ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 59, №1, 2006 Механика

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФЛАТТЕРА ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ

Худаяров Б.А.

Բ. Ա. Խուդայարով

Առաձգամածուցիկ սալերի և գլանային պանելների ֆլաթերի մաթեմատիկական մոդելավորումը

Դիտարկվում է գազի հոսքով շրջհոսվող առաձգամածուցիկ սալերի և գլանային պանելների ֆլաթերի խնդիրը: Աշխատանքի հիմնական ուղղվածությունը նյութի առաձգամածուցիկ հատկությունների հաշվառումն է գերձայնային արագությունների դեպքում: Մշակված է ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների թվային լուծման ալգորիթմ: Բերված են ֆլաթերի կրիտիկական արագության հաշվարկման արդյունքները:

B. A. Khudayarov

Mathematical modeling of flutter of viscoelastic plates and cylindrical panels

The flutter of viscoelastic plates and cylindrical panels streamlined by a gas current are investigated. The basic direction of the present work consists in taking into account of viscoelastic material properties at supersonic speeds. An algorithm of the numerical solution for the problem has been worked out on the basic of the method. The results of the flutter critical speed calculations have been given.

Исследуется задача о флаттере вязкоупругих пластин и цилиндрических панелей, обтекаемых потоком газа. Основное направление работы состояло в учете вязкоупругих свойств материала при сверхзвуковых скоростях. Разработан алгоритм численного решения интегро-дифференциальных уравнений. Приведены результаты расчетов критической скорости флаттера

Введение. Проблемы панельного флаттера элементов тонкостенных конструкций представляют значительный интерес для авиа и ракетостроения. Эти явления порождаются весьма разнообразными причинами. Поэтому вопросы флаттера постоянно требуют новых исследований, сочетающих тщательность, детальность и общность анализа.

В этой статье рассматривается задача о флаттере вязкоупругих элементов летательного аппарата в сверхзвуковом потоке газа с учетом геометрических и аэродинамических нелинейностей. Здесь даются в двухмерных постановках математические модели, при которых используется теория пологих оболочек Маргерра [1] применительно к исследованию проблем прочности, жесткости и устойчивости тонкостенных конструкций типа авиационных крыльев. Аэродинамическое давление рассчитано в соответствии с поршневой теорией [2].

Ранее в работах [3-7] и др. уже рассматривались подобные задачи для упругих как однослойных, так и трехслойных пластин в сверхзвуковом потоке газа.

При реальном учете физико-механических свойств материала изучаемого объекта, математической моделью рассматриваемых задач служат системы ИДУ в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями. Полученные нелинейные ИДУ в частных производных с помощью метода Бубнова-Галеркина при рассмотренных граничных условиях сводятся к решению систем нелинейных обыкновенных ИДУ с постоянными или переменными коэффициентами относительно функции времени. Интегрирование уравнений, полученных с помощью многочленной аппроксимации перемещений, было проведено численным методом, предложенным в работах [8, 10]. На основе этого метода разработан алгоритм численного решения задачи, пригодный для всех вязкоупругих элементов тонкостенных конструкций типа пластин, панелей и оболочек.

1. Постановка задачи и методы решения

Основные зависимости, относящиеся к модели вязкоупругой пластины и оболочки, основанной на гипотезе Кирхгоффа-Лява, были приведены в работах [9, 10] и др. Использование данной модели позволяет достичь достаточной точности при решении ряда практических задач.

Рассмотрим пологую вязкоупругую оболочку, обтекаемую с внешней стороны сверхзвуковым потоком газа; невозмущенную скорость потока V будем считать направленной вдоль образующей. Будем пользоваться обычными гипотезами теории упругих оболочек [11, 12], считая справедливой гипотезу Кирхгоффа-Лява и полагая прогибы малыми по сравнению с толщиной оболочки.

