ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 59, №1, 2006 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СОСТАВНОГО ПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ КОЛЬЦЕОБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Акопян В.Н., Даштоян Л.Л.

Վ.Ն. Հակոբյան, Լ.Լ. Դաշտոյան
Օղակաձև կիսաանվերջ ճաքով թուլացված բաղադրյալ տարածության համար առանցքասիմետրիկ մի խնդիր

Ուսումնասիրված է երկու տարբեր կիսատարածություններից կազմված բաղադրյալ տարածության լարվածային վիճակը, երբ այն երկու նյութերի միացման հարթության հարթության մեջ թուլացված է օղակաձև կիսաանվերջ ճաքով, որի ափերին տրված են խառը եզրային պայմաններ:

Խնդիրը պատման օպերատորների օգնությամբ բերվել է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի և կառուցվել է նրա փակ լուծումը:

On Some Axis-Symmetrical Problem for Compound Space Weakened by Semi-Infinite Crack

In present work the axis-symmetrical strain state of compound space, consisting of two half-spaces with different shear coefficients μ_1, μ_2 and Lame coefficients λ_1, λ_2 with semi-infinite ring-type crack in plane of junction with the given strains on one bank and the displacements on the other is considered.

The system of two singular integral equations of second kind is brought out and the closed solution is built.

Смешанным задачам для однородных или составных упругих тел с трещинами посвящено множество работ как зарубежных, так и армянских ученых. Среди них отметим работы [1-6].

В настоящей работе рассмотрено осесимметричное напряженное состояние составного пространства, состоящего из двух разнородных полупространств, в плоскости стыка которых имеется полубесконечная кольцеобразная трещина, на одном берегу которой заданы напряжения, а на другом – перемещения.

Выведена разрешающая поставленную задачу система уравнений, состоящая из двух сингулярных интегральных уравнений второго рода, и построено ее замкнутое решение.

1. Пусть упругое составное пространство состоит из двух разнородных полупространств с коэффициентами Ламэ λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2, которые в цилиндрической системе координат заполняют соответственно верхнее $(z \geq 0)$ и нижнее $(z \leq 0)$ полупространства, а на плоскости их стыка $(z = 0)$ имеется полубесконечная кольцеобразная трещина, занимающая область $a < r < \infty$. На верхнем берегу трещины заданы нормальные $P_0(r)$ и касательные $\tau_0(r)$ напряжения, а на нижнем берегу – нулевые радиальные и нормальные перемещения.

Задача состоит в определении контактных напряжений на стыке полупространств, коэффициентов их интенсивности и раскрытия трещины.

Снабдив индексом 1 характерные величины верхнего полупространства, а индексом 2–нижнего полупространства, поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи

$$\begin{cases} \sigma_z^{(1)}(r,0) = P_0(r) \\ \tau_{rz}^{(1)}(r,0) = \tau_0(r) \\ u_2(r,0) = 0 \\ w_2(r,0) = 0 \end{cases} \text{при } a < r < \infty \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \sigma_z^{(1)}(r,0) = \sigma_z^{(2)}(r,0) \\ \tau_{rz}^{(1)}(r,0) = \tau_{rz}^{(2)}(r,0) \\ u_1(r,0) = u_2(r,0) \\ w_1(r,0) = w_2(r,0) \end{cases} \text{при } r \in (0;a)$$

Здесь $u_i(r,z)$ и $w_i(r,z)$ $(i=1,2)$ –радиальные и нормальные смещения точек полупространств, а $\sigma_z^{(i)}(r,z)$ и $\tau_{rz}^{(i)}(r,z)$ $(i=1,2)$– компоненты напряжения

