

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ БАЛКИ С ДВУМЯ ПРОИЗВОЛЬНО, НО
СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ОПОРАМИ
ПРИ ДЕЙСТВИИ СЛЕДЯЩЕЙ НАГРУЗКИ

Гнуни В.Ц.

Վ.Ց. Գնունի

Երկու կամայական, բայց համաչափ դասավորված հենարաններով
հեծանի կայունությանը հետևող բեռի ազդեցության դեպքում

Ուսումնասիրված է սեղմվող հեծանի կայունության ոչ կոնսերվատիվ խնդիրը, երբ հեծանի երկու հենարանները տեղադրված են համաչափ ծայրերից կամայական հեռավորությունների վրա: Սեղմող բեռը համարվում է հետևող: Ստացվել է խնդրի կրիտիկական պարամետրերը որոշող հավասարումը և ցույց տրվել կայունության կորստի ստատիկական ձևերի հնարավորությունը: Որոշել են բեռի կրիտիկական արժեքները:

V.Ts. Gnuni

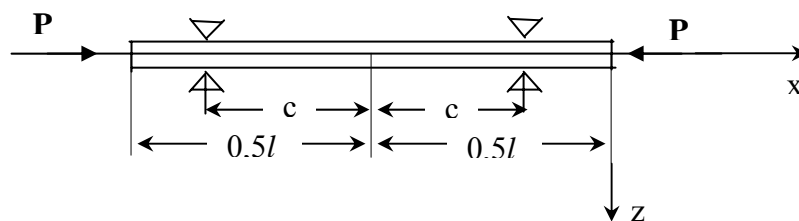
The stability of beam with two billeting arbitrarily, but symmetrical support under action of follow loading

The unconservative stability problem of pressing beam when two support billeting symmetrical on arbitrarily distance from the end is considered. It is show the possibility statical form loss of stability. The critical loads are determined.

Исследована неконсервативная задача устойчивости свободно опертой сжатой балки, когда две опоры расположены симметрично на произвольных от концов балки расстояниях. Считается, что сжимающая нагрузка следящая. Получено частотное уравнение, определяющее критические параметры задачи. Показывается возможность дивергентной (статической) формы потери устойчивости. Определены критические нагрузки.

Известно, что при применении статического подхода (метода Эйлера) получается, что консольная балка, сжатая следящей силой (балка Бекка), всегда устойчива [1,2]. Однако, есть примеры задач устойчивости балки со следящей силой, когда возможна статическая форма потери устойчивости [3,4]. Обзор неконсервативных задач устойчивости балки приводится в [5,6].

1. Пусть упругая балка длины l сжата следящей силой P и опирается на две опоры, расположенные на расстоянии c от середины балки (фиг.1).



Фиг.1

Уравнение колебаний балки представляется в виде [1]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^4} + \frac{Pl^2}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} + \frac{PSl^4}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

где $w(\bar{x}, t)$ – прогиб, $\bar{x} \in [-(0,5 + \alpha); (0,5 - \alpha)]$, $\bar{x} = x/l$ – безразмерная координата по длине балки, $\alpha = c/l \in [0; 0,5]$, $t \geq 0$ – время, E – модуль упругости, ρ – плотность материала, I – момент инерции, S – площадь поперечного сечения балки.

Функция $w(\bar{x}, t)$ ищется в виде

$$w(\bar{x}, t) = \begin{cases} f_3(\bar{x})e^{i\omega t}, & \text{если } \bar{x} \in [-(0,5 + \alpha); -2\alpha] \\ f_1(\bar{x})e^{i\omega t}, & \text{если } \bar{x} \in (-2\alpha; 0) \\ f_2(\bar{x})e^{i\omega t}, & \text{если } \bar{x} \in (0; (0,5 - \alpha)] \end{cases} \quad (1.2)$$

где ω – искомая частота собственных колебаний нагруженной силой P балки.

Подстановкой (1.2) в (1.1), для определения искомого $f_i(\bar{x})$ получается

$$f_i^{IV} + \bar{P}f_i'' - \bar{\omega}^2 f_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.3)$$

где

$$\bar{P} = \frac{Pl^2}{EI}, \quad \bar{\omega} = \sqrt{\frac{PS}{EI}} l^2 \omega \quad (1.4)$$

– соответствующие приведенные значения сжимающей силы и частот собственных колебаний.

