

УДК 539.3

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Оганесян Р.Ж.

Ռ.Ճ. Յովհաննիսյան

Երկչերտ օրթոտրոպ սալի սեփական տատանումները խառը եզրային պայմանների դեպքում

Լուծված է երկչերտ օրթոտրոպ սալի սեփական տատանումների վերաբերյալ առաձգականության տեսության եռաչափ դինամիկական խնդիրը, երբ շերտերից մեկի ստորին մակերևույթը կոշտ անբաժանելի է, իսկ մյուսի վերին մակերևույթը ազատ է, և շերտերի միջև տեղի ունեն լրիվ կոնտակտի պայմանները: Որոշված են լարումների քննարկի և տեղափոխության վեկտորի բաղադրիչների ասիմպտոտիկաները, սեփական տատանումների հաճախություններն ու տատանման ձևերը: Ցույց է տրված, որ տատանման ձևերը կշռով օրթոգոնալ են:

R.Zh. Hovhannisyan

Free vibrations of double-layer orthotropic plate under mixed-boundary conditions

The three-dimensional dynamic problem of the elasticity theory on free vibration of double-layer orthotropic plate is solved, when the lower bound of the second layer is rigidly fastened and the upper surface of the first layer is free. It is considered that full contact conditions exist between layers. The asymptotic forms for the components of stress tensor and displacement vector are found. The frequencies and forms of free vibrations are determined.

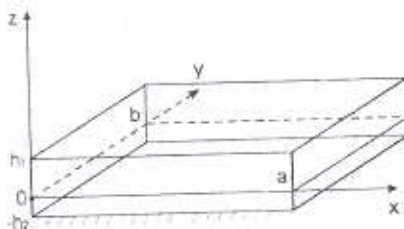
Решена трехмерная динамическая задача теории упругости о собственных колебаниях двухслойной ортотропной пластинки, когда нижняя грань второго слоя жестко закреплена, а лицевая поверхность первого слоя свободна. Считается, что между слоями имеют место условия полного контакта. Найдены асимптотики для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения. Определены частоты и формы собственных колебаний.

1. Для решения неклассических, с точки зрения теории пластин и оболочек, краевых задач особенно эффективным оказался асимптотический метод. Найдены решения новых классов статических и динамических краевых задач [1]. Обзор соответствующих работ проведен в [2]. Собственные колебания однослойной ортотропной пластинки рассмотрены в [3].

В работе рассматривается задача о собственных колебаниях двухслойной ортотропной пластинки

$$D = \{(x, y, z) : x \in [0, a], y \in [0, b], -h_2 \leq z \leq h_1, \max(h_1, h_2) \ll \min(a, b)\}$$

Предполагается, что нижняя грань нижнего слоя жестко закреплена, а верхняя грань верхнего слоя свободна, а между слоями имеют место условия полного контакта (фиг. 1).



Փիգ. 1

Имеем следующие граничные условия:

$$\sigma_{xz}^I = \sigma_{yz}^I = \sigma_{zz}^I = 0 \text{ при } z = h_1 \tag{1.1}$$

$$u'' = v'' = w'' = 0 \quad \text{при } z = -h_2$$

и условия контакта:

$$\sigma'_{xx}(z=0) = \sigma''_{xx}(z=0), \quad \sigma'_{yz}(z=0) = \sigma''_{yz}(z=0), \quad \sigma'_{zz}(z=0) = \sigma''_{zz}(z=0)$$

$$u'(z=0) = u''(z=0), \quad v'(z=0) = v''(z=0), \quad w'(z=0) = w''(z=0) \quad (1.2)$$

