ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 59, №1, 2006 Механика

УДК 539.3

АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОМ НЕОДНОРОДНОМ УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ОБЛАДАЮЩЕМ ОДНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ УПРУГОЙ СИММЕТРИИ

Саакян Г. С., Саакян С. Г.

Գ. Ս. Սահակյան, Ս. Գ. Սահակյան
Առաձգական համաչափության մեկ հարթություն ունեցող անիզոտրոպ անհամասեռ առաձգական կիսատարածությունում ալիքների տարածման հակահարթ խնդիրը

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է ըստ խորության անհամասեռ, առաձգական համաչափության մեկ հարթություն ունեցող անիզոտրոպ առաձգական կիսատարածությունում զանգվածային իմպուլսի ներքին կետային աղբյուրից գրգռվող սահքի ծավալային ալիքների տարածման, ինչպես նաև ազատ եզրից նրանց անդրադարձման օրինաչափությունները: Խնդրի անալիտիկական լուծումը հնարավոր է եղել ստանալ մոդիֆիկացնելով Լապլասի և Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների եղանակը: Մոդիֆիկացիայի էությունը կայանում է նրանում, որ կիրառելով կոնտուրային ինտեգրման եղանակը և Ֆուրյեի էքսպոնենցիալ ինտեգրալ ձևափոխությունը փոխարինելով կոսինուս-ձևափոխությունով՝ տրանսֆորմանտը հնարավոր է բերել հայտնի ֆունկցիաների Լապլասի ձևափոխությանը:

G. S. Sahakyan, S. G. Sahakyan
Antiplane Problem of the Propagation of Waves in Anisotropic Inhomogeneous Elastic Half-space Having a Plane of Elastic Symmetry

The antiplane problem of the propagation of waves from point source in anisotropic inhomogeneous elastic medium having a plane of elastic symmetry and occupying half-space is considered. The solution is obtained by bringing the equation of motion to quasy-wave equation with variable coefficient and with the term of point impulse source. Then, the problem is solved by developing the method of integral transformations and the solution is obtained in closed form. Analytical solution of the problem is succeeded in finding by modifying integral transformations of Laplace and Fourier, the crux of which is that by means of countour integration and replacement of exponential Fourier transform by cosine transformation, transformant of solution is given rise to Laplace transformation of known functions. Further, field of displacements of shear modes is investigated and the law of wave reflection from surface of anisotropic inhomogeneous elastic half-space is deduced.

Исследование волн, распространяющихся от точечного источника массовых сил в анизотропной неоднородной упругой среде, имеет важные приложения в сейсмологии и смежных с ней научных областях, в том числе для решения таких важных прикладных проблем, какими являются прогнозирование землетрясений, идентификация подземных атомных взрывных волн малой мощности и их отличие от сейсмических. Динамика волн, распространяющихся от внутреннего точечного источника массовых сил в неоднородных изотропных упругих средах рассмотрена в [1,2] методом обобщенных потенциалов. Решение антиплоской задачи для однородного упругого полупространства с однородным слоем получено в [3], а для некоторых вертикально-неоднородных сред–в [4,5]. В работах [6-9] исследованы антиплоские задачи для трещины в анизотропной однородной упругой среде, а в [10]–для среды малой и произвольной неоднородности.

В настоящей работе рассматривается антиплоская задача распространения сдвиговых волн в неоднородном по глубине, анизотропном упругом полупространстве, обладающем одной плоскостью упругой симметрии от внутреннего точечного источника массовых сил. Аналитическое решение задачи удалось найти, модифицируя метод интегральных преобразований Лапласа и Фурье, суть которого заключается в том, что путем контурного интегрирования и заменой экспоненциального преобразования Фурье на косинус-преобразование, трансформант решения можно привести к преобразованию Лапласа известных функций. Далее, исследовано поле смещения сдвиговых волн и получен закон отражения волн от границы неоднородного анизотропного упругого полупространства.