Чтобы решить поставленную задачу, компоненты напряжений и смещений, действующих в зоне контакта, обозначим через $\sigma(r)$, $\tau(r)$, $u(r)$, $w(r)$ и рассмотрим две вспомогательные задачи для верхнего и нижнего полупространств, которые определяются следующими граничными условиями:

$$\sigma_z^{(1)}(r,0) = \begin{cases} P_0(r) & \text{при } r > a \\ \sigma(r) & \text{при } 0 < r < a \end{cases}$$
$$\tau_{rz}^{(1)}(r,0) = \begin{cases} \tau_0(r) & \text{при } r > a \\ \tau(r) & \text{при } 0 < r < a \end{cases} \tag{1.2}$$

$$u_2(r,0) = \begin{cases} u(r) & \text{при } 0 < r < a \\ 0, & \text{при } r > a \end{cases}$$
$$w_2(r,0) = \begin{cases} w(r) & \text{при } 0 < r < a \\ 0, & \text{при } r > a \end{cases} \tag{1.3}$$

Решения уравнений Ламэ, записанных в цилиндрической системе координат, для верхнего и нижнего полупространств представим в виде интегралов

$$u_j(r,z) = \int_0^\infty \left[B_j + (-1)^j \theta_3^{(j)} \left(B_j + (-1)^j C_j \right) sz \right] s e^{(-1)^j sz} J_1(rs)\, ds \tag{1.4}$$

$$w_j(r,z)=\int_0^\infty\left[C_j-\theta_3^{(j)}\left(B_j+(-1)^j C_j\right)sz\right]se^{(-1)^j sz}J_0(rs)\,ds\quad (j=1,2)\quad (1.5)$$

Используя последние представления, для компонентов напряжений получим формулы:

$$\begin{gathered}\sigma_z^{(j)}(r,z)=-2\int_0^\infty\left[\theta_1^{(j)}B_j-(-1)^j\theta_2^{(j)}C_j\right]s^2e^{(-1)^j sz}J_0(sr)\,ds\\ -2\mu_j\int_0^\infty\left[(-1)^j\theta_3^{(j)}\left(B_j+(-1)^j C_j\right)sz\right]s^2e^{(-1)^j sz}J_0(sr)\,ds\end{gathered}\quad (1.6)$$

$$\begin{gathered}\tau_{rz}^{(j)}(r,z)=2\int_0^\infty\left[(-1)^j\theta_2^{(j)}B_j-\theta_1^{(j)}C_j\right]s^2e^{(-1)^j sz}J_1(sr)\,ds+\\ +2\mu_j\int_0^\infty\left[\theta_3^{(j)}\left(B_j+(-1)^j C_j\right)sz\right]s^2e^{(-1)^j sz}J_1(sr)\,ds\end{gathered}\quad (1.7)$$

где

$$\theta_1^{(j)}=\frac{\mu_j^2}{\lambda_j+3\mu_j};\quad \theta_2^{(j)}=\frac{\mu_j\left(\lambda_j+2\mu_j\right)}{\lambda_j+3\mu_j};\quad \theta_3^{(j)}=\frac{\lambda_j+\mu_j}{\lambda_j+3\mu_j}\quad (j=1,2)$$

$J_k(x)$ $(k=0,1)$–функции Бесселя, B_j,C_j $(j=1,2)$–неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Выразив при помощи условий (1.2) и (1.3) постоянные B_j,C_j $(j=1,2)$ через компоненты напряжений и смещений, действующих в зоне контакта, и удовлетворив условиям

$$\begin{aligned}&\sigma_z^{(2)}(r,0)=\sigma(r);\ \tau_{rz}^{(2)}(r,0)=\tau(r)\\ &u_1(r,0)=u(r);\ w_1(r,0)=w(r)\end{aligned}\qquad r\in(0;a)$$