Требуется определить частоты собственных колебаний пластинки. Для этого необходимо найти ненулевое решение системы динамических уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела для ортотропных сред:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_{xx}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{xy}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{xz}^{(k)}}{\partial z} &= \rho_k \frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial t^2} & (x, y, z; u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}) \\ \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} &= a_{11}^{(k)} \sigma'_{xx}^{(k)} + a_{12}^{(k)} \sigma'_{yy}^{(k)} + a_{13}^{(k)} \sigma'_{zz}^{(k)}, & \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} &= a_{12}^{(k)} \sigma'_{xx}^{(k)} + a_{22}^{(k)} \sigma'_{yy}^{(k)} + a_{23}^{(k)} \sigma'_{zz}^{(k)} \\ \frac{\partial w^{(k)}}{\partial z} &= a_{13}^{(k)} \sigma'_{xx}^{(k)} + a_{23}^{(k)} \sigma'_{yy}^{(k)} + a_{33}^{(k)} \sigma'_{zz}^{(k)} & (1.3) \\ \frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} &= a_{66}^{(k)} \sigma'_{xy}^{(k)}, & \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial z} &= a_{55}^{(k)} \sigma'_{xz}^{(k)}, & \frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial z} &= a_{44}^{(k)} \sigma'_{yz}^{(k)} \end{aligned}$$

$$k = I, II$$

при граничных условиях (1.1) и условиях контакта (1.2). Здесь и в дальнейшем  $k = I$  соответствует верхнему слою, а  $k = II$  — нижнему. Искомые величины представим в виде:

$$\begin{aligned} \sigma'_{\alpha\beta}^{(k)}(x, y, z, t) &= \sigma_{ij}^{(k)}(x, y, z) \exp(i\omega t) & \alpha, \beta &= x, y, z \\ (u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}) &= (u_i^{(k)}, u_j^{(k)}, u_z^{(k)}) \exp(i\omega t) & i, j &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $\omega$  — искомая частота собственных колебаний. После подстановки (1.4) в (1.3), получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_{11}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{12}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{13}^{(k)}}{\partial z} + \rho_k \omega^2 u_i^{(k)} &= 0 & (x, y, z; 1, 2, 3) \\ \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x} &= a_{11}^{(k)} \sigma'_{11}^{(k)} + a_{12}^{(k)} \sigma'_{22}^{(k)} + a_{13}^{(k)} \sigma'_{33}^{(k)} & (x, y, z; 1, 2, 3) & (1.5) \\ \frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(k)}}{\partial x} &= a_{66}^{(k)} \sigma'_{12}^{(k)}, & \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial z} &= a_{55}^{(k)} \sigma'_{13}^{(k)}, & \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(k)}}{\partial z} &= a_{44}^{(k)} \sigma'_{23}^{(k)} \end{aligned}$$

$$k = I, II$$

В (1.5) перейдем к безразмерным переменным и безразмерным компонентам вектора перемещения:

$$\begin{aligned} \xi &= x/l, & \eta &= y/l, & \zeta &= z/h \\ U^{(k)} &= u_x^{(k)}/l, & V^{(k)} &= u_y^{(k)}/l, & W^{(k)} &= u_z^{(k)}/l \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $h = \max(h_1, h_2)$ ,  $l = \min(a, b)$  и  $h \ll l$ . В результате получим следующую сингулярно-возмущенную малым параметром  $\varepsilon = h/l$  систему:

$$\frac{\partial \sigma'_{11}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma'_{12}^{(k)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma'_{13}^{(k)}}{\partial \zeta} + \rho_k (\omega)^2 \varepsilon^{-2} U^{(k)} = 0 \quad (1, 2, 3; U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)})$$

$$\frac{\partial U^{(k)}}{\partial \xi} = a_{11}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} + a_{12}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} + a_{13}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)}, \quad \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \eta} = a_{12}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} + a_{22}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} + a_{23}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} \quad (1.7)$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \zeta} = a_{13}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} + a_{23}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} + a_{33}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)}$$

$$\frac{\partial U^{(k)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \xi} = a_{66}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)}, \quad \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \zeta} = a_{55}^{(k)} \sigma_{13}^{(k)},$$

$$\frac{\partial W^{(k)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \zeta} = a_{44}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)}$$

$$\omega_s = h \omega_s, \quad k = I, II.$$

Решение этой сингулярно-возмущенной системы будем искать в виде следующего асимптотического разложения:

