ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №4, 2005 Механика

УДК 539.3

НЕОДНОРОДНЫЕ ЩЕЛЕВЫЕ ВОЛНЫ В СИСТЕМЕ ДВУХ УПРУГИХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ СО СВЕРХПРОВОДЯЩИМИ ПОКРЫТИЯМИ

Казарян Р.А.

Ռ.Ա. Ղազարյան

Անհամասեռ ճեղքային ալիքները գերհաղորդիչ ծածկույթով երկու առաձգական կիսատարածությունների համակարգում

Դիտարկված է ճեղքային անհամասեռ մակերևութային ալիքների տարածման խնդիր երկու առաձգական կիսատարածությունների համակարգում, որոնք առանձնացված են ճեղքով: Կիսատարածությունների մակերևույթները ծածկված են բարակ գերհաղորդիչ շերտով, որոնցով անցնում է էլեկտրական հոսանք: Ստացված են հարթ դեֆորմացիայի դեպքում մակերևութային ալիքների ֆազային արագությունների նկատմամբ բնութագրիչ հավասարումները: Ապացուցված է էլեկտրամագնիսական փոխազդեցության հետևանքով երկու կապակցված մագնիսաառաձգական մակերևույթային ալիքների գոյության հնարավորությունը:

R.A.Ghazaryan

Non- Homogeneous Slit Waves in a System of Two Elastic Half-Spaces with Superconducting Films

Non-homogeneous slit waves propagation problem is studied in a system of two elastic half-spaces divided by slit. Half-space surfaces are covered by superconducting current –carrying films with electrical current. In the case of plane deformation the dispersions equations are obtained for surface waves phase velocity. Due to electromagnetic interaction the possibility of two coupled surface waves existence is shown.

Рассматривается задача распространения неоднородных поверхностных щелевых волн в системе двух упругих полупространств, разделенных щелью. Поверхности полупространств покрыты тонким сверхпроводящим слоем, по которым течет электрический ток. В случае плоской деформации получены характеристические уравнения относительно фазовой скорости поверхностных волн. Показано, что вследствие электромагнитного взаимодействия возможно существование двух связанных магнитоупругих поверхностных волн.

Вопросы распространения щелевых волн в системе двух идеально проводящих полупространств, разделенных вакуумной щелью при наличии внешнего постоянного магнитного поля, изучены в работе [1]. Для системы пьезоэлектрических сред с щелью аналогичные исследования приводятся в [2]. Щелевые сдвиговые волны и вопросы туннелирования магнитоупругих волн в магнитострикционных средах исследованы в [3-5].

Здесь рассматривается задача распространения неоднородных поверхностных щелевых волн в системе двух полупространств, разделенных щелью толщиной $2d$. Поверхности полупространств покрыты тонким сверхпроводящим слоем, по которым течет электрический ток. Электромагнитные свойства среды в области щели отождествляются со свойствами вакуума. Полупространства являются упругими изотропными средами.

Выберем прямоугольную декартовую систему координат так, чтобы координатная плоскость (x_1, x_2) была расположена в середине щели. Ось x_3 направлена в сторону верхней среды, которую отметим индексом $(s = 1)$.

Нижнюю среду отметим индексом $(s=2)$. Начальное распределение электрического тока (вектор плотности $\vec{j}$) и магнитного поля (вектор $\vec{H}$) определяются на основе уравнений Лондонов [6].

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j},\quad \operatorname{div}\vec{H}=0,\quad \frac{4\pi\lambda^2}{c}\operatorname{rot}\vec{j}+\vec{H}=0,\quad \oint \vec{j}d\vec{s}=J_0 \tag{1}$$

В (1) c – электродинамическая постоянная, λ – лондоновская глубина проникновения, J_0 – заданная линейная плотность сверхтока.