Уравнения Маргерра в декартовой системе координат относительно перемещений u, v и w с учетом вязкоупругих свойств материала конструкций можно записать в следующем виде [10]:

$$(1-R^*)\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+L_1(w)\right\}-\rho\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

$$(1-R^*)\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+L_2(w)\right\}-\rho\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0$$

$$D(1-R^*)\nabla^4 w+L_3^*\ (u,v,w)+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q \qquad (1)$$

Здесь $D=\dfrac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$ –жесткость при изгибе; ρ –плотность материала; h– толщина оболочки; E– модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона;

$$L_1(w)=-\left(k_x+\mu k_y\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$L_2(w)=-\left(\mu k_x+k_y\right)\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$L_3^*(u,v,w)=\left(1-R^*\right)\frac{Eh}{1-\mu^2}\left\{-\left(k_x+\mu k_y\right)\frac{\partial u}{\partial x}-\left(\mu k_x+k_y\right)\frac{\partial v}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\left(k_x^2+k_y^2+2\mu k_x k_y\right)w-\frac{k_x+\mu k_y}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\frac{k_y+\mu k_x}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\}-$$

$$-\frac{Eh}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\left(1-R^*\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\left(k_x+\mu k_y\right)w\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\left(1-R^*\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}-\frac{Eh}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial w}{\partial y}\left(1-R^*\right)\left[\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial v}{\partial y}-\left(\mu k_x+k_y\right)w\right]+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\left(1-R^*\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}$$

где $q=-B\dfrac{\partial w}{\partial t}-BV\dfrac{\partial w}{\partial x}-B_1V^2\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\ \ldots$ –аэродинамическое давление, определяемое по теории Ильюшина; $B=\dfrac{\chi p_\infty}{V_\infty}$, $B_1=\dfrac{\chi(\chi+1)p_\infty}{4V_\infty^2}$, χ – показатель политропы газа; p_∞, V_∞ –соответственно давление и скорость звука на бесконечности.

Для полного определения задачи к ИДУ (1) необходимо добавить граничные и начальные условия. Граничные условия будут иметь вид:

при $x=0$, $x=a$ $\qquad w=0;\ v=0;\ N_x=0;\ M_x=0;$

при $y=0$, $y=b$ $\qquad w=0;\ u=0;\ N_y=0;\ M_y=0.$

При интегрировании основных уравнений должны быть удовлетворены также следующие начальные условия, относящиеся к перемещениям и скоростям точек срединной поверхности оболочки:

$$u(x,y,0)=\varphi_1(x,y),\quad \dot{u}(x,y,0)=\psi_1(x,y) \tag{2}$$

$$v(x,y,0)=\varphi_2(x,y),\quad \dot{v}(x,y,0)=\psi_2(x,y) \tag{3}$$

$$w(x,y,0)=\varphi_3(x,y),\quad \dot{w}(x,y,0)=\psi_1(x,y) \tag{4}$$

Представим функцию $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$, $w(x,y,t)$ в виде разложения по функциям $\varphi_{nm}(x,y)$, $\psi_{nm}(x,y)$, $\theta_{nm}(x,y)$, удовлетворяющим соответствующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} u(x,y,t)&=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}u_{nm}\varphi_{nm}(x,y)\\ v(x,y,t)&=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}v_{nm}\psi_{nm}(x,y)\\ w(x,y,t)&=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{L}w_{nm}\theta_{nm}(x,y)\end{aligned} \tag{5}$$

где $u_{nm}=u_{nm}(t)$ $v_{nm}=v_{nm}(t)$ $w_{nm}=w_{nm}(t)$ –искомые функции времени; $\varphi_{nm}(x,y)$, $\psi_{nm}(x,y)$, $\theta_{nm}(x,y)$– известные ортогональные функции, зависящие от граничных условий.