$$\begin{aligned} \sigma_0^{(k)} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_0^{(k,s)}, \\ (U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)}) &= \varepsilon^s (U^{(k,s)}, V^{(k,s)}, W^{(k,s)}) \\ \omega_s^2 &= \varepsilon^s \omega_s^2, \quad k = I, II; \quad s = \overline{0, N} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Обозначение  $s = \overline{0, N}$  означает, что по немому (повторяющемуся) индексу  $s$  происходит суммирование от 0 до числа приближений  $N$ . Подставив (1.8) в (1.7) и применив правило Коши умножения рядов, для определения коэффициентов разложения (1.8), получим следующую непротиворечивую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{13}^{(k,s-1)}}{\partial \zeta} + \rho_k (\omega_{s,m})^2 U^{(k,s-m)} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(k,s-1)}}{\partial \zeta} + \rho_k (\omega_{s,m})^2 V^{(k,s-m)} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{33}^{(k,s-1)}}{\partial \zeta} + \rho_k (\omega_{s,m})^2 W^{(k,s-m)} &= 0 \quad m = \overline{0, s} \\ \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \xi} &= a_{11}^{(k)} \sigma_{11}^{(k,s)} + a_{12}^{(k)} \sigma_{22}^{(k,s)} + a_{13}^{(k)} \sigma_{33}^{(k,s)}, \\ \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \eta} &= a_{12}^{(k)} \sigma_{11}^{(k,s)} + a_{22}^{(k)} \sigma_{22}^{(k,s)} + a_{23}^{(k)} \sigma_{33}^{(k,s)}, \\ \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \zeta} &= a_{13}^{(k)} \sigma_{11}^{(k,s)} + a_{23}^{(k)} \sigma_{22}^{(k,s)} + a_{33}^{(k)} \sigma_{33}^{(k,s)} \\ \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \xi} &= a_{66}^{(k)} \sigma_{12}^{(k,s)}, \quad \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \zeta} = a_{55}^{(k)} \sigma_{13}^{(k,s)}, \\ \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \zeta} &= a_{44}^{(k)} \sigma_{23}^{(k,s)} \quad k = I, II \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$Q^{(k,s)} = 0 \text{ при } s < 0.$$

В (1.9) все величины можно выразить через  $U^{(k,s)}, V^{(k,s)}, W^{(k,s)}$  по формулам:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(k,s)} &= -A_{23}^{(k)} \frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \zeta} + A_{22}^{(k)} \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - A_{12}^{(k)} \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \\
\sigma_{22}^{(s)} &= -A_{13}^{(k)} \frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \zeta} - A_{12}^{(k)} \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + A_{33}^{(k)} \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \\
\sigma_{33}^{(s)} &= A_{11}^{(k)} \frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \zeta} - A_{23}^{(k)} \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^{(k)} \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \\
\sigma_{12}^{(k,s)} &= \frac{1}{a_{66}^{(k)}} \left[ \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \xi} \right], \quad \sigma_{13}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{55}^{(k)}} \left[ \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \zeta} \right] \\
\sigma_{23}^{(k,s)} &= \frac{1}{a_{44}^{(k)}} \left[ \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \zeta} \right] \quad k=1, II
\end{aligned} \tag{1.10}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{11}^{(k)} &= \frac{a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - a_{12}^{(k)2}}{\Delta^{(k)}}, \quad A_{22}^{(k)} = \frac{a_{22}^{(k)} a_{33}^{(k)} - a_{23}^{(k)2}}{\Delta^{(k)}}, \quad A_{33}^{(k)} = \frac{a_{11}^{(k)} a_{33}^{(k)} - a_{13}^{(k)2}}{\Delta^{(k)}} \\
A_{12}^{(k)} &= \frac{a_{33}^{(k)} a_{12}^{(k)} - a_{13}^{(k)} a_{23}^{(k)}}{\Delta^{(k)}}, \quad A_{13}^{(k)} = \frac{a_{11}^{(k)} a_{23}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)}}{\Delta^{(k)}}, \quad A_{23}^{(k)} = \frac{a_{22}^{(k)} a_{13}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{23}^{(k)}}{\Delta^{(k)}} \\
\Delta^{(k)} &= a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} a_{33}^{(k)} + 2 a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)} a_{23}^{(k)} - a_{22}^{(k)} a_{13}^{(k)2} - a_{11}^{(k)} a_{23}^{(k)2} - a_{33}^{(k)} a_{12}^{(k)2}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Для определения функций  $U^{(k,s)}, V^{(k,s)}, W^{(k,s)}$  получаются уравнения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^{(k)} \rho_k (\omega_m)^2 U^{(k,s-m)} &= R_U^{(k,s)} \\
\frac{\partial^2 V^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44}^{(k)} \rho_k (\omega_m)^2 V^{(k,s-m)} &= R_V^{(k,s)} \quad m = \overline{0,5} \\
A_{11}^{(k)} \frac{\partial^2 W^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + \rho_k (\omega_m)^2 W^{(k,s-m)} &= R_W^{(k,s)} \quad k=1, II
\end{aligned} \tag{1.12}$$

