ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 59, №1, 2006 Механика

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ ПРИ ИЗГИБЕ ПЛАСТИНКИ СИЛАМИ, ПРИЛОЖЕННЫМИ НА СВОБОДНОМ КРАЮ

Багдасарян З.Р., Белубекян М.В.

Զ.Ռ. Բաղդասարյան, Մ.Վ. Բելուբեկյան
Ընդլայնական սահքերի ազդեցությունը, ազատ եզրում կիրառված ուժերով ծռվող սալի խնդրում

Ս.Ա.Համբարձումյանի ճշգրտված տեսության հիման վրա, ներկայացվող աշխատանքում դիտառկված են կիսաանվերջ սալ-շերտի ծռման խնդիրներ, երբ բեռը կիրառված է սալի ազատ եզրում:

Ցույց է տրված, որ դիտարկվող խնդիրներում Կիրխհոֆի հիպոթեզի ճշտությունը սալի հարաբերական հաստության առհամարհումն է մեկի նկատմամբ, ի տարբերություն ընդունված ճշտության, համաձայն որի մեկի նկատմամբ առհամարհվում է սալի հարաբերական հաստության քառակուսին:

Կատարված է նաև թվային հաշվարկ և ցույց է տրված, որ սալի ճկվածքի փոփոխությունը՝ կախված նրա հարաբերական հաստությունից, էապես է կախված ընդլայնական սահքերի հաշվառումից:

Z.R. Baghdasaryan, M.V. Belubekyan
Influence of transversal shear at a bend of a plate with the forces enclosed at free edge

In present article problems of a bend of a plate when loading is enclosed at free edge are considered.
It is shown, that in this case accuracy of hypothesis Kirghoff is neglect relative thickness in comparison with unit, as against the accepted accuracy of a square of relative thickness in comparison with unit.
The resulted numerical values of change of a deflection of a plate depending on relative thickness show essential influence of the account of cross-section shifts

Согласно теории пластин Кирхгофа на каждом краю прямоугольной пластинки должны быть заданы два граничных условия. Однако из допущений гипотезы Кирхгофа, в общем случае, для каждого края получаются три граничных условия. Во многих случаях одно из граничных условий удовлетворяется тождественно. При других случаях, например, для свободного края, три условия заменяются альтернативными (приближенными) двумя условиями. В этих случаях теории, учитывающие поперечные сдвиги, позволяют удовлетворить трем граничным условиям точно.

В настоящей статье, на основе уточненной теории С. А. Амбарцумяна [1], рассматриваются задачи изгиба пластины, когда нагрузка приложена на свободном краю. Показывается, что в этом случае точность гипотезы Кирхгофа есть пренебрежение относительной толщиной по сравнению с единицей, в отличие от принятой точности квадрата относительной толщины по сравнению с единицей.

Приведенные численные значения изменения прогиба пластинки в зависимости от относительной толщины показывают существенное влияние учета поперечных сдвигов.

1. Полубесконечная пластинка-полоса постоянной толщины $2h$ занимает область $0 \le x < \infty$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Уравнения равновесия пластинки по теории С. А. Амбарцумяна при отсутствиии поперечной нагрузки имеют вид [1, 2]

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0$$

$$-D\frac{\partial}{\partial x}\Delta W+\frac{8h^3}{15}\left[\Delta\varphi_1+\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)\right]-\frac{4h}{3}\varphi_1=0 \qquad (1.1)$$

$$-D\frac{\partial}{\partial y}\Delta W+\frac{8h^3}{15}\left[\Delta\varphi_2+\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)\right]-\frac{4h}{3}\varphi_2=0$$

где W – функция прогиба, φ_1 и φ_2 определяют перерезывающие усилия (или углы поворота)

$$D=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\ ,\ \theta=\frac{1+\nu}{1-\nu}$$

E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Предполагается, что края пластинки $y=0$, b шарнирно закреплены, свободный край $x=0$ пластинки загружен либо изгибающим моментом, либо крутящим моментом, либо перерезывающей силой. Требуется, чтобы выполнялись условия затухания

$$\lim_{x\to\infty}W(x,y)=0,\ \ \lim_{x\to\infty}\varphi_1(x,y)=0,\ \ \lim_{x\to\infty}\varphi_2(x,y)=0 \qquad (1.2)$$

Аналогичная задача для полубесконечной пластинки (неограниченной по координате y) рассматривалась в [1,3]. В [4] приводится частное решение указанной задачи.