придем к следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}&\theta_2^{(2)}L_{0,0}^2[w]-\theta_1^{(2)}L_{0,1}^2[u]=\frac{\sigma(r)}{2}\\ &-\theta_1^{(2)}L_{1,0}^2[w]+\theta_2^{(2)}L_{1,1}^2[u]=\frac{\tau(r)}{2}\\ &-\theta_1^{(1)}L_{1,0}^0[\sigma]+\theta_2^{(1)}L_{1,1}^0[\tau]=2\left[\left(\theta_1^{(1)}\right)^2-\left(\theta_2^{(1)}\right)^2\right]u(r)-f_1(r)\\ &\theta_2^{(1)}L_{0,0}^0[\sigma]-\theta_1^{(1)}L_{0,1}^0[\tau]=2\left[\left(\theta_1^{(1)}\right)^2-\left(\theta_2^{(1)}\right)^2\right]w(r)-f_2(r)\end{aligned}\qquad (0<r<a)\ (1.8)$$

где

$$L_{m,n}^{k}(\varphi)=\int_0^a W_{m,n}^{k}(r,\xi)\xi\varphi(\xi)\,d\xi;\qquad W_{m,n}^{k}=\int_0^\infty t^k J_m(tr)J_n(t\xi)dt$$

$$f_1(r)=\theta_1^{(1)}\overline{L}_{1,0}^{0}[P_0]-\theta_2^{(1)}\overline{L}_{1,1}^{0}[\tau_0]$$

$$-f_2(r)=-\theta_2^{(1)}\overline{L}_{0,0}^{0}[P_0]+\theta_1^{(1)}\overline{L}_{0,1}^{0}[\tau_0]$$

$$\overline{L}_{m,n}^{k}=\int_a^\infty W_{m,n}^{k}(r,\xi)\xi\varphi(\xi)\,d\xi$$

Чтобы построить замкнутое решение системы (1.8), введем новые функции по формулам [4]

$$\begin{aligned}\{w_*(t);\sigma_*(t)\}&=\frac{2}{\pi}\int_t^a\frac{\xi\{w(\xi);\sigma(\xi)\}}{\sqrt{\xi^2-t^2}}d\xi;\\ \{u_*(t);\tau_*(t)\}&=\frac{2t}{\pi}\int_t^a\frac{\{u(\xi);\tau(\xi)\}}{\sqrt{\xi^2-t^2}}d\xi;\end{aligned}\tag{1.9}$$

и продолжим их на интервал $(-a;0)$, соответственно, четным и нечетным образом. Тогда, применяя к обеим сторонам второго и третьего уравнений (1.8) оператор J^*, а к остальным двум – оператор I^* [4]

$$J^*(\varphi(x))=\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}\int_0^y\varphi(r)dr;\quad I^*(\varphi(x))=\int_0^x\frac{\varphi(r)rdr}{\sqrt{x^2-r^2}}$$

и введя комплексные функции

$$\chi(x)=\sigma_*(x)+i\tau(x);\ V'(x)=\theta_2^{(2)}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x}-i\frac{\partial w^*}{\partial x}\right)\tag{1.10}$$

после несложных математических выкладок, придем к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}V'(x)+\frac{ib_1^*}{\pi}\int_{-a}^a\frac{V'(t)}{t-x}dt+\frac{ia_1}{\pi}\int_{-a}^a\frac{\chi(t)}{t-x}dt&=F(x)\\ \chi(x)+\frac{ia_2}{\pi}\int_{-a}^a\frac{\chi(t)}{t-x}dt-\frac{ib_2^*}{\pi}\int_{-a}^a\frac{V'(t)}{t-x}dt&=G(x)\end{aligned}\tag{1.11}$$

Здесь

$$F(x) = -\frac{2}{\pi}C_1, \quad C_1 = \int_0^a \frac{\tau_*(t)}{t}dt - 2i\theta_1^{(2)}\int_0^a \frac{1}{t}\frac{\partial w^*}{\partial t}dt - \pi\theta_2^{(2)}\frac{du^*(0)}{dt}$$

$$G(x) = \frac{i\theta_2^{(1)}}{\left[\left(\theta_1^{(1)}\right)^2 - \left(\theta_2^{(1)}\right)^2\right]}\frac{d}{dx}\left[f_1^*(x) + if_2^*(x)\right] \tag{1.12}$$

$$f_1^*(x) = J^*\left[f_1(x)\right]; \quad f_2^*(x) = I^*\left[f_2(x)\right]$$

$$a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{\theta_1^{(1)}}{\theta_2^{(1)}}; \quad b_1^* = \frac{\theta_1^{(2)}}{\theta_2^{(2)}}; \quad b_2^* = \frac{2\left[\left(\theta_2^{(1)}\right)^2 - \left(\theta_1^{(1)}\right)^2\right]}{\theta_2^{(2)}\theta_2^{(1)}}$$