На концах балки имеются граничные условия свободного края.

$$f_3''(\bar{x}) = 0, \quad f_3'''(\bar{x}) = 0 \quad \text{при } \bar{x} = -(0,5 + \alpha) \quad (1.5)$$

$$f_2''(\bar{x}) = 0, \quad f_2'''(\bar{x}) = 0 \quad \text{при } \bar{x} = 0,5 - \alpha \quad (1.6)$$

На опорах $\bar{x} = -2\alpha$, $\bar{x} = 0$ должны удовлетворяться условия совместности решений

$$f_3 = f_2 = 0, \quad f_3' = f_2', \quad f_3'' = f_2'' \quad \text{при } \bar{x} = -2\alpha \quad (1.7)$$

$$f_2 = f_1 = 0, \quad f_2' = f_1', \quad f_2'' = f_1'' \quad \text{при } \bar{x} = 0 \quad (1.8)$$

Если разделить колебания балки на симметричные и антисимметричные, то можно рассматривать лишь половину балки. Тогда в середине балки должны быть удовлетворены условия симметрии

$$f_1'(\bar{x}) = 0, \quad f_1'''(\bar{x}) = 0, \quad \text{при} \quad \bar{x} = -\alpha \quad (1.9)$$

при этом $f_3(x) = f_2(x)$, или условия антисимметрии

$$f_1(\bar{x}) = 0, \quad f_1'' = 0 \quad (1.10)$$

при этом $f_3(\bar{x}) = -f_2(\bar{x})$.

2. В случае симметричных колебаний в (1.3) $i = 1$ и $i = 2$ при граничных условиях (1.1) и условиях совместности (1.8).

Решения (1.3) при $i = 1, 2$ представляются в виде

$$f_i(\bar{x}) = u_i \operatorname{ch} \gamma_i \bar{x} + b_i \operatorname{sh} \gamma_i \bar{x} + c_i \cos \gamma_2 \bar{x} + d_i \sin \gamma_2 \bar{x} \quad (i = 1, 2) \quad (2.1)$$

где

$$\gamma_1 = \left[\left(0,25\bar{P}^2 + \bar{\omega}^2 \right)^{0,5} - 0,5\bar{P} \right]^{0,5}, \quad \gamma_2 = \left[\left(0,25\bar{P}^2 + \bar{\omega}^2 \right)^{0,5} + 0,5\bar{P} \right]^{0,5} \quad (2.2)$$

Для определения восьми постоянных a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 1, 2$) из восьми условий (1.6), (1.8), (1.9) получается однородная система алгебраических уравнений

$$a_1 + c_1 = 0, \quad a_2 + c_2 = 0, \quad a_1 - a_2 = 0$$

$$\gamma_1 b_1 + \gamma_2 d_1 = \gamma_1 b_2 + \gamma_2 d_2$$

$$a_1 \gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_1 \alpha - b_1 \gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_1 \alpha - c_1 \gamma_2 \sin \gamma_2 \alpha - d_1 \gamma_2 \cos \gamma_2 \alpha = 0$$

$$a_1 \gamma_1^3 \operatorname{sh} \gamma_1 \alpha - b_1 \gamma_1^3 \operatorname{ch} \gamma_1 \alpha + c_1 \gamma_2^3 \sin \gamma_2 \alpha + d_1 \gamma_2^3 \cos \gamma_2 \alpha = 0 \quad (2.3)$$

$$a_2 \gamma_1^2 \operatorname{ch} \gamma_1 (0,5 - \alpha) + b_2 \gamma_1^2 \operatorname{sh} \gamma_1 (0,5 - \alpha) - c_2 \gamma_2^2 \cos \gamma_2 (0,5 - \alpha) - d_2 \gamma_2^2 \sin \gamma_2 (0,5 - \alpha) = 0$$

$$a_2 \gamma_1^3 \operatorname{sh} \gamma_1 (0,5 - \alpha) + b_2 \gamma_1^3 \operatorname{ch} \gamma_1 (0,5 - \alpha) + c_2 \gamma_2^3 \sin \gamma_2 (0,5 - \alpha) - d_2 \gamma_2^3 \cos \gamma_2 (0,5 - \alpha) = 0$$

