1. В расмотренных задачах статический и динамический подходы для критических сил дают одинаковые результаты при упругих связях.
2. В статической постановке при вязкоупругих связях длительные критические силы больше, чем мгновенные.
3. В динамической постановке при вязкоупругих связях критическая сила меньше, чем упругая критическая сила, т.е. имеется дестабилизация и существование зоны квазиустойчивости.

Таблица 1

((	0	0,001	0,01	$\gamma = 100$
0	2.291 2.231	2.291; 32.4 2.231: 40	2.291; 327.1 2.231; 470	2.291; 1 2.231; 8.414
0,5	2.245 2.197	2.245; 25 2.197; 36	2.243 ; 250 2.198 ; 360	2.245 ; 1 2.198 ; 7.558
1	2.196 2.163	2.196 ; 16.5 2.163 ; 24	2.196 ; 160 2.163 ; 240	2.196 ; 1 2.163 ; 5.332
1.5	2.144; 2.128	2.144 ; 0.755 2.128 ; 11	2.144 ; 79.5 2.128 ; 110	2.144 ; 1 2.128 ; 2.363
2	2.089 2.092	2.089 ; –1 2.093 ; 10	2.089 ; –17.5 2.092 ; – 20	2.089 ; – 0.1 2.092 ; – 0.977
2.5	2.028 2.054	2.028 ; –12 2.054 ; –16	2.028 ; –120 2.054 ; –167	2.028 ; –1 2.054 ; –4.685

Таблица 2

((	0	0,001	0,01	$\gamma = 100$
0	3.644 3237	3.648 355 3.237: 500	3.648; 5311 3.239; 5050	3.644; 1 3.234; 29
1	3.570 3.187	3.570; 311 3.189; 466	3.573 ; 3111 3.131 ; 4670	3.570 ; 1 3.189 ; 25

2	3.491 3.145	3.490 ; 268 3.145 ; 410	3.493 ; 2658 3.147 ; 4180	3.491 ; 1 3.145 ; 21
3	3.405; 3.104	3.405 ; 218 3.104 ; 350	3.407 ; 2168 3.106 ; 3500	3.405 ; 1 3.104 ; 19
4	3.3.10 3.066	3.310 ; 166 3.066 ; 280	3.312 ; 1653 3.067 ; 2880	3.310 ; 1 3.066 ; 16
5	3.203 3.025	3.203 ; 113 3.025 ; 207	3.204 ; 1122 3.206 ; 2070	3.203 ; 1 3.025 ; 12
6	3.079 2.978	3.079 ; 58,6 2.978 ; 114	3.079 ; 584 2.979 ; 1130	3.071 ; 1 2.970 ; 1
7	2.929 2.921	2.929 ; 1 2.921; +7	2.929 ; 43 2.921 ; +80	2.929 ; 1 2.920 ; +1
7.5	2.842 2.888	2.842 ; -23 2.888 ; -40	2.842 ; -230 2.888 ; -500	2.942 ; -1 2.888 ; -1

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 879 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М: Наука, 1987. 352с.
4. Феодосьев В.И. Об одной задаче устойчивости. // ПММ. 1965. N2. С.391-393.
5. Пановко Я.Г., Сорокин С.В. О квазиустойчивости упруговязких систем со следящими силами. // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. N5. С. 135-140.
6. Белубекян М.В., Мовсисян Л.А. К задаче устойчивости консольного стержня сжатого следящей силой. // Тр. Межд. конф., Математика. модел. мех. сплошной среды''. Санкт–Петербург. Т.2. С.95-98.
7. Мовсисян Л.А. К упругой и вязкоупругой устойчивости составного стержня. // Изв. АН Армении. Механика. 1991. Т. 44. N 4. С. 3-12.
8. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 733 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
19.08.2005