1. Исследуется волновое поле сдвиговых волн в анизотропной линейно-упругой среде, которая в декартовой координатной системе $oxyz$ занимает полупространство $y>0$, является неоднородной по оси y и обладает одной плоскостью упругой симметрии, которую примем за плоскость oxz. Примерами тел, имеющих одну плоскость симметрии упругих свойств, являются кристаллы моноклинной системы. Пусть плотность и модули упругости неоднородного анизотропного упругого полупространства непрерывно изменяются по оси y. Тогда, такая среда математически описывается, кроме функции плотности $\rho(y)$, еще функциями модулей упругости $c_{11}(y)$, $c_{22}(y)$, $c_{33}(y)$, $c_{44}(y)$, $c_{55}(y)$, $c_{66}(y)$, $c_{12}(y)$, $c_{13}(y)$, $c_{23}(y)$, $c_{16}(y)$, $c_{26}(y)$, $c_{36}(y)$, $c_{45}(y)$. В антиплоской задаче компоненты вектора смещения имеют вид $u_x=u_y=0$, $u_z=u(x,y,t)$ и напряжения τ_{xz}, τ_{yz} определяются законом Гука [11]

$$\tau_{xz}=c_{55}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{45}\frac{\partial u}{\partial y},\ \tau_{yz}=c_{45}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{44}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.1}$$

В (1.1) из 13 модулей упругости среды входят только три: $c_{44}(y)$, $c_{45}(y)$ и $c_{55}(y)$.

Примем, что плотность $\rho=\rho_0\varphi(y)$ и модули упругости $c_{55}=a_1^0\varphi(y)$, $c_{45}=a_{12}^0\varphi(y)$, $c_{44}=a_2^0\varphi(y)$, где $\varphi(y)$–непрерывно дифференцируемая функция в $(0;+\infty)$; ρ_0, a_1^0, a_{12}^0 и a_2^0–некоторые положительные постоянные. Тогда, основное уравнение волнового поля в моноклинном анизотропном неоднородном полупространстве, возбужденного от импульса массовых сил $I_0\delta(x)\delta(y-y_0)\delta(t)$, где I_0–постоянная, $\delta(x)$–функция Дирака, будет

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+I_0\delta(x)\delta(y-y_0)\delta(t) \tag{1.2}$$

Условие, что на границе полупространства напряжения равны нулю, принимает вид

$$y=0,\ \tau_{yz}=0 \tag{1.3}$$

Подставляя (1.1) в (1.2) и вводя новые переменные

$$x_1=x-(a_{12}^2/a_2^2)y,\ y_1=(a/a_2^2)y \tag{1.4}$$

где $a_1^2=a_1^0/\rho_0$, $a_2^2=a_2^0/\rho_0$, $a_{12}^2=a_{12}^0/\rho_0$, $a^2=a_1^2a_2^2-a_{12}^4$, получим следующие соотношения:

$$\frac{\tau_{yz}}{\rho_0\varphi}=a\frac{\partial u}{\partial y_1} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}+\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{\partial u}{\partial y_1}=\frac{a_2^2}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{a_2^2}{a^2}I_0\delta(x_1+\frac{a_{12}^2}{a}y_1)\delta(y_1-y_{10})\delta(t) \tag{1.6}$$

Полагая в (1.6) $\varphi(y)=\exp(y/h)$ и вводя функцию

$$u=\exp(-\alpha\, y_1).w(x_1,y_1,t) \tag{1.7}$$

где h – характерная глубина неоднородности, $\alpha=a_2^2/(2ah)$, из (1.5) и (1.6) получим

$$\frac{\tau_{yz}}{\rho_0}=a\exp(-\alpha\, y_1)\left(\frac{\partial w}{\partial y_1}-\alpha w\right) \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2}-\alpha^2 w=\frac{a_2^2}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{a_2^2 I_0}{a^2\rho_0}\exp(\alpha\, y_1)\delta(x_1+\frac{a_{12}^2}{a}y_1)\delta(y_1-y_{10})\delta(t) \tag{1.9}$$

Граничное условие (1.3) будет

$$y_1=0\,,\ \frac{\partial w}{\partial y_1}-\alpha w=0 \tag{1.10}$$

2. Граничную задачу (1.9) и (1.10) можно решить методом интегральных преобрзований [12]. Применим к (1.9) и (1.10) преобразование Лапласа по t

$$W_L(x_1,y_1,s)=\int_0^\infty w(x_1,y_1,t)e^{-st}dt \tag{2.1}$$

а затем, к полученным уравнениям – преобразование Фурье по x_1

$$W_{LF}(k,y_1,s)=\int_{-\infty}^{\infty}W_L(x_1,y_1,s)e^{-ikx_1}dx_1 \tag{2.2}$$

