

УДК 531.36

СВЯЗЬ K_{Δ}^{ω} -УСТОЙЧИВОСТИ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ

Аванян В.Т., Аванян М. В.

Վ.Տ. Ավանյան, Մ. Վ. Ավանյան

K_{Δ}^{ω} -կայունության և էքսպոնենցիալ կայունության փոխադարձ կապը

Այս աշխատանքում դիտարկվել է էքսպոնենցիալ կայունության և K_{Δ}^{ω} -կայունության միջև կապը

Մտածվել է, որ ա) գծային համասեռ ավտոնոմ համակարգի տրիվիալ լուծման ասիմպտոտիկ K_{Δ}^{ω} -կայունությունից հետևում է նրա էքսպոնենցիալ կայունությունը, բ) նրե ոչ ավտոնոմ համակարգի տրիվիալ լուծման ասիմպտոտիկ K_{Δ}^{ω} -կայուն է, և գոյություն ունի ասիմպտոտիկ K_{Δ}^{ω} -կայունության մասին բերանի [1] պայմաններին բավարարող հերմիտյան ձև, սալս այդ համակարգի տրիվիալ լուծման էքսպոնենցիալ կայուն է:

V.T. Avanyan, M. V. Avanyan

The connection between the K_{Δ}^{ω} -stability and the exponential stability

There was considered the connection between the K_{Δ}^{ω} -stability and the exponential stability in this work. There were received, that a) the exponential stability of the trivial solution of the linear homogeneous autonomous system followed from it's asymptotic K_{Δ}^{ω} -stability, b) the trivial solution of the non-homogeneous system was exponentially stable, if the solution of the non-homogeneous system was asymptotically K_{Δ}^{ω} -stable and if it had the hermitian form, which satisfied to the conditions of the theorem of the asymptotic K_{Δ}^{ω} -stability.

В работе рассматривается связь экспоненциальной устойчивости с K_{Δ}^{ω} -устойчивостью.

Получено: а) из асимптотической K_{Δ}^{ω} -устойчивости тривиального решения линейной однородной автономной системы следует ее экспоненциальная устойчивость, б) если тривиальное решение неавтономной системы асимптотически K_{Δ}^{ω} -устойчиво и существует эрмитова форма, удовлетворяющая условиям теоремы об асимптотической K_{Δ}^{ω} -устойчивости, то тривиальное решение этой системы экспоненциально устойчиво.

Пусть тривиальное решение однородной линейной системы

$$\dot{x} = Ax \quad (1)$$

с постоянной матрицей A асимптотически K_{Δ}^{ω} -устойчиво при $t \rightarrow +\infty$, тогда эта система экспоненциально устойчива, т. е. каждое ее решение экспоненциально устойчиво.

Действительно, как известно [3], для асимптотической K_{Δ}^{ω} -устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову тривиального решения уравнения (1), необходимые и достаточные условия совпадают. Этим условием является отрицательность всех действительных частей

характеристических корней матрицы A . Но при этих условиях [4] тривиальное решение уравнения (1) экспоненциально устойчиво при $t \rightarrow +\infty$.

Таким образом, при асимптотической K_{Δ}^{α} -устойчивости тривиального решения уравнения (1) существуют две положительные постоянные Q и p , не зависящие от выбора решения $x(t) = x(t; t_0, x_0) \neq 0$ этого уравнения и такие, что для любого решения $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ выполняется неравенство

$$\|x(t)\| \leq Q \|x(t_0)\| \exp(-p(t-t_0)) \quad (t > t_0) \quad (2)$$

где начальный момент t_0 произволен.

А для любого другого решения $\xi(t)$ линейной однородной системы (1) в силу того, что разность $x(t) - \xi(t)$ также является решением этой системы, будет выполняться неравенство

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leq Q \|x(t_0) - \xi(t_0)\| \exp(-p(t-t_0)) \quad (3)$$

Таким образом, получили, что если линейная однородная система (1) асимптотически K_{Δ}^{α} -устойчива, то каждое ее решение экспоненциально устойчиво.