Решение системы уравнений (1.1), удовлетворяющих граничным условиям шарнирного закрепления и условиям затухания (1.2), имеет вид

$$W=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{-\lambda_n x}+B_n x e^{-\lambda_n x}\right)\sin\lambda_n y$$

$$\varphi_1=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3D}{2h}\lambda_n^2 B_n e^{-\lambda_n x}+C_n e^{-\lambda_n\mu_n x}\right)\sin\lambda_n y \qquad (1.3)$$

$$\varphi_2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3D}{2h}\lambda_n^2 B_n e^{-\lambda_n x}-\mu_n C_n e^{-\lambda_n\mu_n x}\right)\cos\lambda_n y$$

где

$$\lambda_n=\frac{\pi n}{b},\ \mu_n=\frac{\sqrt{1+\xi_n^2}}{\xi_n},\ \xi_n=\sqrt{\frac{2}{5}}\lambda_n h \qquad (1.4)$$

2. Пусть свободный край x=0 пластинки загружен изгибающим моментом [1,3]

$$M_1=M_1(y),\ H=0,\ N_1=0 \qquad (2.1)$$

Условия (2.1) в обозначениях статьи [2] имеют вид

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-\frac{4}{5G}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\nu\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)=-\frac{M_1(y)}{D} \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}-\frac{2}{5G}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=0$$

$\varphi_1=0$

где G–модуль сдвига.

После представления $M_1(y)$ в виде ряда Фурье

$$M_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \lambda_n y \tag{2.3}$$

и подстановки, вместе с (1.3), в граничные условия (2.1), получается система уравнений относительно произвольных постоянных A_n, B_n и C_n.

После определения произвольных постоянных, окончательное решение задачи приводится к виду

$$W(x,y) = -\frac{1}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\eta_n \lambda_n^2}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu} - \lambda_n x\right)e^{-\lambda_n x}\sin \lambda_n y$$

$$\varphi_1(x,y) = -\frac{3}{2h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n \lambda_n}{\eta_n}\left(e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_n \mu_n x}\right)\sin \lambda_n y \tag{2.4}$$

$$\varphi_2(x,y) = \frac{3}{2h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n \lambda_n}{\eta_n}\left(e^{-\lambda_n x} - \mu_n e^{-\lambda_n \mu_n x}\right)\cos \lambda_n y$$

где

$$\eta_n = 3 + \nu - 4\xi_n \sqrt{1+\xi_n^2} + 4\xi_n^2 \tag{2.5}$$

Выражение для прогиба W из (2.4) совпадает с решением по теории пластин Кирхгофа, если принять $\xi_n << 1$. Т.е. для рассматриваемой задачи точность гипотезы Кирхгофа есть относительная толщина, а не квадрат относительной толщины, как принято считать.

Для сравнения рассматривается частный случай задания изгибающего момента (2.3)

$$M_1(y) = a_1 \sin \lambda_1 y \tag{2.6}$$

Тогда отношение прогиба с учетом сдвигов (W_s) к прогибу, определенному по теории Кирхгофа (W_k), задается формулой

$$\frac{W_s}{W_k} \approx \left(1 - \frac{4}{3+\nu}\,\xi_1\sqrt{1-\xi_1+\xi_1^2}\right)^{-1} \tag{2.7}$$

Из (2.7) получается также следующая формула в приближении $\xi_1^2 << 1$:

$$\frac{W_s}{W_k} \approx \left(1 - \frac{4}{3+\nu}\,\xi_1\sqrt{1-\xi_1}\right)^{-1} \tag{2.8}$$

В табл. 1 приводятся значения отношений прогибов, вычисленных по формулам (2.7) и (2.8) при значении коэффициента Пуассона $\nu = 0{,}2$ для различных значений параметра ξ_1.