Тогда уравнение (1.9) и граничное условие (1.10) для трансформанты $W_{LF}(k,y_1,s)$ будут

$$\frac{d^2W_{LF}}{dy_1^2}-(k^2+\frac{a_2^2s^2}{a^2}+\alpha^2)W_{LF}=\frac{I_0a_2^2}{\rho_0a^2}\exp\left[\left(\alpha+\frac{ika_{12}^2}{a}\right)y_1\right]\delta(y_1-y_{10}) \tag{2.3}$$

$$y_1=0,\quad \frac{dW_{LF}}{dy_1}-\alpha W_{LF}=0 \tag{2.4}$$

Уравнение (2.3) имеет систему фундаментальных решений

$$W_{LF}^{(1)}(k,y_1,s)=\exp(-ny_1)\,,\ W_{LF}^{(2)}(k,y_1,s)=\exp(ny_1) \tag{2.5}$$

где ветвь радикала $n=\sqrt{k^2+(a_2s/a)^2+\alpha^2}$ определена по условию: $\arg n=0$ при $k>0$ и $s>0$.

Определим ограниченное решение неоднородного уравнения (2.3) в виде

$$W_{LF}(k,y_1,s)=\begin{cases}A\exp(ny_1)+B\exp(-ny_1), & 0<y_1<y_{10}\\ C\exp(-ny_1), & y_{10}<y_1<+\infty\end{cases} \tag{2.6}$$

где A, B и C – некоторые величины, удовлетворяющие условиям:

$$W_{LF}\left(k, y_{10}+0, s\right)=W_{LF}\left(k, y_{10}-0, s\right) \tag{2.7}$$

$$\frac{dW_{LF}\left(k, y_{10}+0, s\right)}{dy_1}-\frac{dW_{LF}\left(k, y_{10}-0, s\right)}{dy_1}==\frac{I_0 a_2^2}{\rho_0 a^2}\exp\left[\left(\alpha+\frac{ika_{12}^2}{a}\right)y_{10}\right] \tag{2.8}$$

Подставляя (2.6) в (2.4), (2.7) и (2.8), получим относительно A, B и C систему уравнений первой степени. Решая эту систему и подставляя A, B и C в (2.6), получим функцию Грина:

$$W_{LF}=\frac{I}{n}\exp\left[\left(\alpha+\frac{ika_{12}^2}{a}\right)\right]\left[\begin{array}{r}\exp\left(-n\left|y_1-y_{10}\right|\right)-\exp\left(-n\left(y_1+y_{10}\right)\right)+\\ +\dfrac{2n}{n+\alpha}\exp\left(-n\left|y_1-y_{10}\right|\right)\end{array}\right] \tag{2.9}$$

где $I=-I_0 a_2^2/\left(2\rho_0 a^2\right)$.

Для нахождения $W_L\left(x_1, y_1, s\right)$ по (2.9) применим к нему обратное преобразование Фурье по k:

$$W_L\left(x_1, y_1, s\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W_{LF}\left(k, y_1, s\right)e^{-ikx_1}dk \tag{2.10}$$

В (2.10) подынтегральное выражение является четной по k функцией. Это дает возможность экспоненциальное преобразование Фурье заменить на косинус- преобразование. В результате получим косинус-преобразование известной функции [12, стр. 26 (26)]:

$$W_L\left(x_1, y_1, s\right)=\frac{I}{2\pi}\exp\left(\alpha\, y_{10}\right)\left[\begin{array}{r}W_L^{(1)}\left(x_1, y_1, s\right)-W_L^{(2)}\left(x_1, y_1, s\right)+\\ +W_L^{(3)}\left(x_1, y_1, s\right)\end{array}\right] \tag{2. 11}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$W_L^{(1)}=K_0\left(\sqrt{\left[\frac{a_2^2 s^2}{a^2}+\alpha^2\right]\left[\left(x_1+\frac{a_{12}^2}{a}y_{10}\right)^2+\left(y_1-y_{10}\right)^2\right]}\right) \tag{2.12}$$

$$W_L^{(2)}=K_0\left(\sqrt{\left[\frac{a_2^2 s^2}{a^2}+\alpha^2\right]\left[\left(x_1+\frac{a_{12}^2}{a}y_{10}\right)^2+\left(y_1+y_{10}\right)^2\right]}\right) \tag{2.13}$$

$$W_L^{(3)}=2\exp\left[\alpha\left(y_1+y_{10}\right)\right]\int_0^{\infty}\frac{\exp\left[-\left(n+\alpha\right)\left(y_1+y_{10}\right)\right]}{n+\alpha}\cos\left[k\left(x_1+\frac{a_{12}^2}{a}y_{10}\right)\right]dk \tag{2.14}$$