Из симметрии задачи ясно, что $\vec{H}_0$ и $\vec{j}_0$ не зависят от переменных x_1 и x_2, а также , что

$$H_{01}=H_{03}=0,\quad j_{02}=j_{03}=0$$

Учитывая это, получим следующие исходные уравнения для определения распределения тока и магнитного поля:

$$j_{01}=-\frac{c}{4\pi}\frac{dH_{02}}{dx_3},\qquad \frac{d^2H_{02}}{dx_3^2}-\frac{1}{\lambda^2}H_{02}=0$$

$$H_{02}^{(s)}=C_1^{(s)}e^{-\frac{x_3}{\lambda}}+C_2^{(s)}e^{\frac{x_3}{\lambda}},\quad j_{01}^{(s)}=-\frac{c}{4\pi\lambda}\left(-C_1^{(s)}e^{-\frac{x_3}{\lambda}}+C_2^{(s)}e^{\frac{x_3}{\lambda}}\right),\quad (s=1,2) \tag{2}$$

В области $(s=1)$ должно быть $C_2^{(1)}=0$, а в области $(s=2)$ – $C_1^{(2)}=0$.

Из условия полного линейного тока

$$\int_d^\infty j_{01}^{(1)}dx_3=J_0,\qquad \int_{-\infty}^{-d} j_{01}^{(2)}dx_3=J_0 \tag{3}$$

определим неизвестные коэффициенты и, подставляя их в предыдущие равенства, получим следующие выражения, определяющие начальные распределения тока и магнитного поля:

$$H_{02}^{(1)}=\frac{4\pi}{c}J_0e^{\frac{1}{\lambda}(d-x_3)}\qquad j_{01}^{(1)}=\frac{1}{\lambda}e^{\frac{d-x_3}{\lambda}}\qquad x_3\geq d$$

$$H_{02}^{(2)}=\frac{4\pi}{c}J_0e^{\frac{1}{\lambda}(d+x_3)}\qquad j_{01}^{(2)}=-\frac{1}{\lambda}e^{\frac{d+x_3}{\lambda}}\qquad x_3\leq -d \tag{4}$$

В области щели имеем

$$H_{02}=\frac{4\pi J_0}{c}=\text{const} \tag{5}$$

Из (4, 5) следует, что как ток, так и магнитное поле, распределены в тонких приповерхностных слоях толщины $\lambda\ll d$ (эффект Мейснера–Оксенфельда [6]). Практически, для всех известных сверхпроводников $\lambda\sim10^{-4}$ см и в пределе при $\lambda\to0$ имеем , что магнитное поле не проникает в упругие среды.

В дальнейшем примем, что $H_{02}^{(1)}=H_{02}^{(2)}=0$. В силу отсутствия в упругих средах магнитного поля на поверхностях полупространств $x_3=\pm d$

действует начальная магнитная нагрузка, обусловленная разрывом тензора Максвелла $\tilde{T}$ [3,7].

$$\tilde{T}_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(H_{0i}H_{0k} - \frac{1}{2}\delta_{ik}\vec{H}_0\vec{H}_0\right), \quad \tilde{T}_{33} = -\frac{1}{8\pi}H_0^2, \quad (s=1,2)$$

$$\sigma_{33}^{(0s)} = \tilde{T}_{33} \qquad \text{при} \qquad x_3 = \pm d \tag{6}$$

Считая напряженное состояние в упругих средах одномерным, получим

$$\sigma_{33}^{(0s)} = -\frac{H_{02}^2}{8\pi}$$

Вопрос распространения упругих волн изучим с учетом начального напряжения $\sigma_{33}^{(0s)}$. Рассмотрим случай плоской деформации, когда упругие перемещения не зависят от координаты x_1. Будем исходить из следующих линеаризированных динамических уравнений и граничных условий теории упругости с учетом начального напряженного состояния σ_{jk}^{0} [3, 7]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(s)}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{jk}^{0}\frac{\partial U_i^{(s)}}{\partial x_k}\right) = \rho_s \ddot{U}_i^{(s)} \tag{7}$$

$$\sigma_{ij}^{(s)} \cdot n_j^{0s} + \sigma_{jk}^{0}\frac{\partial U_i^{(s)}}{\partial x_k} n_j^{0s} = \left(T_{ij} - T_{ij}^{(s)}\right) n_j^{0s} \tag{8}$$

$$s = 1, 2; \quad U_1^{(s)} \equiv 0, \quad U_2^{(s)} = U_2^{(s)}(x_2, x_3), \quad U_3^{(s)} = U_3^{(s)}(x_2, x_3)$$