Таблица 1

ξ_1 / W_s / W_k	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
(2.7)	1.0125	1.0025	1.1275	1.2579	1.3870	1.5117

(2.8)	1.0127	1.0667	1.1429	1.3333	1.6	2.0

33331.62.0Следует отметить, что $\xi_1 = 0{,}01$ значению соответствует относительная толщина $2h/b \approx 0{,}01$ пластинки , а $\xi_1 = 0{,}1$ зна $\xi_1 = 0{,}4$ чениям и , соотв $2h/b \approx 0{,}078$ етс $2h/b \approx 0{,}33$ т

венно, и .Из табл. 1 видно, что, начиная со значения относительно $2h/b = 0{,}1$ й толщины , влияние поперечных сдвигов существенно. Необходимо также отметить, что в приведенном примере коэффициент Пуассона слабо влияет на полученные численные р

езультаты.Решение вида (2.4) дл W я прогиба получается также при использовании уточненной теории первого порядка типа Рейснера [5,6], с той лишь разницей, что ξ_n параметр из (1.4) необходимо з

а $$\xi_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_n h$$ менить

на (2.9)Перерезывающие усилия, согласно [1], определяются следующи

м $$N_1 = \frac{4h}{3}\varphi_1,\ N_2 = \frac{4h}{3}\varphi_2$$ образ

ом: (2.10)В частности, из (2.4) и (2.10)

$$N_2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\lambda_n}{\eta_n}\left(e^{-\lambda_n x} - \mu_n e^{-\lambda_n\mu_n x}\right)\cos\lambda_n y$$ получа

ется(2.11)откуда также получаются опорные ре $y = 0\,, b$ а

кции при .Для сравнения приводится выражение для поперечной нагрузки по теори

и $$N_2 = \frac{2}{3+\nu}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\lambda_n e^{-\lambda_n x}\cos\lambda_n y$$ Кирхг

офа (2.12)Очевидно, что при малых x значениях , т.е. в окрестности угловых точек пластинки, поперечные нагрузки, вычисленные по формулам (2.11) и (2.12), будут существенно отличаться друг от друга. Это обстоятельство было отмечено в [7] на основе исследования задачи изгиба прямоугольной пластинки по теории

Рейснера.В частном случае задания изгибающего момента (2.6) результаты вычислений опорных реакций по формулам (2.11) и (2.12) будут мало отличаться (меньше десяти процентов) пр

и $$\xi_1 < 0.1,\quad \frac{x}{2h} >> \frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\ln\left(\xi_1^{-1}\sqrt{1+\xi_1^2}\right)}{\sqrt{1+\xi_1^2}-\xi_1}$$ услов

иях (2.13)Из (2.11) и (2.13) следует, что вк $\mu_n\exp(-\lambda_n\mu_n x)$ лад члена быстро уменьшается при удалени $x = 0$ и от края пластинки. Численные результаты показывают $\xi_1 = 0{,}01$, что при п $x/(2h) \approx 1{,}471$ олучаетс $\xi_1 = 0{,}05$ я , $\xi_1 = 0{,}1$ а при и , соотве $x/(2h) \approx 1{,}329$ тст $x/(2h) \approx 0{,}809$.

венно, и 3. Рассматривается задача изгиба полубесконечной пластинки-полосы, когда полубесконечные края шарнирно закреплены и свободный конечный край загружен перерезывающим усилием. В этом случае граничные услови $x=0$ я на краю имею

$$M_1=0,\ H=0,\ N_1=N_1(y)$$ т вид

[1] (3.1)или в обозначениях с

т $$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-\frac{4}{5G}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\nu\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)=0$$ а

т $$\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}-\frac{2}{5G}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)=0$$ ьи [2