Изображения преобразования Лапласа (2.12) и (2.14) являются табличными [12, с.250 (45)]. Для их оригиналов $w^{(1)}\left(x_1, y_1, t\right)$ и $w^{(2)}\left(x_1, y_1, t\right)$ имеем:

$$w^{(1)} = \frac{H\left(t - \frac{a_2}{a}\sqrt{\left(x_1 + \frac{a_{12}^2}{a} y_{10}\right)^2 + \left(y_1 - y_{10}\right)^2}\right)}{\sqrt{t^2 - \left[\frac{a_2}{a}\left(x_1 + \frac{a_{12}^2}{a} y_{10}\right)\right]^2 - \left[\frac{a_2}{a}\left(y_1 - y_{10}\right)\right]^2}} \times$$

$$\times \cos\left[\frac{a\alpha}{a_2}\sqrt{t^2 - \left[\frac{a_2}{a}\left(x_1 + \frac{a_{12}^2}{a} y_{10}\right)\right]^2 - \left[\frac{a_2}{a}\left(y_1 - y_{10}\right)\right]^2}\right] \tag{2.15}$$

$$w^{(2)} = \frac{H\left(t - \frac{a_2}{a}\sqrt{\left(x_1 + \frac{a_{12}^2}{a} y_{10}\right)^2 + \left(y_1 + y_{10}\right)^2}\right)}{\sqrt{t^2 - \left[\frac{a_2}{a}\left(x_1 + \frac{a_{12}^2}{a} y_{10}\right)\right]^2 - \left[\frac{a_2}{a}\left(y_1 + y_{10}\right)\right]^2}} \times \tag{2.16}$$

$$\times \cos\left[\frac{a\alpha}{a_2}\sqrt{t^2 - \left[\frac{a_2}{a}\left(x_1 + \frac{a_{12}^2}{a} y_{10}\right)\right]^2 - \left[\frac{a_2}{a}\left(y_1 + y_{10}\right)\right]^2}\right]$$

Для нахождения оригинала $w^{(3)}\left(x_1, y_1, t\right)$ по изображению (2.14) необходимо иметь в виду, что преобразование Лапласа от $F\left(s\right) = \left(s + \alpha_0\right)^{-1} \exp\left[-\left(s + \alpha_0\right)\beta_0\right]$ есть $f\left(t\right) = H\left[t - \beta_0\right]\exp\left(-\alpha_0 t\right)$, а $F\left(\sqrt{s^2 + \alpha_1^2}\right)$ определяется формулой [12, стр. 205 (6)]:

$$F\left(\sqrt{s^2 + \alpha_1^2}\right) \div \int_0^t f\left(t'\right) J_0\left(\alpha_1\sqrt{t^2 - t'^2}\right) dt' \tag{2.17}$$

Совершая обратное преобразование Лапласа от $W_L^{(3)}$, получим

$$w^{(3)} = 2e^{\alpha\left(y_1 + y_{10}\right)} \int_0^\infty \left(\int_{\frac{a_2}{a}\left(y_1 + y_{10}\right)}^t \exp\left(-\frac{\alpha a}{a_2} t'\right) J_0\left(\frac{a}{a_2}\sqrt{\left(k^2 + \alpha^2\right)\left(t^2 - t'^2\right)}\right) dt'\right) \times$$
$$\times \cos\left[k\left(x_1 + \frac{a_{12}^2}{a} y_{10}\right)\right] dk \tag{2.18}$$

Меняя порядок интегрирования в (2.18) и учитывая формулу [12, стр.57 (35)], имеем

$$w^{(3)} = 2e^{\alpha(y_1+y_{10})}H\left(t-\frac{a_2}{a}\sqrt{\left(x_1+\frac{a_{12}^2}{a}y_{10}\right)^2+\left(y_1+y_{10}\right)^2}\right)\times$$
$$\times\int\limits_{\frac{a_2}{a}(y_1+y_{10})}^{t}\frac{\exp\left(-\frac{a\alpha}{a_2}t'\right)}{\sqrt{t_{*1}^2-t'^2}}\cos\left(\frac{a\alpha}{a_2}\sqrt{t_{*1}^2-t'^2}\right)dt' \tag{2.19}$$