Подставляя (5) в (1) и выполняя процедуру Бубнова-Галеркина, для определения $u_{nm}(t)$, $v_{nm}(t)$, $w_{nm}(t)$ получим систему нелинейных ИДУ в виде:

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} N_{1k\ln m}\ddot{u}_{nm} - \Omega(1-R^*)\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\Big(A_{1k\ln m}u_{nm} + \frac{1+\mu}{2}B_{1k\ln m}v_{nm} - \right.$$
$$\left. -(k_x+\mu k_y)C_{1k\ln m}w_{kl}\Big) + \sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M} D_{1k\ln mir}w_{nm}w_{ir}\right\} = 0 \qquad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} N_{2k\ln m}\ddot{v}_{nm} - \Omega(1-R^*)\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{1+\mu}{2}A_{2k\ln m}u_{nm} + B_{2k\ln m}v_{nm} - \right.\right.$$
$$\left.\left. -(k_y+\mu k_x)C_{2k\ln m}w_{kl}\right) + \sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M} D_{2k\ln mir}w_{nm}w_{ir}\right\} = 0 \qquad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} N_{3k\ln m}\left(\ddot{w}_{nm} + M_\lambda\dot{w}_{nm}\right) + (1-R^*)\Omega\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{1+\mu}{2}A_{3k\ln t}u_{nm} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + B_{3k\ln m}v_{nm} + C_{3k\ln m}w_{nm}\right) - \sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}P_{k\ln mir}w_{nm}w_{ir}\right\} - \sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}w_{nm}\times$$
$$\times(1-R^*)\left\{A_{4k\ln mir}u_{ir} + B_{4k\ln mir}v_{ir} + +C_{4k\ln mir}w_{ir}\right\}\Omega +$$
$$+\chi M_p\left(\lambda_1 M^*\sum_{n=1}^{N}\gamma_{k\ln m}w_{nm} + \frac{\chi+1}{4}M^{*2}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}\Gamma_{kenmir}w_{nm}w_{ir}\right) = 0 \qquad (8)$$

$$N_{1k\ln m} = \int_0^1\int_0^1 \varphi_{nm}\varphi_l\,dxdy, \quad N_{2k\ln m} = \int_0^1\int_0^1 \psi_{nm}\psi_{kl}\,dxdy$$

$$A_{1k\ln m} = \int_0^1\int_0^1\left(\varphi''_{nm,xx} + \frac{\lambda^2(1-\mu)}{2}\varphi''_{nm,yy}\right)\varphi_{kl}\,dxdy$$

$$A_{2k\ln m} = \int_0^1\int_0^1 \lambda\varphi''_{nm,xy}\psi_{kl}\,dxdy, \ \lambda = \frac{a}{b}, \ \lambda_1 = \frac{a}{h}$$

$$B_{1k\ln m} = \int_0^1\int_0^1 \lambda\psi''_{nm,xy}\varphi_{kl}\,dxdy, \quad C_{1k\ln m} = \int_0^1\int_0^1 \beta_1\lambda_1\theta'_{nm,x}\varphi_{kl}\,dxdy$$

$$B_{2k\ln m} = \int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-\mu}{2}\psi''_{nm,xx} + \lambda^2\psi''_{nm,yy}\right)\psi_{kl}\,dxdy$$

$$C_{2k\ln m} = \int_0^1\int_0^1 \beta_1\lambda_1\lambda\theta'_{nm,y}\psi_{kl}\,dxdy, \quad \Omega = \frac{M_E}{1-\mu^2}$$

$$D_{1k\ln mir}=\frac{1}{\lambda_1}\int_0^1\int_0^1\left(\theta'_{nm,x}\theta''_{ir,xx}+\frac{\lambda^2(1-\mu)}{2}\theta'_{nm,x}\theta''_{ir,yy}+\frac{\lambda^2(1+\mu)}{2}\theta'_{nm,y}\theta''_{ir,xy}\right)\varphi_{kl}dxdy$$