где

$$\begin{aligned}
R_U^{(k,s)} &= -\frac{\partial^2 W^{(k,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{55}^{(k)} \left[ \frac{\partial \sigma_{11}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right] \\
R_V^{(k,s)} &= -\frac{\partial^2 W^{(k,s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - a_{44}^{(k)} \left[ \frac{\partial \sigma_{12}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right] \\
R_W^{(k,s)} &= A_{23}^{(k)} \frac{\partial^2 U^{(k,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{13}^{(k)} \frac{\partial^2 V^{(k,s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial \sigma_{13}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_{23}^{(k,s-1)}}{\partial \eta}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Очевидно, что  $R_U^{(k,0)} = R_V^{(k,0)} = R_W^{(k,0)} = 0$ .

2. Для определения частот рассмотрим приближение  $s = 0$ . Уравнения (1.12) будут однородны и независимы, следовательно, их можно рассматривать как обыкновенные дифференциальные уравнения относительно  $U^{(k,0)}, V^{(k,0)}, W^{(k,0)}$ :

$$\frac{d^2 U^{(k,0)}}{d\zeta^2} - a_{55}^{(k)} \rho_k (\omega_0)^2 U^{(k,0)} = 0, \quad \frac{d^2 V^{(k,0)}}{d\zeta^2} + a_{44}^{(k)} \rho_k (\omega_0)^2 V^{(k,0)} = 0$$

$$A_{11}^{(k)} \frac{d^2 W^{(k,0)}}{d\zeta^2} + \rho_k (\omega_0)^2 W^{(k,0)} = 0 \quad k = I, II \quad (2.1)$$

Решив эти уравнения, получим:

$$\begin{aligned} U^{(k,0)} &= C_{U1}^{(k,0)}(\xi, \eta) \cos \sqrt{a_{55}^{(k)} \rho_k} \omega_0 \zeta + C_{U2}^{(k,0)}(\xi, \eta) \sin \sqrt{a_{55}^{(k)} \rho_k} \omega_0 \zeta \\ V^{(k,0)} &= C_{V1}^{(k,0)}(\xi, \eta) \cos \sqrt{a_{44}^{(k)} \rho_k} \omega_0 \zeta + C_{V2}^{(k,0)}(\xi, \eta) \sin \sqrt{a_{44}^{(k)} \rho_k} \omega_0 \zeta \\ W^{(k,0)} &= C_{W1}^{(k,0)}(\xi, \eta) \cos \sqrt{\frac{\rho_k}{A_{11}^{(k)}}} \omega_0 \zeta + C_{W2}^{(k,0)}(\xi, \eta) \sin \sqrt{\frac{\rho_k}{A_{11}^{(k)}}} \omega_0 \zeta \end{aligned} \quad (2.2)$$

Сначала рассмотрим первое уравнение (2.1) и соответствующее ему решение из (2.2). Из граничных условий (1.1) будем иметь:

$$\sigma_{13}^{(I,0)}(\zeta = \zeta_1) = 0, \quad \text{из (1.10)} \Rightarrow \left. \frac{\partial U^{(I,0)}}{\partial \zeta} \right|_{\zeta = \zeta_1} = 0 \quad (2.3)$$

$$U^{(II,0)}(\zeta = -\zeta_2) = 0$$

где  $\zeta_1 = h_1/h$ ,  $\zeta_2 = h_2/h$ . Подставив  $U^{(I,0)}$  из (2.2) в (2.3) и удовлетворив условия контакта (1.2), получим:

$$C_{U1}^{(I,0)} = C_{U1}^{(II,0)}, \quad C_{U2}^{(II,0)} = \sqrt{\frac{a_{55}^{II} \rho_I}{a_{55}^I \rho_{II}}} C_{U2}^{(I,0)} \quad (2.4)$$