В (7, 8) $\sigma_{ij}^{(s)}$ есть компоненты тензора упругих напряжений, $U_i^{(s)}$ – упругие перемещения, ρ_s – плотность материалов сред, $n_i^{(0s)}$ – вектор внешней нормали к недеформированным поверхностям сред, T_{ij} – тензор Максвелла в области щели, $T_{ij}^{(s)}$ – тензор Максвелла в упругих средах. В силу того, что в упругой среде $H_0^{(s)} = 0$, имеем $T_{ij}^{(s)} = 0$.

Тензор Максвелла выражается через компоненты векторов магнитных полей возмущенного состояния $\vec{h}$ и начального состояния $\vec{H}_0$ следующим образом [3, 7]:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(H_{0i}h_k + H_{0k}h_i - \delta_{ik}\vec{H}_0 \cdot \vec{h}\right)$$
$$T_{33} = -\frac{1}{4\pi}H_{02}h_2, \quad T_{32} = \frac{1}{4\pi}H_{02}h_3 \tag{9}$$

Примем, что в области щели $|x_3| \le d$ вектор возмущенного магнитного поля удовлетворяет стационарным уравнениям Максвелла[7]

$$\operatorname{rot}\vec{h} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{h} = 0 \tag{10}$$

На поверхностях $x_3 = \pm d$ имеем следующие граничные условия непроникновения магнитного поля в толщу сверхпроводника [7]:

$$\left(\vec{H}_0+\vec{h}\right)\cdot\vec{n}=0 \tag{11}$$

где $\vec{n}$ есть вектор нормали к возмущенной поверхности

$$\vec{n}=\operatorname{grad}\left(U_3-x_3\right)=\frac{\partial U_3}{\partial x_2}\hat{x}_2-\hat{x}_3$$

Напишем (11) в более подробном виде

$$\left(H_{02}\hat{x}_2+h_2\hat{x}_2+h_3\hat{x}_3\right)\cdot\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2}\hat{x}_2-\hat{x}_3\right)=0$$

$$H_{02}\frac{\partial U_3}{\partial x_2}+h_2\frac{\partial U_3}{\partial x_2}-h_3=0 \tag{12}$$

Пренебрегая членом $h_2\dfrac{\partial U_3}{\partial x_2}$, как малым более высокого порядка, получим линеаризированное граничное условие при $x_3=\pm d$

$$h_3=H_{02}\frac{\partial U_3}{\partial x_2} \tag{13}$$

Уравнения и граничные условия (7, 8, 10, 13) вместе с законом Гука

$$\sigma_{ij}^{(s)}=2\mu^{(s)}\varepsilon_{ij}+\lambda^{(s)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij},\quad \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i^{(s)}}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j^{(s)}}{\partial x_i}\right)(i,j=2,3;\ s=1,2) \tag{14}$$

где $\mu^{(s)}$ и $\lambda^{(s)}$ есть постоянные Ламе, полностью определяют поставленную задачу.

Приступим к решению задачи. Представим перемещения $\vec{U}$ и вектор $\vec{h}$ в виде плоской неоднородной монохроматической волны

$$\vec{U}^{(s)}=\vec{U}_0^{(s)}(x_3)\cdot\exp i(kx_2-\omega t);\qquad \vec{h}=\vec{h}_0^{(s)}(x_3)\cdot\exp i(kx_2-\omega t) \tag{15}$$