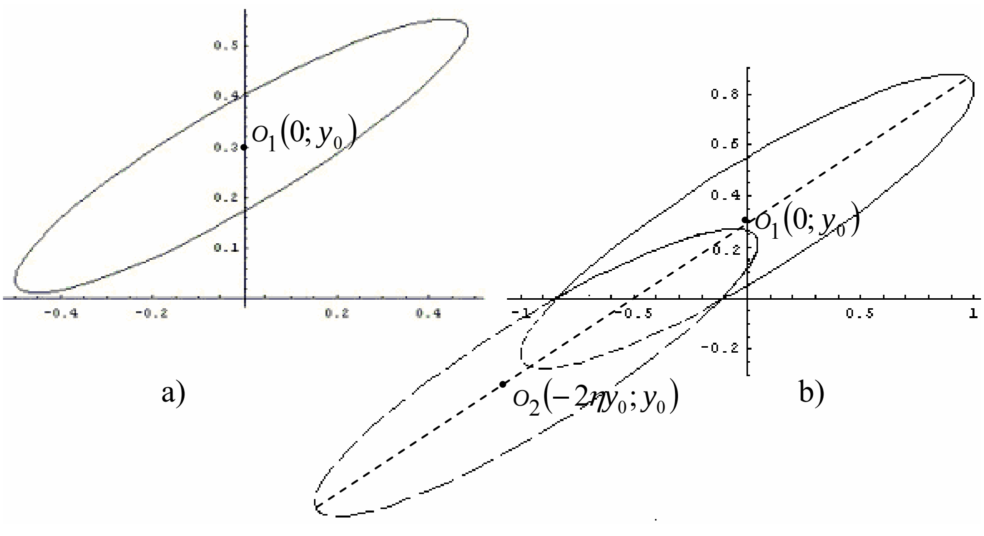
где $t_{*1}=\sqrt{t^2-\left[\frac{a_2}{a}\left(x_1+\frac{a_{12}^2}{a}y_{10}\right)\right]^2}$.

Окончательно, решение $u(x,y,t)$, согласно формулам (1.4), (1.7) и (2.11), будет

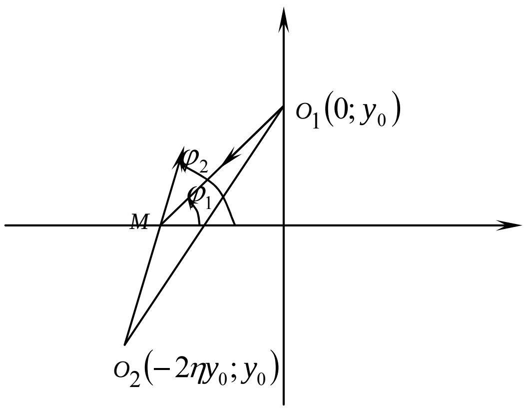
$$u(x,y,t)=-\frac{I_0a_2^2}{2\pi\rho_0a^2}\exp\left(-\frac{y_0}{2h}\right)\left\{\frac{H\left(t-\sqrt{\left[\frac{a_2}{a}\left(x-\frac{a_{12}^2}{a_2^2}(y-y_0)\right)\right]^2+\left(\frac{y-y_0}{a_2}\right)^2}\right)}{\sqrt{t^2-\left[\frac{a_2}{a}\left(x-\frac{a_{12}^2}{a_2^2}(y-y_0)\right)\right]^2-\left(\frac{y-y_0}{a_2}\right)^2}}\times\right.$$
$$\times\cos\left(\frac{a}{2a_2h}\sqrt{t^2-\left[\frac{a_2}{a}\left(x-\frac{a_{12}^2}{a_2^2}(y-y_0)\right)\right]^2-\left(\frac{y-y_0}{a_2}\right)^2}\right)-$$
$$-\frac{H\left(t-\sqrt{\left[\frac{a_2}{a}\left(x-\frac{a_{12}^2}{a_2^2}(y-y_0)\right)\right]^2+\left(\frac{y+y_0}{a_2}\right)^2}\right)}{\sqrt{t^2-\left[\frac{a_2}{a}\left(x-\frac{a_{12}^2}{a_2^2}(y-y_0)\right)\right]^2-\left(\frac{y+y_0}{a_2}\right)^2}}\times$$
$$\times\cos\left(\frac{a}{2a_2h}\sqrt{t^2-\left[\frac{a_2}{a}\left(x-\frac{a_{12}^2}{a_2^2}(y-y_0)\right)\right]^2-\left(\frac{y+y_0}{a_2}\right)^2}\right)+$$
$$+2\exp\left(\frac{y+y_0}{2h}\right)H\left(t-\sqrt{\left[\frac{a_2}{a}\left(x-\frac{a_{12}^2}{a_2^2}(y-y_0)\right)\right]^2+\left(\frac{y+y_0}{a_2}\right)^2}\right)\times$$
$$\left.\times\int\limits_{\frac{y+y_0}{a_2}}^{t}\frac{\exp\left(-\frac{a_2t'}{2h}\right)}{\sqrt{t_*^2-t'^2}}\cos\left(\frac{a_2}{2h}\sqrt{t_*^2-t'^2}\right)dt'\right\} \tag{2.20}$$

где $t_* = \sqrt{t^2 - \left[\frac{a_2}{a} \left(x - \frac{a_{12}^2}{a_2^2} \left(y - y_0 \right) \right) \right]^2}$.