а также алгебраическую систему:

$$\begin{cases} C_{U1}^{(I,0)} \sin \sqrt{a_{55}^I \rho_I} \omega_0 \zeta_1 - C_{U2}^{(I,0)} \cos \sqrt{a_{55}^I \rho_I} \omega_0 \zeta_1 = 0 \\ C_{U1}^{(II,0)} \cos \sqrt{a_{55}^{II} \rho_{II}} \omega_0 \zeta_2 - C_{U2}^{(II,0)} \sqrt{\frac{a_{55}^{II} \rho_I}{a_{55}^I \rho_{II}}} \sin \sqrt{a_{55}^{II} \rho_{II}} \omega_0 \zeta_2 = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Для существования ненулевого решения необходимо, чтобы определитель этой системы обращался в нуль. В результате получим следующее трансцендентное уравнение относительно  $\omega_0$ :

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{a_{55}^{II} \rho_I}{a_{55}^I \rho_{II}}} \sin \sqrt{a_{55}^I \rho_I} \omega_0 \zeta_1 \cdot \sin \sqrt{a_{55}^{II} \rho_{II}} \omega_0 \zeta_2 - \\ &\quad - \cos \sqrt{a_{55}^I \rho_I} \omega_0 \zeta_1 \cdot \cos \sqrt{a_{55}^{II} \rho_{II}} \omega_0 \zeta_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Точно так же, удовлетворив остальным условиям (1.1) и (1.2), получим уравнения:

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{a_{44}^{II} \rho_I}{a_{44}^I \rho_{II}}} \sin \sqrt{a_{44}^I \rho_I} \omega_0 \zeta_1 \cdot \sin \sqrt{a_{44}^{II} \rho_{II}} \omega_0 \zeta_2 - \\ &\quad - \cos \sqrt{a_{44}^I \rho_I} \omega_0 \zeta_1 \cdot \cos \sqrt{a_{44}^{II} \rho_{II}} \omega_0 \zeta_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{A_{11}^I \rho_I}{A_{11}^{II} \rho_{II}}} \sin \sqrt{\frac{\rho_I}{A_{11}^I}} \omega_0 \zeta_1 \cdot \sin \sqrt{\frac{\rho_{II}}{A_{11}^{II}}} \omega_0 \zeta_2 - \\ &\quad - \cos \sqrt{\frac{\rho_I}{A_{11}^I}} \omega_0 \zeta_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{\rho_{II}}{A_{11}^{II}}} \omega_0 \zeta_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Очевидно, что решения уравнения (2.6) не являются решениями уравнений (2.7) и (2.8), следовательно, определители систем алгебраических уравнений,

соответствующие  $V^{(k,0)}$  и  $W^{(k,0)}$ , будут отличны от нуля. Что означает, что если  $\omega_0$  является решением (2.6), то ему соответствует:

$$U^{(k,0)} \neq 0, \quad V^{(k,0)} = 0, \quad W^{(k,0)} = 0 \quad (2.9)$$

если же  $\omega_0$  является решением (2.7), то ему соответствует:

$$U^{(k,0)} = 0, \quad V^{(k,0)} \neq 0, \quad W^{(k,0)} = 0 \quad (2.10)$$

а если  $\omega_0$  является решением (2.8), то ему будет соответствовать:

$$U^{(k,0)} = 0, \quad V^{(k,0)} = 0, \quad W^{(k,0)} \neq 0 \quad (2.11)$$

Из вышесказанного следует, что в двухслойной пластинке возникают три типа собственных колебаний – два сдвиговых и одно продольное, частоты которых определяются соответственно из уравнений (2.6), (2.7) и (2.8).