Имеем следующие решения для компонент вектора возмущенного магнитного поля $\vec{h}$:

$$h_1=0 \tag{16}$$

$$h_3=\frac{ikH_{02}}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}kx_3}{\operatorname{sh}kd}\left(U_{03}(d)-U_{03}(-d)\right)+\frac{\operatorname{ch}kx_3}{\operatorname{ch}kd}\left(U_{03}(d)+U_{03}(-d)\right)\right)\exp i(kx_2-\omega t)$$

$$h_2=-\frac{kH_{02}}{2}\left(\frac{\operatorname{ch}kx_3}{\operatorname{sh}kd}\left(U_{03}(d)-U_{03}(-d)\right)+\frac{\operatorname{sh}kx_3}{\operatorname{ch}kd}\left(U_{03}(d)+U_{03}(-d)\right)\right)\exp i(kx_2-\omega t)$$

При $x_3=\pm d$ для компонент тензора Максвелла имеем

$$T_{33}(d)=\frac{kH_{02}^2}{8\pi}\left(\left(U_{03}(d)-U_{03}(-d)\right)\operatorname{cth}kd+\left(U_{03}(d)+U_{03}(-d)\operatorname{th}kd\right)\right)\exp i(kx_2-\omega t)$$

$$T_{33}(-d)=\frac{kH_{02}^2}{8\pi}\left[\left(U_{03}(d)-U_{03}(-d)\right)\operatorname{cth}kd-\left(U_{03}(d)+U_{03}(-d)\right)\operatorname{th}kd\right]\exp i(kx_2-\omega t)$$

$$T_{32}(d)=\frac{ikH_{02}^2}{4}U_{03}(d)\exp i(kx_2-\omega t) \tag{17}$$

$$T_{32}(-d)=\frac{ikH_{02}^2}{4}U_{03}(-d)\exp i(kx_2-\omega t)$$

В дальнейшем удобно выразить вектор $\vec{U}$ через скалярные потенциалы [7]

$$\vec{U}^{(s)}=\operatorname{grad}\Phi^{(s)}+\operatorname{rot}\left(\psi^{(s)}\hat{x}_1\right) \tag{18}$$

Для определения скалярных потенциалов получаются волновые уравнения

$$\left(2\lambda^{(s)}+\mu^{(s)}-\frac{H_{02}^2}{8\pi}\right)\Delta\Phi^{(s)}=\rho_{(s)}\ddot{\Phi}^{(s)};\qquad\left(\mu^{(s)}-\frac{H_{02}^2}{8\pi}\right)\Delta\psi^{(s)}=\rho_{(s)}\ddot{\psi}^{(s)} \tag{19}$$

Как известно, в сверхпроводниках значения магнитных полей ограничены определенными пределами, зависящими от материалов сверхпроводника. Здесь мы примем

$$\frac{3H_{02}^2}{8\pi}<<\mu,\qquad H_{02}^2<<\frac{4\pi E}{3(1+\nu)} \tag{20}$$

В силу принятого ограничения, в (19) не будем учитывать соответствующие слагаемые. Решение уравнений (19) будем искать в виде

$$\Phi^{(s)}=\Phi_0^{(s)}(x_3)\exp i(kx_2-\omega t);\Psi^{(s)}=i\Psi_0^{(s)}(x_3)\exp i(kx_2-\omega t) \tag{21}$$

Подставляя (21) в (19), получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2\Phi_0^{(s)}}{dx_3^2}-k^2\nu_{es}^2\Phi_0^{(s)}=0;\qquad\frac{d^2\Psi_0^{(s)}}{dx_3^2}-k^2\nu_{ts}^2\Psi_0^{(s)}=0 \tag{22}$$

где $$\nu_{es}^2=1-\frac{a^2}{a_{es}^2};\quad\nu_{ts}^2=1-\frac{a^2}{a_{ts}^2};\quad a=\frac{\omega}{k}$$

Из общих решений уравнений (22) выберем только те, которым соответствует уменьшение амплитуды при $x_3\to\pm\infty$. Точнее,

$$\begin{aligned}\Phi_0^{(1)}(x_3)&=A_1\exp(-k\nu_{e1}x_3);\quad\Psi_0^{(1)}(x_3)=B_1\exp(-k\nu_{t1}x_3)\\\Phi_0^{(2)}(x_3)&=A_2\exp(k\nu_{e2}x_3);\quad\Psi_0^{(2)}(x_3)=B_2\exp(k\nu_{t2}x_3)\end{aligned} \tag{23}$$

где A_i, B_i $(i=1,2)$–произвольные постоянные, подлежащие определению.