$$D_{2k\ln mir}=\frac{\lambda}{\lambda_1}\int_0^1\int_0^1\left(\lambda^2\theta'_{nm,y}\theta''_{ir,yy}+\frac{1+\mu}{2}\theta'_{nm,x}\theta''_{ir,xy}+\frac{1-\mu}{2}\theta'_{nm,y}\theta''_{ir,xx}\right)\psi_{kl}dxdy$$

$$N_{3k\ln m}=\int_0^1\int_0^1\theta_{nm}\theta_{kl}dxdy,\quad A_{3k\ln m}=-\int_0^1\int_0^1\left(k_x+\mu k_y\right)\lambda_1\beta_1\varphi'_{nm,x}\theta_{kl}dxdy$$

$$B_{3k\ln m}=-\int_0^1\int_0^1\left(k_y+\mu k_x\right)\lambda^2\beta_1\psi'_{nm,y}\theta_{kl}dxdy,\quad C_{3k\ln m}=\int_0^1\int_0^1\Big[\left(k_x^2+k_y^2+2\mu k_xk_y\right)\times$$

$$\times\lambda_1^2\beta_1^2\theta_{nm}+\frac{1}{12\lambda_1^2}\left\{\theta^{IV}_{nm,xxxx}+2\lambda^2\theta^{IV}_{nm,xxyy}+\lambda^4\theta^{IV}_{nm,yyyy}\right\}\Big]\theta_{kl}dxdy$$

$$P_{k\ln mir}=\frac{k_x+\mu k_y}{2}\beta_1\cdot K_{1k\ln mir}+\frac{k_y+\mu k_x}{2}\beta_1\lambda K_{2k\ln mir}$$

$$K_{1k\ln mir}=\int_0^1\int_0^1\theta'_{nm,x}\theta'_{ir,x}\theta_{kl}dxdy,\quad K_{2k\ln mir}=\int_0^1\int_0^1\theta'_{nm,y}\theta'_{ir,y}\theta_{kl}dxdy$$

$$A_{4k\ln mir}=\frac{1}{\lambda_1}\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{\lambda}\theta''_{nm,xx}\varphi'_{ir,x}+\frac{1}{\lambda}\theta'_{nm,x}\varphi'_{ir,xx}+\frac{1-\mu}{2}\theta'_{nm,y}\varphi''_{ir,xy}+\lambda\mu\theta''_{nm,yy}\varphi'_{ir,x}+\right.$$

$$\left.+\lambda\mu\theta'_{nm,y}\varphi''_{ir,xy}+\lambda\left(1-\mu\right)\theta''_{nm,xy}\varphi'_{ir,y}+\lambda\frac{1-\mu}{2}\theta'_{nm,x}\varphi''_{ir,yy}\right)\theta_{kl}dxdy$$

$$B_{4k\ln mir}=\frac{1}{\lambda_1}\int_0^1\int_0^1\left(\mu\theta''_{nm,xx}\varphi'_{ir,y}+\mu\theta'_{nm,x}\psi''_{ir,xy}+\frac{1-\mu}{2}\theta'_{nm,y}\psi''_{ir,xx}+\lambda\theta''_{nm,yy}\psi'_{ir,y}+\right.$$

$$\left.+\lambda^2\theta'_{nm,y}\cdot\psi''_{ir,yy}+(1-\mu)\theta''_{nm,xy}\psi'_{ir,x}+\frac{1-\mu}{2}\theta'_{nm,x}\psi''_{ir,xy}\right)\theta_{kl}dxdy$$

$$C_{4k\ln mir}=-\beta_1\int_0^1\int_0^1\left(\frac{k_x+\mu k_y}{\lambda}\left[\theta''_{nm,xx}\theta_{ir}+\theta'_{nm,x}\theta'_{ir,x}\right]+\lambda\left(k_y+\mu k_x\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\theta''_{nm,yy}\theta_{ir}+\theta'_{nm,y}\theta'_{ir,y}\right]\right)\theta_{ke}dxdy,\quad \gamma_{k\ln m}=\int_0^1\int_0^1\theta'_{nm,x}\theta_{kl}dxdy$$