2. Приступим к решению системы интегральных уравнений (1.11). Заметим, что эта система качественно не отличается от систем, полученных в работах [5,6], и ее решение можно построить сведением к двум независимым сингулярным интегральным уравнениям в случае, когда квадратное уравнение

$$a_1\lambda^2 + \left(a_2 - b_1^*\right)\lambda + b_2^* = 0 \tag{2.1}$$

имеет два различных корня, или же к поочередному интегрированию двух сингулярных интегральных уравнений в случае, когда уравнение (2.1) имеет один корень [5].

Далее будем рассматривать только случай, когда уравнение (2.1) имеет два различных корня. В этом случае, умножив первое уравнение (1.11) поочередно на λ_1 и λ_2 и суммируя со вторым, получим следующие два независимые сингулярные интегральные уравнения второго рода

$$\varphi_j(x) + \frac{iq_j}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi_j(s)}{s-x}ds = F_j(x) \qquad (-a < x < a) \tag{2.2}$$

где

$$\varphi_j(x) = \chi(x) + \lambda_j V'(x), \quad F_j(x) = G(x) + \lambda_j F(x)$$

$$q_j = \frac{a_2 + b_1^* - (-1)^j\sqrt{\left(a_2 - b_1^*\right)^2 - 4a_1b_2^*}}{2}$$

$$\lambda_j = \frac{-\left(a_2 - b_1^*\right) + (-1)^j\sqrt{\left(a_2 - b_1^*\right)^2 - 4a_1b_2^*}}{2a_1} \qquad (j = 1,2)$$

При решении уравнений (2.2) нужно учесть тот факт, что применение операторов вращения приводит к понижению порядка особенности искомых функций в концевых точках на $1/2$. Исходя из этого, искомые функции

$\varphi_j(x)$ $(j=1,2)$ в концевых точках интервала $(-a;a)$ должны иметь особенность ниже $1/2$. Следовательно, в концевых точках, где особенность превышает $1/2$, нужно взять ограниченные решения.

Учитывая вышесказанное, для решений интегральных уравнений (2.2) получим выражение [7,8]

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{1-q_j^2}\left(F_j(x) + \frac{q_j\omega_j(x)}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{F_j(s)ds}{\omega_j(s)(s-x)}\right) \tag{2.3}$$

Здесь

$$\omega_j(x) = \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{\gamma_j}; \quad \gamma_j = \begin{cases}\gamma_j' & 0<\theta_j=\arg(g_j)<\pi \\ 1-\gamma' & \pi<\theta_j=\arg(g_j)<2\pi\end{cases}$$

$$\gamma_j' = \frac{1}{4\pi i}\ln|g_j| + \frac{\theta_j}{2\pi}; \qquad g_j = \frac{1+q_j}{1-q_j}2.3$$

Нетрудно проверить, что в случае действительных корней уравнения (2.1) числа g_j $(j=1,2)$ являются действительными положительными числами, вследствие чего точки $\pm a$ являются концами автоматической ограниченности [8]. В выражении функции $F_j(x)$ фигурирует константа C_1, которую можно определить подстановкой значений найденных приведенных напряжений и смещений в (1.12). Однако, более проще использовать равенство нулю компонентов смещения в концевых точках трещин, т.е. условия

$$u(a) = w(a) = 0$$

которые посредством функций $\varphi_j(x)$ $(j=1,2)$ можно записать в следующем виде:

$$\int_{-a}^{a}\left[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\right] = 0 \tag{2.4}$$