Удовлетворяя граничным условиям (8) с учетом (17,18), получим однородную алгебраическую систему уравнений относительно постоянных A_i, B_i. Приравняя к нулю определитель этой системы, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\left(R_1-\tilde{\beta}_1\operatorname{th}kd\right)\left(R_2-\tilde{\beta}_2\operatorname{cth}kd\right)+\left(R_1-\tilde{\beta}_1\operatorname{cth}kd\right)\left(R_2-\tilde{\beta}_2\operatorname{th}kd\right)=0 \tag{24}$$

Здесь приняты обозначения

$$\beta_1=\frac{H_{02}^2}{4\pi\rho_1a_{t1}^2},\quad\beta_2=\frac{H_{02}^2}{4\pi\rho_2a_{t2}^2},\ \tilde{\beta}_1=\beta_1\nu_{e1}\left(1-\nu_{t1}^2\right),\ \tilde{\beta}_2=\beta_2\nu_{e2}\left(1-\nu_{t2}^2\right)$$

$$R_1=\left(1+\nu_{t1}^2\right)^2-4\nu_{t1}\nu_{e1},\ R_2=\left(1+\nu_{t2}^2\right)^2-4\nu_{t2}\nu_{e2}$$

При $H_{02}=0$ уравнение (23) разделится на два отдельных уравнения $R_1=0$ и $R_2=0$, совпадающими с уравнением для поверхностных волн Рэлея.

При $kd>>1$ также имеем два раздельных уравнения.

$$\left(R_1-\tilde{\beta}_1\right)\left(R_2-\tilde{\beta}_2\right)=0 \qquad (25)$$

Последнее уравнение также разделится на два отдельных уравнения, определяющие поверхностные волны в средах

$R_1-\tilde{\beta}_1=0; \qquad R_2-\tilde{\beta}_2=0$.

Так как принято ограничение, что $\beta_i<<1$, то в этом случае, как показывает анализ, влияние малого магнитного поля несущественно .

В случае тонкой трещины, когда $kd<1$, влияние малого магнитного поля может быть существенным.

Подробно исследуем случай, когда материалы сред идентичны. В этом случае имеем, что $R_1=R_2=R;\quad \tilde{\beta}_1=\tilde{\beta}_2=\tilde{\beta}$

Из (24) получим следующее уравнение:

$$\left(R-\bar{\beta}\tanh kd\right)\left(R-\bar{\beta}\coth kd\right)=0$$

или $F_1(z)\cdot F_2(z)=0$,

где $$F_m(z)=\left(2-\frac{z^2}{a_t^2}\right)^2-4\sqrt{1-\frac{z^2}{a_t^2}}\sqrt{1-\frac{z^2}{a_e^2}}-\alpha_m\sqrt{1-\frac{z^2}{a_e^2}}\frac{z^2}{a_t^2} \quad m=1,2 \qquad (26)$$

$$\alpha_1=\beta_0\tanh kd\,,\ \alpha_2=\beta_0\coth kd\,,\ \beta_0=\frac{H_{02}^2}{4\pi\rho a_t^2}\,, z=\frac{\omega}{k}$$

Установим необходимое и достаточное условие существования поверхностной волны. Исследование проведем для уравнения $F_m(z)=0 \quad (m=1,2)$ на основе метода, развитого в работе [8].