Для линейной системы с переменными коэффициентами из асимптотической устойчивости по Ляпунову ее тривиального решения, вообще говоря, не следует экспоненциальная устойчивость. Так как из K_{Δ}^{α} -устойчивости невозмущенного процесса всегда следует ее устойчивость по Ляпунову [3], поэтому для линейной системы с переменными коэффициентами из асимптотической K_{Δ}^{α} -устойчивости ее тривиального решения также, вообще говоря, не следует ее экспоненциальная устойчивость.

Пусть уравнение возмущенного процесса имеет вид

$$\dot{x} = X(t, x), \quad X(t, 0) = 0 \quad (4)$$

где

$$X(t, x) \in C_{t,x}^{(0,1)}(\mathfrak{Z}_t^+ \times \mathfrak{R}_x^n) \text{ и } \mathfrak{Z}_t^+ = \{a < t < \infty\} \quad (5)$$

Рассмотрим теперь случай, когда для тривиального решения неавтономной системы (4) одновременно имеет место и асимптотическая K_{Δ}^{α} -устойчивость, и экспоненциальная устойчивость при $t \rightarrow +\infty$.

Для этого докажем следующее утверждение при $\omega(t) \geq 1$, $t \in [t_0, \infty)$.

Теорема 1. Если в области (5) существует положительно определенная эрмитова форма

$$V(x) = (Bx, x) \quad (6)$$

с постоянной матрицей B , производная которой $\dot{V}(x)$ по времени t в силу системы (4) в области (5) является отрицательно определенной эрмитовой формой

$$\dot{V}(x) \leq -(Mx, x) = W(x) < 0, \|x\| \neq 0 \quad (7)$$

с постоянной матрицей M , то тривиальное решение системы (4) (т. е. невозмущенный процесс) одновременно и асимптотически K_{Δ}^{ω} -устойчиво, и экспоненциально устойчиво.

Доказательство. Пусть существует форма (6) со свойством (7) и $\omega(t) \geq 1$ на $[t_0, \infty)$. Тогда по лемме в [1] положительно определенную матрицу B представим в виде

$$B = K^{-1*} K^{-1} \quad (K = K_1 \cdots K_n)$$

где K_j ($j = 1, \dots, n$)- столбцы матрицы K имеют одинаковую эрмитову норму

$$\|K_j\| = \sqrt{n^{-1} Sp B^{-1}} = \alpha > 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (8)$$

При этом матрица $G = \alpha^{-1} K$ принадлежит классу K_{Δ}^1 - $n \times n$ -матриц над полем комплексных чисел, а функция

$$V_1(x) = (G^{-1}x, G^{-1}x) = \alpha^2 (K^{-1}x, K^{-1}x) = \alpha^2 V(x) \quad (9)$$

будет удовлетворять всем условиям теоремы об асимптотической K_{Δ}^1 -устойчивости [1] (из $\alpha(t) = \text{const}$, $\omega(t) \equiv 1$ следует $\alpha(t)/\alpha(t_0) = \omega(t)/\omega(t_0)$).

Но так как при $\omega(t) \geq 1$ из асимптотической K_{Δ}^1 -устойчивости всегда следует асимптотическая K_{Δ}^{ω} -устойчивость, то тривиальное решение системы (4) асимптотически K_{Δ}^{ω} -устойчиво при $t \rightarrow +\infty$.

При данных условиях экспоненциальную устойчивость при $t \rightarrow +\infty$ тривиального решения системы (4) доказал Красовский Н. Н. [4]. Не будет лишним, если мы это сделаем, используя при этом результаты, полученные в [2].

Так как матрица M положительно определенная, то по лемме [1], аналогично формуле (8), будем иметь

$$\sqrt{n^{-1} Sp M^{-1}} = \beta \quad (10)$$

С учетом (8) и (10) для собственных значений матриц B и M по формуле (1.13) в [2] будем иметь

$$n^{-1} \alpha^{-2} \leq \lambda_j(B) \leq n \alpha^2 m_1^{-2} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (11)$$

$$n^{-1} \beta^{-2} \leq \lambda_j(M) \leq n \beta^2 m_2^{-2} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (12)$$