Подставляя сюда значения функций $\varphi_j(x)$ $(j=1,2)$ из (2.3), для константы C_1 получим выражение

$$C_1 = -\frac{q_1q_2}{2i(\lambda_2q_1-\lambda_1q_2)}\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{1-q_j^2}}\int_{-a}^{a}\frac{G(x)}{\omega_j(x)}dx \tag{2.5}$$

Контактные напряжения и смещения в зоне контакта при помощи функций $\varphi_j(x)$ $(j=1,2)$ задаются следующими формулами:

$$\sigma(r) = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_r^a s\,\mathrm{Re}\left[\frac{\lambda_2\varphi_1(s) - \lambda_1\varphi_2(s)}{\lambda_2 - \lambda_1}\right]\left(s^2 - r^2\right)^{-\frac{1}{2}} ds$$
$$\tau(r) = -\frac{d}{dr}\int_r^a \mathrm{Im}\left[\frac{\lambda_2\varphi_1(s) - \lambda_1\varphi_2(s)}{\lambda_2 - \lambda_1}\right]\left(s^2 - r^2\right)^{-\frac{1}{2}} ds \tag{2.6}$$

$$u(r) = -\frac{d}{dr}\int_r^a \mathrm{Re}\left[\int_{-a}^{s}\frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{\lambda_2 - \lambda_1}dx\right]\left(s^2 - r^2\right)^{-\frac{1}{2}} ds$$
$$w(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_r^a s\,\mathrm{Im}\left[\int_{-a}^{s}\frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{\lambda_2 - \lambda_1}dx\right]\left(s^2 - r^2\right)^{-\frac{1}{2}} ds$$

В частном случае поставленной задачи, когда пространство однородное, имеем

$$\lambda_j = \frac{-(-1)^j i\sqrt{\varepsilon}}{1-\nu};\quad g_j = (-1)^{j+1} i\sqrt{\varepsilon};\quad q_j = \frac{1 - 2\nu - (-1)^j i\sqrt{\varepsilon}}{2(1-\nu)};\quad \gamma_1 = \frac{1}{4} - i\beta$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{4} + i\beta;\quad \omega_1(x) = \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{\frac{1}{4}-i\beta};\quad \omega_2(x) = \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{4}-i\beta}$$

Здесь ν –коэффициент Пуассона для материала пространства, а $\varepsilon = 3 - 4\nu$ –постоянная Мусхелишвили.

Для наглядности вычислим коэффициенты интенсивности контактных напряжений в концевой точке трещины $x = a$ для указанного частного случая. С этой целью заметим, что в этой точке функция $\varphi_1(x)$ равна нулю. Следовательно, особенность напряжений в точке $x = a$ обусловлена функцией $\varphi_2(x)$, которую можно представить в виде

$$\varphi_2(x) = \frac{\psi(x)}{(a-x)^{\frac{1}{4}-i\beta}} \tag{2.7}$$

где

$$\psi(x) = \frac{1}{1-q_2^2}\left\{(a-x)^{\frac{1}{4}-i\beta}F_2(x) + \frac{q_2(a+x)^{\frac{1}{4}-i\beta}}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{F_2(s)ds}{\omega_2(s)(s-x)}\right\}$$

ограниченная функция в точке $x = a$.

Тогда из первых двух соотношений (2.6) можем записать

$$\sigma(r)=-\frac{1}{2r}\operatorname{Re}\left\{\frac{d}{dr}\int_r^a\frac{s\varphi_1(s)ds}{\sqrt{s^2-r^2}}+\frac{d}{dr}\int_r^a\frac{\varphi(s,r)-\varphi(s,a)}{\sqrt{s-r}\,(a-s)^{\frac{1}{4}-i\beta}}ds+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3/4+i\beta)}{\Gamma(5/4+i\beta)}(a-r)^{\frac{1}{4}+i\beta}\frac{d\varphi(a,r)}{dr}-\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3/4+i\beta)}{\Gamma(1/4+i\beta)}\frac{(a-r)^{\frac{1}{4}+i\beta}}{a}\varphi(a,r)\right\}+ \tag{2.8}$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3/4+i\beta)}{a\Gamma(1/4+i\beta)}(a-r)^{\frac{-3}{4}+i\beta}\varphi(a,r)\right\}$$