Таким образом, в неоднородном по глубине анизотропном упругом полупространстве от внутреннего точечного источника массовых сил до характерного времени $t = t_*$ распространяется сдвиговая волна с эллиптическим фронтом $y = y_0 + \gamma^{-1} \left(\eta x \pm \sqrt{1-\eta^2} \sqrt{(a_1 t)^2 - x^2} \right)$, $y > 0$, где $\gamma = a_1 / a_2$, $\eta = a_{12}^2 / \left(a_1 a_2 \right)$. Начиная с времени $t = t_*$, падающая сдвиговая волна отражается от границы среды. Отраженная волна распространяется с эллиптическим фронтом $y = \left(2\eta^2 - 1 \right) y_0 + \gamma^{-1} \left(\eta x \pm \sqrt{1-\eta^2} \sqrt{(a_1 t)^2 - \left(x + 2\eta y_0 \right)^2} \right)$, $y > 0$, с центром в точке $O_2(-2\eta y_0; -y_0)$. Этот центр эллиптического фронта отраженной волны центрально симметричен относительно границы среды с точкой $O_1(0; y_0)$, где приложен точечный источник массовых сил (фиг. 1). При этом, известный закон отражения волн от границы однородной изотропной среды не имеет места. В неоднородных анизотропных средах отраженная волна от границы среды в ее любой точке M уже имеет направление луча $O_2 M$, которое получается зеркальным отражением падающего луча $O_1 M$ относительно границы среды и вращением его вокруг нормали границы на полуоборот (фиг. 2). Между углом падающей волны φ_1 и углом отраженной волны φ_2 имеет место соотношение $\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi_1 / \left(2\eta \operatorname{tg} \varphi_1 - 1 \right)$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Следует отметить, что амплитуды волн зависят, кроме координат наблюдаемой точки, от характерных величин: плотности и модулей упругости анизотропой неоднородной среды, т. е. от их значений при $y = 0$. Из решения (2.20) при $a_{12} = 0$ $(\eta = 0)$ получается решение аналогичной задачи для неоднородной изотропной среды[10], а при $h \to \infty$ –анизотропной однородной среды [8]. Во всех этих случаях смещение на фронтах падающей и отраженной волн имеет особенность одного порядка $-1/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гук Дж. Функция Грина для осесимметричных упругих волн в неограниченной неоднородной среде, имеющих постоянные градиенты скорости. // Прикладная механика. Сер. Е. (Тр. Амер. Об-ва инж.-мех.) 1965. Т. С. 85-93.
2. Саакян С. Г. Распространение волн от точечного источника в слоисто-неоднородном изотропном упругом полупространстве. // Механика. Межвуз. сб. научн. тр. 1989. Вып. 7. С. 98-106.
3. Mitra M. An SH-point source in a halfspace with a layer. // Bulletin of the Seismological Society of America. 1963. Vol. 53. № 5. P. 1031-1037.
4. Белубекян М. В., Мухсихачоян А. Р. Сдвиговая поверхностная волна в слабонеоднородных упругих средах. // Акустический журнал. 1996. Т. 42. № 2. С. 179-182.
5. Саакян С. Г., Варданян И. А. Фундаментальное решение антиплоской задачи для вертикально-неоднородной упругой среды. // Доклады НАН Армении. 1999. Т. 99. №4. С. 328-333.
6. Сарайкин В. А., Слепян Л. И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле. // МТТ. 1979. № 4. С. 54-73.
7. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т. 2. М.: Мир. 1983. С. 525-880.

8. Костров Б. В. Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига. // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 6. С. 1042-1049.
9. Поручиков Б. В. Методы динамической теории упругости. М.: Наука. 1986. 328 с.
10. Багдоев А. Г., Саакян С. Г. Антиплоская задача распространения трещины с произвольной скоростью в анизотропной неоднородной упругой среде. // МТТ. 2002. № 2. С. 145-154.
11. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука. 1982. 424 с.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука. 1969. 343 с.

Ереванский государственный университет
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
25.01.2005