где положительные числа m_1 и m_2 определяются по формуле (1.19) в [2] следующим образом:

$$m_1 = (\sqrt{n} \alpha)^{n-1}, \quad m_2 = (\sqrt{n} \beta)^{n-1}$$

В силу неравенств (11) и (12) соответственно имеем

$$n^{-1} \alpha^{-2} \|x\|^2 \leq V(x) \leq n \alpha^2 m_1^{-2} \|x\|^2 \quad (13)$$

$$n^{-1} \beta^{-2} \|x\|^2 \leq -W(x) \leq n \beta^2 m_2^{-2} \|x\|^2 \quad (14)$$

С учетом (7) из неравенства (14) имеем

$$n^{-1} \beta^{-2} \|x\|^2 \leq -\frac{dV}{dt} \leq n \beta^2 m_2^{-2} \|x\|^2 \quad (15)$$

Из (13) имеем неравенство

$$m_1^2 n^{-1} \alpha^{-2} V(x) \leq \|x\|^2 \leq n \alpha^2 V(x) \quad (16)$$

в силу которого следует неравенство

$$-n \alpha^2 V(x) \leq -\|x\|^2 \leq -m_1^2 n^{-1} \alpha^{-2} V(x)$$

Учитывая это, из (15) получим

$$\frac{dV}{V} \leq -\frac{m_1^2}{n^2 \alpha^2 \beta^2} dt \quad (17)$$

Интегрируя неравенство (17), при $t \geq t_0$ будем иметь

$$V(x(t)) \leq V(x(t_0)) \exp[-n^{-2} \alpha^{-2} \beta^{-2} m_1^2 (t - t_0)]$$

С учетом последнего неравенства из (16) получаем

$$\|x(t)\|^2 \leq n \alpha^2 V(x(t_0)) \exp[-n^{-2} \alpha^{-2} \beta^{-2} m_1^2 (t - t_0)] \quad \text{при } t \geq t_0$$

или так как из (13) следует

$$V(x(t_0)) \leq n \alpha^2 m_1^{-2} \|x_0\|^2$$

то можем записать

$$\|x(t)\|^2 \leq n^2 \alpha^4 m_1^{-2} \|x(t_0)\|^2 \exp[-n^{-2} \alpha^{-2} \beta^{-2} m_1^2 (t - t_0)].$$

Откуда при $t \geq t_0$ имеем

$$\|x(t)\| \leq Q \|x(t_0)\| \exp[-p(t - t_0)] \quad (18)$$

где $Q = \frac{n \alpha^2}{m_1}$, $p = \frac{m_1^2}{2n^2 \alpha^2 \beta^2}$, а $\|x(t_0)\|$ — достаточно мала.

Выполнение неравенства (18) означает экспоненциальная устойчивость тривиального решения системы (4).

Теорема доказана.

Таким образом, когда $\omega(t) \geq 1$ на $[t_0, \infty)$ при выполнении условий (6) и (7) тривиальное решение неавтономной системы (4) (т. е. невозмущенный процесс) одновременно и асимптотически K_Δ^n -устойчиво, и экспоненциально устойчиво при $t \rightarrow +\infty$.

Следующая теорема показывает, когда из асимптотической K_Δ^n -устойчивости тривиального решения неавтономной системы (4) следует ее экспоненциальная устойчивость.

Теорема 2. Если в области (5) функция $X(t, x)$ обладает ограниченными частными производными по координатам вектора x , тривиальное

решение уравнения (4) асимптотически K_{Δ}^{ω} -устойчиво при $t \rightarrow +\infty$ и существует функция Ляпунова $V(t, x)$, удовлетворяющая всем условиям теоремы об асимптотической K_{Δ}^{ω} -устойчивости [1], то тривиальное решение этого уравнения экспоненциально устойчиво при $t \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены, т. е. в уравнении (4) функция $X(t, x)$ обладает ограниченным частным производным по координатам вектора x в области (5) и существует положительно определенная эрмитова форма

$$V(t, x) = (B(t)x, x) \quad (B(t) = G^{-1*}(t)G^{-1}(t)) \quad (19)$$

где

$$n^{-1} \text{Sp} B^{-1}(t) = \omega^2(t) \leq \omega_0^2 < \infty \text{ на } [t_0, \infty)$$

