ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №4, 2005 Механика

УДК 539.3

ЛОКАЛИЗОВАННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНКИ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ СЖИМАЮЩЕЙ И РАСТЯГИВАЮЩЕЙ НАГРУЗОК

Чил- Акопян Э. О.

Է. Օ. Չիլ-Հակոբյան

Սալի տեղայնացված անկայունության խնդիրը սեղմող և ձգող լարումների միաժամանակ ազդեցության դեպքում:

Դիտարկված է կիսաանվերջ սալի տեղայնացված անկայունության խնդիրը, երբ այն հավասարաչափ սեղմված է կիսաանվերջ եզրի ուղղությամբ, և ձգված է վերջավոր եզրերի մոտ:

Ապացուցված է որ, ձգող լարումը չի ազդում տեղայնացված անկայունության գոյության պայմանի վրա, այլ բերում է կրիտիկական լարման մեծացմանը:

E.O. Chil-Akopyan

The Located Instability of the Plate at the Share Operation of Compressing and Stretching Loadings

The problem of the located instability of the semi-infinite plate-strip, which uniformly compressed on the semi-infinite sides and stretched on final crimps is investigated.

It is established, that the stretching loading does not influence on a condition of the existence of located instability, but results to increase of the critical loading.

Исследуется задача локализованной неустойчивости полубесконечной пластинки-полосы, равномерно сжатой по полубесконечным сторонам и растянутой по конечным кромкам.

Установлено, что растягивающая нагрузка не влияет на условие существования локализованной неустойчивости, но приводит к увеличению критической нагрузки.

1. В статье [1], по аналогии с задачей локализованных колебаний пластинки [2], приведена постановка и решение задачи локализованной неустойчивости сжатой пластинки. В дальнейшем различным вопросам исследования локализованной неустойчивости были посвящены статьи [3-8]. В настоящей работе локализованная неустойчивость рассматривается при совместном действии сжимающей и растягивающей нагрузок.

Пусть прямоугольная пластинка-полоса в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) занимает область $[0 \le x \le \infty,\ 0 \le y \le b,\ -h \le z \le h]$. Пластинка сжата по направлению Oy равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью P_0, а по оси Ox растянута равномерно распределенной нагрузкой Q.

Уравнение статической устойчивости тонких пластин на основе теории Кирхгофа [4] имеет вид:

$$D\Delta^2 w + P_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - Q\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{1.1}$$

где D – жесткость на изгиб пластинки, w – прогиб, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, Δ – двухмерный оператор Лапласа.

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \tag{1.2}$$

Принимаем, что кромки пластинки $y = 0,\ b$ шарнирно закреплены, т.е. граничные условия имеют вид:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{1.3}$$

В этом случае решение уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.3), представляется в следующем виде:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y\,, \ \lambda_n = n\pi/b\,,\ n = 1, 2, ... \tag{1.4}$$

На свободной от ограничений на перемещения кромке пластинки $x = 0$ приложена растягивающая нагрузка Q и, следовательно, граничные условия будут иметь вид:

$$M_x = 0,\ \bar{N}_x = Q\frac{\partial w}{\partial x} \tag{1.5}$$

С учетом выражений для изгибающего момента M_x и обобщенной перерезывающей силы $\bar{N}_x$ граничные условия (1.5) записываются следующим образом [9]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{1.6}$$

$$D\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = Q\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{при } x = 0$$

Если существует ненулевое (нетривиальное) решение уравнения устойчивости пластинки (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.3) и (1.6) и следующему условию затухания на бесконечности:

$$\lim_{x\to\infty} w = 0 \tag{1.7}$$

то принято считать, что имеет место локализованная неустойчивость пластинки [1].

Подстановка (1.4) в уравнения (1.1) приводит к решению последовательных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$f_n^{IV} - 2\lambda_n^2(1+\beta_n^2)f_n^{II} + \lambda_n^4\left(1-\alpha_n^2\right)f_n = 0 \tag{1.8}$$

где

$$\alpha_n^2 = P_0/D\lambda_n^2, \quad \beta_n^2 = Q/2\lambda_n^2 D \tag{1.9}$$

С учетом (1.4) граничные условия (1.6) имеют вид:

$$\begin{gathered} f_n^{II} - \nu\lambda_n^2 = 0 \\ f_n^{III} - \lambda_n^2(2-\nu+2\beta_n^2)f_n^{I} = 0 \end{gathered} \tag{1.10}$$

Условие затухания записывается так:

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0 \tag{1.11}$$

Таким образом, необходимо найти нетривиальные решения уравнений (1.8), удовлетворяющих граничным условиям (1.10) и условию затухания (1.11).

2. Нетрудно показать, что общие решения уравнений (1.8), удовлетворяющих условиям затухания (1.11), имеют вид:

$$f_n(x) = A_n e^{-\lambda_n p_1 x} + B_n e^{-\lambda_n p_2 x} \tag{2.1}$$

где

$$p_{1,2} = \left[1 + \beta_n^{\,2} \pm \sqrt{\beta_n^{\,2}(2+\beta_n^{\,2}) + \alpha_n^{\,2}}\,\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

Далее необходимо, чтобы выполнялись неравенства:

$$0 < \alpha_n^{\,2} < 1 \tag{2.3}$$

Данная формула представляет собой условие существования локализованного решения.