$$\Gamma_{k\ln mir}=\int_0^1\int_0^1\theta'_{nm,x}\theta'_{ir,x}\theta_{kl}dxdy$$

$$u_{nm}(o)=u_{onm},\quad \dot{u}(o)=\dot{u}_{onm},\quad v_{nm}(o)=v_{onm}$$

$$\dot{v}(o)=\dot{v}_{onm},\quad w_{nm}(o)=w_{onm},\quad \dot{w}(o)=\dot{w}_{onm}$$

$$n=\overline{1,N};\quad m=\overline{1,M}$$

где $u_{nm}=u_{nm}(t)$, $v_{nm}=v_{nm}(t)$, $w_{nm}=w_{nm}(t)$ – искомые функции времени.

2. Алгоритм численного решения ИДУ задачи о флаттере вязкоупругих пластин и оболочек

Проблемы алгоритмизации задачи механики сплошных сред изучены в работах академика АН РУз В.К.Кабулова [13-15] и др. В данном разделе этот вопрос рассматривается для нелинейных задач о флаттере вязкоупругих элементов летательного аппарата. Для вычисления критической скорости флаттера предлагается численный алгоритм, построенный на основе метода Ф.Бадалова и Х.Эшматова [8, 10].

Одним из основных преимуществ метода Ф.Бадалова и Х.Эшматова является его универсальность и простота реализации алгоритмов решений на персональных компьютерах. Здесь этот метод применим и для систем (6)–(8). Запишем эту систему в интегральной форме. Полагая затем $t=t_i$, $t_i=ih$, $i=1,2,\ldots$ (h=const) и заменяя интегралы некоторыми квадратурными формулами для вычисления $u_{nm}=u_{nm}(t)$, $v_{nm}=v_{nm}(t)$, $w_{nm}=w_{nm}(t)$, получим следующее рекуррентное соотношение:

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} N_{1k\ln m}u_{pnm}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} N_{1k\ln m}(u_{0nm}+\dot{u}_{onm}t_p)-$$
$$-\Omega\sum_{j=0}^{p-1}A_j(t_p-t_j)\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(A_{1k\ln m}\left[u_{jnm}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_s\exp(-\beta t_s)u_{j-snm}\right]+\right.\right.$$
$$+\frac{1+\mu}{2}B_{1k\ln m}\left[v_{jnm}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_s\exp(-\beta t_s)v_{j-skl}\right]-$$
$$\left.-(k_x+\mu k_y)C_{1k\ln m}\left[w_{jnm}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_s\exp(-\beta t_s)w_{j-snm}\right]\right)+ \tag{9}$$
$$\left.+\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}D_{1k\ln mir}\left(w_{jnm}w_{jir}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_s\exp(-\beta t_s)w_{j-snm}w_{j-sir}\right)\right\}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} N_{2k\ln m}v_{pnm}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} N_{2k\ln m}(v_{0nm}+\dot{v}_{onm}t_p)-\Omega\sum_{j=0}^{p-1}A_j(t_p-t_j)\times$$
$$\times\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{1+\mu}{2}A_{2k\ln m}\left[u_{jnm}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_s\exp(-\beta t_s)u_{j-snm}\right]+\right.\right.$$
$$+B_{2k\ln m}\left[v_{jnm}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_s\exp(-\beta t_s)v_{j-skl}\right]-$$
$$\left.-(k_y+\mu k_x)C_{2k\ln m}\left[w_{jnm}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_s\exp(-\beta t_s)w_{j-snm}\right]\right)+$$

$$+\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M} D_{2k\ln mir}\left(w_{jnm}w_{jir}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_s\exp(-\beta t_s)w_{j-snm}w_{j-sir}\right)\Bigg\}\qquad(10)$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}N_{3k\ln m}w_{pnm}=\frac{1}{1+A_pM_\lambda}\times$$