Из условия существования ненулевого решения системы (2.3) получается следующее уравнение для определения $\bar{\omega}$ при заданных значениях \bar{P} и α :

$$\gamma_1 \operatorname{th} \gamma_1 \alpha + \gamma_2 \operatorname{tg} \gamma_2 \alpha = \quad (2.4)$$

$$= \frac{(\gamma_1^4 + \gamma_2^4) + 2\gamma_1^2 \gamma_2^2 \operatorname{ch} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \cos \gamma_2 (0,5 - \alpha) - \gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) \operatorname{sh} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \sin \gamma_2 (0,5 - \alpha)}{\gamma_1 \gamma_2 [\gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \sin \gamma_2 (0,5 - \alpha) - \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \cos \gamma_2 (0,5 - \alpha)]}$$

Семь искомых постоянных выражаются через постоянную a_1 следующим образом:

$$a_2 = a_1, \quad c_1 = -a_1, \quad c_2 = -a_1, \quad (2.5)$$

$$b_1 = a_1 \operatorname{th} \gamma_1 \alpha, \quad d_1 = a_1 \operatorname{tg} \gamma_2 \alpha$$

$$b_2 = \frac{\gamma_1^2 \left[\gamma_2 \operatorname{ch} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \cos \gamma_2 (0,5 - \alpha) - \gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \sin \gamma_2 (0,5 - \alpha) \right] + \gamma_2^3}{\gamma_1^2 \left[\gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \sin \gamma_2 (0,5 - \alpha) - \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \cos \gamma_2 (0,5 - \alpha) \right]} a_1$$

$$d_2 = \frac{\gamma_2^2 \left[\gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \cos \gamma_2 (0,5 - \alpha) + \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \sin \gamma_2 (0,5 - \alpha) \right] + \gamma_1^3}{\gamma_2^2 \left[\gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \sin \gamma_2 (0,5 - \alpha) + \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_1 (0,5 - \alpha) \cos \gamma_2 (0,5 - \alpha) \right]} a_1$$

Ниже рассматриваются частные случаи трансцендентного уравнения (2.4).

Пусть $\alpha = 0,5$, что соответствует случаю, когда опоры расположены на концах балки $\bar{x} = -1$, $\bar{x} = 0$, (шарнирно опертая балка длины l). В этом случае из (2.4) получается

$$\operatorname{tg} 0,5 \gamma_2 = \infty \Rightarrow \gamma_2 = (2k + 1)\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

откуда с учетом второй формулы (2.2) получается

$$\bar{\omega}_{2k+1} = \bar{\omega}_{2k+1}^0 \sqrt{1 - \frac{\bar{P}}{\bar{P}_{2k+1}^*}}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.6)$$

где $\bar{\omega}_{2k+1}^0$ и \bar{P}_{2k+1}^* – приведенные значения (см. обозначения (1.4)) частот симметричных собственных колебаний и нечетных собственных значений задачи статической устойчивости

$$\bar{P}_{2k+1}^* = (2k + 1)\pi^2 \Rightarrow \bar{P}_1^* = \pi^2 \quad (2.7)$$

При $\alpha = 0$, что соответствует случаю консольной балки длины $0,5l$, заделанной в конце $\bar{x} = 0,5$ и свободной в конце $\bar{x} = 0$. В этом случае уравнение (2.4) представляется в виде

$$\gamma_1^4 + \gamma_2^4 + 2\gamma_1^2 \gamma_2^2 \operatorname{ch} 0,5 \gamma_1 \cos 0,5 \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) \operatorname{sh} 0,5 \gamma_1 \sin 0,5 \gamma_2 = 0 \quad (2.8)$$

Уравнение хорошо исследовано многими авторами [1,2,7] в классической задаче устойчивости консольной балки под действием следящей силы.