полная производная которой по времени t , составленная в силу уравнения (4), является отрицательно определенной эрмитовой формой в области (5)

$$\left(\frac{dV}{dt} \right)_{(3.2.1)} = (\dot{B}(t)x, x) + (\text{grad} V, X) \quad (20)$$

В [2] при $t \in [t_0, \infty)$ доказаны неравенства

$$n^{-1} \omega_0^{-2} \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq n \omega_0^2 m^{-2} \|x\|^2 \quad (21)$$

$$\|B(t)\| \leq n \omega_0^2 m^{-2} \quad (22)$$

Так как $\text{grad} V = 2B(t)x$, то в силу (22) имеем

$$\|\text{grad} V\| \leq 2n \omega_0^2 m^{-2} \|x\|, \quad t \in [t_0, \infty) \quad (23)$$

Поскольку из ограниченности частных производных функции $X(t, x)$ по координатам вектора x в \mathfrak{R}_x^n следует выполнение условия Липшица

$$\|X(t, x) - X(t, y)\| \leq M \|x - y\|, \quad x, y \in \mathfrak{R}_x^n$$

то при $y = 0$ с учетом $X(t, 0) = 0$ имеем на $[t_0, \infty)$

$$\|X(t, x)\| \leq M \|x\| \quad (24)$$

Из неравенств (23) и (24) соответственно следует, что на $[t_0, \infty)$ выполняются неравенства

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} \leq \frac{2n \omega_0^2}{m^2} \|x\|, \quad X_i(t, x) \leq M \|x\| \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (25)$$

Для первого слагаемого в правой части (20) имеем на $[t_0, \infty)$ неравенство

$$\lambda_{\min}(\dot{B}(t)) \|x\|^2 \leq (\dot{B}(t)x, x) \leq \lambda_{\max}(\dot{B}(t)) \|x\|^2 \quad (26)$$

где $\lambda_{\min}(\dot{B}(t))$ и $\lambda_{\max}(\dot{B}(t))$ — соответственно минимальные и максимальные характеристические корни матрицы $\dot{B}(t)$ в точке $t \in [t_0, \infty)$. С учетом неравенства (25) и (26), из (20) в области (5) получаем неравенство

$$\dot{V}(t, x)_{(3.2.1)} \leq \left[\lambda_{\max}(\dot{B}(t)) + 2n^2 \omega_0^2 m^{-2} M \right] \|x\|^2 \quad (27)$$

Так как функция $V(t, x)$ в области (5) удовлетворяет всем условиям теоремы об асимптотической K_{Δ}^{σ} -устойчивости, а именно — функция $\dot{V}(t, x)_{(3.2.1)}$ отрицательно определенная, то из (27) в области (5) следует неравенство

$$\dot{V}(t, x)_{(3.2.1)} \leq -c \|x\|^2 \quad (0 < c = \text{const}) \quad (28)$$

т. е.

$$\lambda_{\max}(\dot{B}(t)) + 2n^2 \omega_0^2 m^{-2} M \leq -c$$

или

$$\lambda_{\max}(\dot{B}(t)) \leq -(c + 2n^2 \omega_0^2 m^{-2} M) \quad t \in [t_0, \infty) \quad (29)$$

В силу неравенств (21), (23) и (28) тривиальное решение уравнения (4) (невозмущенный процесс) экспоненциально устойчиво при $t \rightarrow +\infty$, потому что, как известно [4], если функция $X(t, x)$ непрерывна по t и x , имеет непрерывные и ограниченные частные производные по координатам вектора x , то для существования функции $V(t, x)$, удовлетворяющей условиям (21), (23), (28), необходимо и достаточно, чтобы тривиальное решение уравнения (4) (т. е. невозмущенный процесс) было экспоненциально устойчиво. Теорема доказана.