$$\times\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}N_{3k\ln m}\left\langle w_{0nm}+\left(\dot{w}_{0nm}+M_\lambda w_{0nm}\right)t_p\right\rangle-\right.$$

$$-\sum_{j=0}^{p-1}A_j\left(M_\lambda\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}N_{3k\ln m}w_{jnm}-\right.$$

$$-\left(t_p-t_j\right)\left[\chi M_p\left(\lambda_1 M^*\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\ \gamma_{k\ln m}w_{jnm}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\chi+1}{4}M^{*2}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}\Gamma_{k\ln mir}w_{jnm}w_{jir}\right)+$$

$$+\frac{1+\mu}{2}\Omega\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}A_{3k\ln m}\left(u_{jnm}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_s\exp(-\beta t_s)u_{j-snm}\right)+$$

$$+\Omega\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}B_{3k\ln m}\left(v_{jnm}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_s\exp(-\beta t_s)v_{j-snm}\right)+$$

$$+\Omega\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}C_{3k\ln m}\left(w_{jnm}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_s\exp(-\beta t_s)w_{j-snm}\right)-$$

$$-\Omega\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}p_{k\ln mir}\left(w_{jnm}w_{jir}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_s\exp(-\beta t_s)w_{j-snm}w_{j-sir}\right)-$$

$$-\Omega\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}w_{jnm}\left\langle A_{4k\ln mir}\left(u_{jir}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_s\exp(-\beta t_s)u_{j-sir}\right)+\right.$$

$$+B_{4k\ln mir}\left(v_{jir}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_s\exp(-\beta t_s)v_{j-sir}\right)+$$

$$\left.\left.\left.\left.+C_{4k\ln mir}\left(w_{jir}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_s\exp(-\beta t_s)w_{j-sir}\right)\right\rangle\right)\right]\right\}\qquad(11)$$

$$p=1,2,\ldots;\qquad k=\overline{1,N};\qquad l=\overline{1,M}$$

где A_j, B_s –числовые коэффициенты применительно к квадратурным формулам трапеции:

$$A_0 = h/2,\ A_j = h,\ j = \overline{1, i-1},\ A_i = h/2,\ B_0 = h^{\alpha}/2,$$
$$B_j = h^{\alpha}(j^{\alpha} - (j-1)^{\alpha})/2,\ s = j;\ B_s = h^{\alpha}((s+1)^{\alpha} - (s-1)^{\alpha})/2$$

На основе разработанного алгоритма создан пакет прикладных программ на языке «Delphi».

3. Численные результаты

В качестве критерия, определяющего критическую скорость $V_{кр}$, принимаем условие, предложенное в работе [16]. В таблице приводятся результаты расчетов для вязкоупругой цилиндрической панели, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа с постоянными параметрами χ=1,4; V_{∞}=3,4*10^4 см/с; μ=0,32; E=7*10^5 кг/см^2; p_{∞}= 1,014 кг/см^2.

Таблица

Зависимость критической скорости флаттера от физико-механических и геометрических параметров цилиндрической панели

A	α	β	λ	λ_1	β_1	$V_{кр}$
0 0,001 0,01 0,1	0,25	0,05	6	100	0,01	1528 1497 1386 871
0,1	0,1 0,3 0,5	0,05	6	100	0,01	575 918 1281
0,1	0,25	0,1 0,3	6	100	0,01	869 867
0,1	0,25	0,05	3,5 4 4,5 5,5	100	0,01	964 1251 1143 1658
0,1	0,25	0,05	6	50 75 100	0,01	1184 988 871
0,1	0,25	0,05	6	100	0,005 0,008 0,015	723 807 1324

Как видно из анализа результатов, приведенных в таблице, критические значения скорости флаттера $V_{кр}$ оказываются в упругом (A=0) и в вязкоупругом случае (A=0,1), соответственно, равными 1528 и 871. Таким образом, вязкоупругие свойства материала конструкций приводят к уменьшению критической скорости флаттера. Влияние коэффициента вязкости A на критическую скорость флаттера соответствует результатам Г.С. Ларионова [17] и В.И. Матяша [18].