Функция $F_m(z)$ в комплексной плоскости представляет собой многозначную функцию переменной z. С целью униформизации построим соответствующую поверхность Римана. Для этого проведем купюры между точками разветвления $\pm a_t$, $\pm a_e$. Разрезы проведем между точками $+a_t$ и $-a_t$, а точки $\pm a_e$ соединим по действительной оси через бесконечно удаленную точку. Исследование проведем на первом листе Римана, на котором выражения радикалов $\sqrt{1-z^2/a_t^2}$ и $\sqrt{1-z^2/a_l^2}$ при $z=0$ положительны.

Проведем полуокружность в нижней полуплоскости достаточно большого радиуса. Эта полуокружность с вещественной осью определяет замкнутую область, изучение которой является достаточным, так как в этой области на первом листе Римана имеем

$$\operatorname{Im}(\omega)<0,\quad \operatorname{Re}\left(\sqrt{1-\frac{z^2}{a_t^2}}\right)>0,\quad \operatorname{Re}\left(\sqrt{1-\frac{z^2}{a_l^2}}\right)>0$$

Разлагая функцию $F_m(z)$ по степеням z, для малых вещественных значений z имеем

$$F_m(z) \approx -2z^2\left(\frac{1+\alpha_m/2}{a_t^2} - \frac{1}{a_l^2}\right) < 0$$

Будем двигаться вдоль вещественной оси справа налево и следить за изменением аргумента функции $F_m(z)$.

При $z > a_l$ $\quad F_m(z) = P_1(z) + iQ_1(z)$,

где $P_1(z) = \left(2 - \frac{z^2}{a_t^2}\right)^2 + 4\sqrt{\frac{z^2}{a_t^2} - 1}\cdot\sqrt{\frac{z^2}{a_l^2} - 1}$, $\quad Q_1(z) = -\alpha_m\sqrt{\frac{z^2}{a_l^2} - 1}\cdot\frac{z^2}{a_t^2}$

Так как $P_1(z) > 0$, а $Q_1(z) < 0$, то в этом интервале $-\frac{\pi}{2} < \arg F_m(z) < 0$

при $z \to \infty$ вдоль действительной оси $\arg F_m(z) \to 0$.

Действительно,

$$\lim_{z\to\infty} \arg F_m(z) = \lim_{z\to\infty} \operatorname{arc\,tg}\frac{Q_1(z)}{P_1(z)} = \lim_{z\to\infty}\frac{-\alpha_m\sqrt{\frac{z^2}{a_l^2} - 1}\cdot\frac{z^2}{a_t^2}}{\left(2 - \frac{z^2}{a_t^2}\right)^2 + 4\sqrt{\frac{z^2}{a_t^2} - 1}\cdot\sqrt{\frac{z^2}{a_l^2} - 1}} = 0$$

В интервале (a_t, a_l) имеем $F_m(z) = P_2(z) + iQ_2(z)$, где

$$Q_2(z) = -4\sqrt{\frac{z^2}{a_t^2} - 1}\sqrt{1 - \frac{z^2}{a_l^2}}, \quad P_2(z) = \left(2 - \frac{z^2}{a_t^2}\right)^2 - \alpha_m\sqrt{1 - \frac{z^2}{a_l^2}}\cdot\frac{z^2}{a_t^2}$$

В этом интервале имеем $-\pi < \arg F_m(z) < 0$, так как $Q_2(z) < 0$.

В интервале $0, a_t$ функция $F_m(z)$ действительна и имеет вид (26). Допустим, что

$$F_m(a_t) = 1 - \alpha_m\sqrt{1 - a_t^2/a_l^2} > 0 \tag{27}$$

Так как в окрестности точки $z = 0$ $\quad F_m(z) < 0$, то в этом интервале действительный корень обязательно существует. Пусть этот корень единственный. Тогда приращение аргумента в интервале $(0,\ a_t)$ будет равняться $-\pi$. При обходе точки $z = 0$ оно изменится на -2π, так как функция $F_m(z)$ в точке $z = 0$ имеет порядок z^2.