Заметим, что для выполнения неравенства (28) на $[t_0, \infty)$ достаточно, чтобы на $[t_0, \infty)$ выполнялось неравенство (29), т. е. все собственные значения матрицы $\dot{B}(t)$ были меньше некоторого отрицательного числа на $[t_0, \infty)$, т. е.

$$\lambda_i(\dot{B}(t)) \leq -(c + 2n^2 \omega_0^2 m^{-2} M) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (30)$$

Из (30) следует, что на $[t_0, \infty)$ выполняется неравенство

$$\text{Sp} \dot{B}(t) \leq -n(c + 2n^2 \omega_0^2 m^{-2} M) \quad (31)$$

хотя из (31), вообще говоря, не следует (30). Интегрируя неравенство (31) в пределах $[t_0, t]$ ($t \in [t_0, \infty)$), получим

$$\frac{\text{Sp} B(t) - \text{Sp} B(t_0)}{t - t_0} \leq -n \left(c + \frac{2n^2 \omega_0^2}{m^2} M \right) \quad (32)$$

Таким образом, получили, что если от асимптотической K_{Δ}^{σ} -устойчивости тривиального решения уравнения (4) следует его

экспоненциальная устойчивость при $t \rightarrow +\infty$, то след матрицы $B(t)$ функции Ляпунова этого уравнения на $[t_0, \infty)$ удовлетворяет соотношению (32). Этот факт можно считать свойством матрицы функции Ляпунова в данном случае.

Затем неравенство (32) можем записать в форме

$$\frac{\frac{1}{n} SpB(t) - \frac{1}{n} SpB(t_0)}{t - t_0} \leq - \left(c + \frac{2n^2 \omega_0^2}{m^2} M \right)$$

или

$$\frac{\omega^2(t) - \omega^2(t_0)}{t - t_0} \leq - \left(c + \frac{2n^2 \omega_0^2}{m^2} M \right)$$

Если функция $\omega(t)$ дифференцируема на $[t_0, \infty)$, то по теореме Лагранжа:

$$\frac{\omega^2(t) - \omega^2(t_0)}{t - t_0} = 2\omega(t_1)\omega'(t_1), \quad t_0 < t_1 < t$$

с учетом которого имеем

$$2\omega(t_1)\omega'(t_1) \leq - \left(c + 2n^2 m^{-2} \omega_0^2 M \right)$$

В силу произвольности интервала $[t_0, t)$, на $[t_0, \infty)$ имеем

$$\omega'(t) \leq - \frac{1}{2\omega(t)} \left(c + \frac{2n^2 \omega_0^2}{m^2} M \right)$$

Из неравенства $0 < \omega(t) \leq \omega_0 < \infty$ на $[t_0, \infty)$ имеем

$$\frac{1}{2\omega_0} \leq \frac{1}{2\omega(t)}$$

откуда

$$- \frac{1}{2\omega(t)} \left(c + \frac{2n^2 \omega_0^2}{m^2} M \right) \leq - \frac{1}{2\omega_0} \left(c + \frac{2n^2 \omega_0^2}{m^2} M \right)$$

С учетом последнего неравенства можем записать

$$\omega'(t) \leq - \frac{1}{2\omega_0} \left(c + \frac{2n^2 \omega_0^2}{m^2} M \right) < 0 \quad \text{на } [t_0, \infty) \quad (33)$$

Из (33) следует, что положительная функция $\omega(t)$ на $[t_0, \infty)$ монотонно убывает.

Таким образом, получили, что если из асимптотической K_δ^w -устойчивости невозмущенного процесса следует его экспоненциальная устойчивость, то положительная функция $\omega(t)$ убывает на $[t_0, \infty)$, т.е. монотонное убывание функции $\omega(t)$ на $[t_0, \infty)$ необходимо, но не

достаточно, чтобы из асимптотической K_A^{α} -устойчивости невозмущенного процесса следовала его экспоненциальная устойчивость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абгарян К. А., Аванян В. Т. К теории устойчивости процессов на заданном промежутке времени. Методы теории дифференциальных уравнений и их приложения. // Тематический сб. науч. трудов МАИ. 1975. Вып. 339. С. 5-11.
2. Аванян В. Т., Аванян М. В. Об обратимости основных теорем о K_A^{α} -устойчивости. // Вестник "МАНЕБ". 2004. Т. 9. № 8. С. 237-240.
3. Абгарян К.А., Аванян В.Т. К теории устойчивости на заданном интервале времени.// ПММ. 1977, Т. 41. № 5. С. 844-849.
4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз. 1959. 232 с.

Ереванский Госуниверситет
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
14.11.2003