При $\bar{\omega} = 0$ получается задача статической устойчивости под действием следящей сжимающей силы, когда опоры расположены на расстоянии $c = \alpha l$ от середины стержня. В этом случае

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \sqrt{\bar{P}}$$

и из уравнения (2.4) получается

$$\operatorname{tg}\sqrt{P} \alpha = \infty$$

откуда первый (наименьший) корень

$$\bar{P}_{\text{кр}} = \frac{\pi^2}{4\alpha^2}, \quad P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{4c^2} \quad (2.9)$$

происходит потеря устойчивости между опорами. При $\alpha = 0,5$ ($c = 0,5l$ – случай шарнирного опирания концов балки), откуда для приведенного значения критической силы получается $\bar{P} = \pi^2$, $P = \pi^2 EI / l^2$, а при $\alpha = 0$ (случай консольной балки длиной $0,5l$) $\bar{P}_{\text{кр}} = \infty$, что соответствует известному факту [1], что при следящей силе P в статической постановке потеря устойчивости не наблюдается.

При $\bar{P} = 0$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \sqrt{\bar{\omega}}$$

и уравнение (2.4) представляется в виде

$$\begin{aligned} & \operatorname{th}\sqrt{\bar{\omega}}\alpha + \operatorname{tg}\sqrt{\bar{\omega}} \alpha = \\ & = \frac{2 + 2\operatorname{ch}\sqrt{\bar{\omega}}(0,5 - \alpha) \cos\sqrt{\bar{\omega}}(0,5 - \alpha)}{\operatorname{ch}\sqrt{\bar{\omega}}(0,5 - \alpha) \sin\sqrt{\bar{\omega}}(0,5 - \alpha) - \operatorname{sh}\sqrt{\bar{\omega}}(0,5 - \alpha) \cos\sqrt{\bar{\omega}}(0,5 - \alpha)} \quad (2.10) \end{aligned}$$

Этот случай рассмотрен в [8]. В табл. 1 приводятся результаты расчетов приведенного значения первой (наименьшей) частоты при некоторых значениях α .

Таблица 1

α	0	0,1	0,2	0,259	0,3	0,4	0,5
$\bar{\omega}_1$	14,06	15,46	19,59	22,89	21,93	15,22	π^2

В табл. 1 случай $\alpha^* = 0,259$ соответствует оптимальному варианту расположения опор, при котором

$$\bar{\omega}_1^* = \max_{\alpha} \bar{\omega}_1(\alpha) = 22,89$$

При $\alpha = 0$ из (2.10) получается

$$\operatorname{ch} 0,5\sqrt{\bar{\omega}} \cos 0,5\sqrt{\bar{\omega}} = -1 \quad (2.11)$$

что соответствует известному случаю [9] собственных колебаний консольной балки длиной $0,5l$

При $\alpha = 0,5$ из (2.10) получается

$$\operatorname{tg} 0,5\sqrt{\bar{\omega}} = \infty$$

откуда для приведенных значений частот собственных симметричных колебаний шарнирно опертой по концам балки получается

$$\bar{\omega} = (2k + 1)^2 \pi^2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad \omega = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} (2k + 1)^2 \frac{\pi^2}{l^2} \text{ я}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Госиздат ф.-м. лит., 1961. 340 с
2. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. (Современные концепции, парадоксы и ошибки.) М.: Наука. 1987. 352 с
3. Lee G.E., Reissner E. Note on a Problem of Beam Buckling. 1975, Z. Angew. Math. Phys., 26, p.839-841.
4. Neer A., Baruch M. Note on Static and Dynamic Instability of a Nonuniform Beam. 1977, Z. Angew. Math. Phys. 28, p. 735-740
5. Langthjem M.A., Sugiyama Y. Dinamic Stability of Columns Subjected to Follower Loads. A.Survey 2000. Journal of Sound and Vibration 238 (5), p.809-851
6. Elishakoff I. Controversy Associated with the So-Called (Follower Forces): Critical Over view 2005. Transactions of the ASME, Applied Mechanics Reviews. vol.58, March., p. 117-142
7. Beck M. Die Knicklast der einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes. Zeitschr. angew. Math. Phys. 1952, 3, N3
8. Гнуни В.Ц. Оптимальный выбор расположения опор в задачах изгиба, колебаний и устойчивости упругой балки. // В сб.: „Вопросы оптимального управления устойчивости и прочности механических систем” Ереван, Изд. ЕГУ, С. 110-119
9. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах. Колебания линейных систем. Т.1 (под ред. В.В.Болотина). М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
и12.10.200