Требование, чтобы решения (2.1) удовлетворяли граничным условиям (1.10), приводит к решению следующей системы однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_n и B_n

$$\begin{aligned} &(p_1^{\,2} - \nu)A_n + (p_2^{\,2} - \nu)B_n = 0 \\ &p_1(p_1^{\,2} - 2 + \nu - 2\beta_n^{\,2})A_n + p_2(p_2^{\,2} - 2 + \nu - 2\beta_n^{\,2})B_n = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Система уравнений (2.4) имеет нетривиальное решение, если детерминант системы равен нулю, т.е.

$$\begin{aligned} k(\alpha_n) \equiv\ & p_2(p_1^{\,2} - \nu)(p_2^{\,2} - 2 + \nu - 2\beta_n^{\,2}) - \\ & - p_1(p_2^{\,2} - \nu)(p_1^{\,2} - 2 + \nu - 2\beta_n^{\,2}) = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) после некоторых преобразований приводится к виду:

$$k(\alpha_n) \equiv (p_2 - p_1)k_1(\alpha_n) = 0 \tag{2.6}$$

где

$$k_1(\alpha_n) = p_1^{\,2} p_2^{\,2} + 2(1 - \nu + \beta_n^{\,2})p_1 p_2 - \nu^2 \tag{2.7}$$

Очевидно, что $p_1 = p_2$, если $\alpha_n = \beta_n$ и в этом случае система (2.4) имеет только нулевое решение. Следовательно, задача приводится к нахождению параметра критической нагрузки α_n из следующего уравнения:

$$k_1(\alpha_n) = 0 \tag{2.8}$$

Локализованная неустойчивость имеет место, если уравнение (2.8) имеет корни, удовлетворяющие условиям (2.3). Легко проверить, что функция $k_1(\alpha_n)$ в промежутке (2.3) имеет следующие свойства:

$$\begin{aligned} &k_1(0) = (1-\nu)(3+\nu) + 2\beta_n^{\,2} > 0 \\ &k_1(1) = -\nu^2 < 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Отсюда следует, что если $\nu \neq 0$, то уравнение (2.8) всегда имеет корни, удовлетворяющие условиям (2.3).

3. Параметр критической нагрузки, согласно (2.8), определяется следующим образом:

$$\alpha_n^{\,2} = 1 - \nu^2 - 2(1 - \nu + \beta_n^{\,2})^2 + 2(1 - \nu + \beta_n^{\,2})^2 \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{(1 - \nu + \beta_n^{\,2})^2}} \tag{3.1}$$

Очевидно, что при $\beta >> 1$ $\alpha_n \to 1$.

В табл. 1 и 2 приводятся значения α_n^2 при различных значениях параметра сжимающей нагрузки и при $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.5$. Необходимо отметить, что минимальная критическая нагрузка получается при $n = 1$.

Таблица 1

$\nu_1 = 0.3$					
β_n^2	0	0,1	0,5	1,0	4
α_n^2	0,996	0,997	0,999	0,999	1

Таблица 2

$\nu_2 = 0.5$					
β_n^2	0	0,1	0,5	1,0	4
α_n^2	0,957	0,967	0,986	0,993	0,999

Из приведенных таблиц следует, что с увеличением растягивающей нагрузки критическая нагрузка, приводящая к потере устойчивости пластинки, увеличивается.

Для сравнительного анализа требуется также рассмотреть другие типы граничных условий при $x = 0$.

Пусть на краю $x = 0$ заданы условия скользящего контакта:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \tag{3.2}$$

или с учетом (1.4),

$$f_n^{I} = 0, \; f_n^{III} = 0 \tag{3.3}$$

Подстановка решений (2.1) в граничные условия (3.3) приводит к системе однородных алгебраических урувнений:

$$\begin{aligned} p_1 A_n + p_2 B_n &= 0 \\ p_1^3 A_n + p_2^3 B_n &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Из равенства нулю детерминанта системы (3.4)

$$p_1 p_2 (p_2^2 - p_1^2) = 0 \tag{3.5}$$

следует, что уравнение (3.5) не имеет корней, удовлетворяющих условию (2.3). Отсюда следует, что при граничных условиях скользящего контакта локализованная неустойчивость невозможна. Очевидно, что локализованная неустойчивость пластин невозможна также при условиях шарнирного закрепления и жесткого закрепления кромки пластинки $x = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М. В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки. // В сб.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван: Изд-во Ереванского Госунта. 1997. С. 95 – 99.
2. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «рэлеевского» типа. // Акуст. журн. 1960. Т 6. №1. С. 124–126.
3. Белубекян В. М. Локализованная неустойчивость сжатой пластинки. // В сб.: Проблемы механики твердых деформируемых тел. Ереван: Изд-во "Гитутюн", 2002. С.61–66.
4. Belubekyan V.M. On the problem of local buckling of a plate near its free edge. "Shell Structures: Theory and Applications". The 7-th Conference, Gdansk, University of Technology. Poland. 2002, P.55–56.
5. Белубекян В. М. К задаче устойчивости пластинки с учетом поперечных сдвигов. //Изв. РАН. МТТ. 2004. №2. С. 126–131.
6. Чил-Акопян Э.О. Задача локализованной неустойчивости двух прямоугольных пластинок, соединенных шарниром.// В сб.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван: Изд. ЕГУ, 2002. С.219-222.
7. Belubekyan M. V. On a Problem of the Located Instability of Compound Plate. // Докл. НАН Армении. 2004. Т.104. №3. С. 185-188.
8. Белубекян М. В., Чил-Акопян Э.О. К задаче локализованной неустойчивости прямоугольной пластинки со свободным краем. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №2. С. 34-39.
9. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1987. 360с.

Институт механики
НАН РА

Поступила в редакцию
2.02.2005