] $$\varphi_1=\frac{3}{4h}\ N_1(y)$$

(3.2) Представляя перерезывающую нагрузку в

$$N_1(y)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\lambda_n y$$ виде

ряда (3.3)и подставляя вместе с (1.3) в граничные условия (3.2), получим систему уравнений относительно произвольных п A_n , B_n ост C_n

о $$(1-\nu)\lambda_n A_n-2\left(1+2\xi_n^2\right)B_n+\frac{4\mu_n}{5G}(1-\nu)C_n=0$$

я $$-\lambda_n A_n+\left(1+\frac{2\xi_n^2}{1-\nu}\right)B_n-\frac{2\mu_n^2}{5G}C_n=\frac{3b_n}{10Gh}$$ нных

$$-\frac{3D\lambda_n^2}{2h}B_n+C_n=\frac{3b_n}{4h}$$

и (3.4) Из системы (3.4) произвольные постоянные определяются следующим

$$A_n=\frac{2b_n}{(1-\nu)D\lambda_n^3}\cdot\frac{\left(1+2\xi_n^2\right)^2-\xi_n\left(1-\nu+4\xi_n^2\right)\sqrt{1+\xi_n^2}}{1-\nu-4\xi_n\sqrt{1+\xi_n^2}+4\xi_n^2}$$ о

б $$B_n=-\frac{\left(1+2\xi_n^2\right)b_n}{(1+\nu)\,D\lambda_n^2}-\frac{\lambda_n}{\theta}A_n$$ разом

: $$C_n=-\frac{3\left(1-\nu+4\xi_n^2\right)}{4(1+\nu)\ h}-\frac{3D\lambda_n^3}{2h\theta}A_n$$

(3.5) Если в (3.5 $\xi_n^2<<1$) принять , что соответствует точности пластин теории Кирхгофа, в частности, для п A_n остоянной будем иметь

$$A_n\approx\frac{2\left[1-(1-\nu)\xi_n\right]}{(1-\nu)\left(1-\nu-4\xi_n\right)D\lambda_n^3}\ b_n$$ выраж

ение (3.6)С $\xi_n^2<<1$ точностью функция прогиба получае

т $$W(x,y)\approx\frac{2}{(1-\nu)D}\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{b_n}{\lambda_n^3(1-\nu-4\xi_n)}[1-(1-\nu)\xi_n+$$ с

$$я + 0{,}5(1-\nu)(1+2\xi_n)\lambda_n x]e^{-\lambda_n x} \sin\lambda_n y$$ в вид

е (3.7)В этом же приближении реакции опор н $y=0,\ b$ а кромках определяются

и $$N_2 \approx 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_n x} - \frac{5-3\nu-8\xi_n}{2(1-\nu-4\xi_n)}\ \mu_n e^{-\lambda_n \mu_n x}\right] b_n \cos\lambda_n y$$ з фор

мулы (3.8)Аналогичные результаты получаются также для случая, к $x=0$ огда край загружен крутящим моментом [4], т.е., когда зада

н $M_1 = 0\ ,\ H = H_0(y),\ N_1 = 0$ ы усло

вия (3.9) Л

1. ИТЕРАТУРА Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1
2. 987. 360с.Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. // В сб.: (Проблемы механики тонких деформируемых тел(. Ереван. Изд. (Гитутюн(НАН Армении. 2002. С.67-88.
3. Хачатрян А.А. Об изгибе полубесконечной пластинки нагрузкой, распределенной по краю.// Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук. 1965. Т.18. № 2.
4. С. 39-47.Ананян А.К., Хачатрян А.А. К задаче полубесконечной пластинки-полосы, нагруженной по прямоугольной кромке.// Изв. НАН Армении. Механика. 1997. Т.50. № 1.
5. С. 70-77.Reissner E. (The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates(.// Journ. Applied Mech. 1945. V.12. P.
6. A69–A77. Васильев В.В. Классическая теория пластин–история и современный анализ.// Изв. РАН. МТТ. 1998. ¹3
7. . С 46-58.Васильев В.В. К дискуссии по классической теории пластин.// Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4. С. 140-150.

Институт механики Поступила

в редакцию АН Армении