$$\tau(r)=-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{\frac{d}{dr}\int_r^a\frac{\varphi_1(s)ds}{\sqrt{s^2-r^2}}+\frac{d}{dr}\int_r^a\frac{a\varphi(s,r)-s\varphi(s,a)}{as\sqrt{s-r}\,(a-s)^{\frac{1}{4}-i\beta}}ds-\right. \tag{2.9}$$

$$\left.-\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3/4+i\beta)}{\Gamma(5/4+i\beta)}\frac{(a-r)^{\frac{1}{4}+i\beta}}{a}\frac{d\varphi(a,r)}{dr}\right\}+\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3/4+i\beta)}{a\Gamma(1/4+i\beta)}(a-r)^{\frac{-3}{4}+i\beta}\varphi(a,r)\right\}$$

При выводе формул (2.8) и (2.9) использовано значение интеграла

$$\int_r^a\frac{ds}{\sqrt{s-r}\,(a-s)^{\alpha}}=(a-r)^{\frac{1}{2}-\alpha}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(3/4-\alpha)}$$

и обозначение

$$\varphi(r,s)=\frac{s\psi(s)}{\sqrt{s+r}}$$

Легко проверить, что первые слагаемые в формулах (2.8) и (2.9) ограничены в точке $r=a$. Следовательно,

$$K_I+iK_{II}=\sqrt{2\pi}\lim_{r\to a}\left[\sigma(r)+i\tau(r)\right](a-r)^{\frac{3}{4}-i\beta}=\frac{\pi\Gamma(3/4+i\beta)}{\sqrt{2}a\Gamma(1/4+i\beta)}\varphi(a,a)$$

Подставляя значение функции $\varphi(a,a)$, окончательно получим:

$$K_I+iK_{II}=\frac{\Gamma(3/4+i\beta)q_2(2a)^{-\frac{1}{4}-i\beta}}{i\sqrt{2}a\Gamma(1/4+i\beta)(1-q_2^2)}\int_{-a}^a\frac{F_2(s)ds}{\omega_2(s)(s-a)}$$

где K_I, K_{II} –коэффициенты интенсивности нормальных и тангенциальных напряжений, действующих в зоне контакта, в концевой точке трещины $x=a$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шерман Д.И. Смешанная задача теории потенциала и теории упругости для плоскости с конечным числом прямолинейных разрезов.// ДАН СССР. 1940. Т.27 №4. С.330-334

2. Черепанов Г.П. Решение одной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости.//ПММ. 1962. Т.26. Вып.5. С.907-912.
3. Попов Г.Я. О концентрации упругих напряжений возле тонкого отслоившегося включения. // В сб.: «Современные проблемы механики и авиации», посвященном И.Ф.Образцову. 1980. С.156-162.
4. Мхитарян С.М. Об одном классе смешанных задач теории упругости. Abstracts of Symposium “Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis” Dedicated to the Centenary of Academician N. Muskhelishvili – Tbilisi, 1991. P.35.
5. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. // Изв. НАН РА. Механика. 1995. Т.48, N4. С.57-65.
6. Акопян В.Н., Мирзоян С.Е., Даштоян Л.Л. Об одной осесимметричной смешанной задаче для составного пространства с монетообразной трещиной.//В сб.: ”Проблемы механики деформируемых тел”, посв. 90-летию Н.Х. Арутюняна, Изд. .”Гитутюн” НАН РА , 2003. С.68-76.
7. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука,1966.
8. Гахов Ф.Д. Краевые задачи М.: Наука. 1977. 640с.

Институт механики
НАН РА

Поступила в редакцию
12.05.2005