Обратим внимание на влияние параметра сингулярности (на критическую скорость флаттера. Для $\alpha = 0{,}1;\ 0{,}3$ критические скорости флаттера, найденные по формуле (9-11), соответственно равны 575 и 918 и отличаются друг от друга на 59,6 %. Следовательно, учет этого эффекта при проектировании в авиа и ракетостроении имеет большое значение для обеспечения безопасности полета.

Изучено влияние параметра затухания β на критическую скорость $V_{кр}$ флаттера. Расчеты были проведены при β=0,1 и β=0,3. Полученные результаты показывают, что влияние параметра затухания β на критическую скорость флаттера панели незначительно.

Таблица показывает, что увеличение параметра (1 приводит к уменьшению критической скорости флаттера, а с увеличением параметров λ и β_I, критическое число $V_{кр}$ увеличивается, т.е. уменьшается опасность флаттерных движений.

В заключение отметим, что влияние параметра затухания β ядра наследственности на скорость флаттера пластинки по сравнению с влиянием параметра вязкости A и сингулярности α незначительно, что еще раз подтверждает общеизвестные выводы о том, что экспоненциальное ядро релаксации неспособно описать наследственные свойства материала конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Мамай В.И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. - М.: Наука. Физматлит, 1997. 272 с.
2. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // Прикладная математика и механика. - 1956. Т.XX. - Вып.6. - С.733-755.
3. Амбарцумян С.А., Багдасарян Ж.Е. Об устойчивости ортотропных пластинок, обтекаемых сверзвуковым потоком газа // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. №4. С. 91-96.

4. Амбарцумян С.А., Багдасарян Ж.Е. Об устойчивости нелинейно-упругих трехслойных пластинок, обтекаемых сверзвуковым потоком газа // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. №5. С. 96-99.

5. Багдасарян Ж.Е. Об устойчивости трехслойной ортотропной пластинки в сверзвуковом потоке газа // Изв. АН Армянской ССР. Серия физ-мат. наук. 1961. Т. XIV. №5. С. 21-30.

6. Ильюшин А.А., Кийко И.А. Колебания прямоугольной пластины, обтекаемой сверхзвуковым потокам газа // Вест. МГУ. Серия 1. Математика, Механика. - 1994. - №4. - С. 40-44.
7. Ильюшин А.А., Кийко И.А. Новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 167-171.
8. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. №5.С. 867-871.
9. Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир. 1965. 200 с.
10. Эшматов Х. Интегральный метод математического моделирования задач динамики вязкоупругих систем: Дис. доктора техн. наук: 18.05.13. Киев, 1991. 337 с.
11. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
12. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
13. Кабулов В. К. Алгоритмизация в механике сплошных сред. Ташкент: Фан. 1979. 304 с.
14. Кабулов В.К. Алгоритмизация в теории упругости и деформационной прочности. Ташкент: Фан, 1966. 391 с.
15. Кабулов В.К. Проблемы алгоритмизации в теории вязкоупругости // Вопр. вычисл. и прикл. математики. Ташкент. 1996. – Вып.102. С.4-18.
16. Худаяров Б.А. Численное решение задачи о флаттере вязкоупругих трехслойных пластин // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №1. С. 59-62.
17. Ларионов Г.С. Нелинейный флаттер упруговязкой пластинки // Механика твердого тела. 1974. №4. С. 95-100.
18. Матяш В.И. Флаттер упруго-вязкой пластинки // Механика полимеров. 1971. №6. С.1077-1083.

Ташкентский институт
ирригации и мелиорации

Поступила в редакцию
25.05.2005