В интервале $(-\infty,\ 0)$ в силу симметрии прирaращение аргумента равняется $-\pi$. При $z \to \infty$ $\quad F_m(z)$ имеет порядок z^4 и, следовательно, при обходе по нижней полуокружности аргумент $F_m(z)$ принимает приращение $+4\pi$. Окончательно, полное приращение аргумента по замкнутому контуру равно $-\pi - 2\pi - \pi + 4\pi = 0$.

Так как функция $F_m(z)$ не имеет полюсов, то это означает, что в нижней полуплоскости функция $F_m(z)$ не имеет корней.

Если допустим, что в интервале $(0, a_t)$ функция имеет больше одного корня, то число корней должно быть нечетным. Пусть $F_m(z)$ имеет в интервале $(0, a_t)$ $(2P+1)$ корней. Тогда, повторяя все предыдущие рассуждения, для полного приращения аргумента функции $F_m(z)$ получим $-(2p+1)\pi - 2\pi - (2p+1)\pi + 4\pi < 0$.

Это противоречит тому, что функция $F_m(z)$ не имеет полюсов.

Таким образом, доказано, что при условии (27) в интервале $(0, a_t)$ существует только один действительный корень, а в нижней полуплоскости $F_m(z)$ корней не имеет.

Рассмотрим случай

$$F_m(a_t) = 1 - \alpha_m \sqrt{1 - \frac{a_t^2}{a_l^2}} < 0$$

Тогда приращение аргумента в интервале (a_t, ∞) равняется $-\pi$. В интервале $(0, a_t)$ или вовсе нет корней, или их–четное число. Пусть в интервале $(0, a_t)$ функция $F_m(z)$ не имеет корней. Тогда полное приращение аргумента функции $F_m(z)$ при обходе по замкнутому контуру будет равняться $-\pi - 2\pi - \pi + 4\pi = 0$, то есть в нижней полуплоскости тоже нет корней.

Пусть число корней $2n$. Тогда полное приращение аргумента будет

$$-\pi - 2n\pi - 2\pi - 2n\pi - \pi + 4\pi = -4n\pi < 0$$

Это невозможно, так как $F_m(z)$ не имеет полюсов.

Таким образом, условие $F_m(a_t) > 0$ представляет собой необходимое и достаточное условие существования единственного действительного корня в интервале $(0, a_t)$.

Уравнение (26) имеет два корня, если $F_1(a_t) > 0$, $F_2(a_t) > 0$, то есть, если

$$\begin{cases} 1 - \beta_0 \mathrm{th}\left[kd\sqrt{1 - a_t^2 / a_l^2}\right] > 0 \\ 1 - \beta_0 \mathrm{cth}\left[kd\sqrt{1 - a_t^2 / a_l^2}\right] > 0 \end{cases} \qquad (28)$$

Так как $\beta_0 << 1$, то первое условие (48) всегда выполняется и, следовательно, уравнение (26) всегда имеет один корень. В случае тонкой щели $kd < 1$ в зависимости от значений интенсивности магнитного поля (тока) возможно существование и второй поверхностной волны. При $kd >> 1$ первое и второе уравнения системы (28) практически совпадают и в этом случае мы имеем поверхностную волну, скорость которой совпадает со скоростью волны Рэлея.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В. Щелевые магнитоупругие сдвиговые волны. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Изд. АН Арм. ССР. 1984. С. 70-74.
2. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240 с.
3. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван: Изв. ЕГУ, 1999, 440с.
4. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Саноян Л.А. Туннелирование сдвиговых волн через зазор между двумя магнитострикционными полупространствами// Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1989. Т.42. N4. С.30-36.
5. Саноян Л.А. Щелевые волны в магнитострикционных средах. //Уч. записки ЕГУ.1989.С.33-41.
6. Шмидт В.В. Введение в физику сверхпроводников.М.:Наука, 1982. 238с.
7. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272с.
8. Гоголадзе В.Г. Отражения и преломления упругих волн; общая теория граничных волн Рэлея. //Тр. Сейсмологического института АН СССР. 1947. № 125. С. 1-42.

Ереванский государственный
колледж информатики

Поступила в редакцию
3.10.2005