Собственные функции можно привести к следующему виду:

$$U^{(I,0)} = C_U^{(I,0)} \cos \left[ \sqrt{a_{55}^I \rho_I} \omega_0 (\zeta - \zeta_1) \right], \quad U^{(II,0)} = C_U^{(II,0)} \sin \left[ \sqrt{a_{55}^{II} \rho_{II}} \omega_0 (\zeta + \zeta_2) \right] \quad (2.12)$$

а уравнения (2.6) – (2.8) – к следующему стандартному виду:

$$\cos p \omega_0 + r \cos q \omega_0 = 0 \quad (2.13)$$

где для уравнения (2.6):

$$p = \sqrt{a_{55}^I \rho_I} \zeta_1 + \sqrt{a_{55}^{II} \rho_{II}} \zeta_2, \quad q = \sqrt{a_{55}^I \rho_I} \zeta_1 - \sqrt{a_{55}^{II} \rho_{II}} \zeta_2, \quad r = \frac{\sqrt{a_{55}^I \rho_{II}} - \sqrt{a_{55}^{II} \rho_I}}{\sqrt{a_{55}^I \rho_{II}} + \sqrt{a_{55}^{II} \rho_I}} \quad (2.14)$$

для уравнения (2.7):

$$p = \sqrt{a_{44}^I \rho_I} \zeta_1 + \sqrt{a_{44}^{II} \rho_{II}} \zeta_2, \quad q = \sqrt{a_{44}^I \rho_I} \zeta_1 - \sqrt{a_{44}^{II} \rho_{II}} \zeta_2, \quad r = \frac{\sqrt{a_{44}^I \rho_{II}} - \sqrt{a_{44}^{II} \rho_I}}{\sqrt{a_{44}^I \rho_{II}} + \sqrt{a_{44}^{II} \rho_I}} \quad (2.15)$$

а для уравнения (2.8):

$$p = \sqrt{\frac{\rho_I}{A_{11}^I}} \zeta_1 + \sqrt{\frac{\rho_{II}}{A_{11}^{II}}} \zeta_2, \quad q = \sqrt{\frac{\rho_I}{A_{11}^I}} \zeta_1 - \sqrt{\frac{\rho_{II}}{A_{11}^{II}}} \zeta_2, \quad r = \frac{\sqrt{\frac{\rho_{II}}{A_{11}^I}} - \sqrt{\frac{\rho_I}{A_{11}^{II}}}}{\sqrt{\frac{\rho_{II}}{A_{11}^I}} + \sqrt{\frac{\rho_I}{A_{11}^{II}}}} \quad (2.16)$$

Поскольку  $r < 1$ , трансцендентное уравнение (2.13) имеет вещественные корни. Приведём значения некоторых первых частот собственных колебаний для двухслойного пакета, состоящего из слоев стеклопластика СТЭТ и АСТТ [1], при различных соотношениях толщин. В табл. 1–3 приведены значения первых пяти частот, соответствующих уравнениям (2.6), (2.7) и (2.8), соответственно.

Таблица 1

	$\omega_1 \text{ с}^{-1}$	$\omega_2 \text{ с}^{-1}$	$\omega_3 \text{ с}^{-1}$	$\omega_4 \text{ с}^{-1}$	$\omega_5 \text{ с}^{-1}$
	I слой – СТЭТ		II слой – АСТТ		
$h_1=0.2\text{м}, h_2=1\text{м}$	1448.46	4423.14	7536.17	10745.5	13998.2
$h_1=1\text{м}, h_2=0.2\text{м}$	1864.27	6165.98	10884.6	15255.1	18990.8
	I слой – АСТТ		II слой – СТЭТ		
$h_1=0.2\text{м}, h_2=1\text{м}$	2359.71	6696.35	10426.7	14692.6	19408.7
$h_1=1\text{м}, h_2=0.2\text{м}$	1629.23	4867.78	8040.06	11091.3	14013.4

Таблица 2

	$\omega_1 \text{ с}^{-1}$	$\omega_2 \text{ с}^{-1}$	$\omega_3 \text{ с}^{-1}$	$\omega_4 \text{ с}^{-1}$	$\omega_5 \text{ с}^{-1}$
I слой – СТЭТ			II слой – АСТТ		
$h_1=0.2\text{м}, h_2=1\text{м}$	1448.36	4421.06	7529.34	10731.9	13975.7
$h_1=1\text{м}, h_2=0.2\text{м}$	1846.91	6058.82	10669.5	14991.5	18705.6
I слой – АСТТ			II слой – СТЭТ		
$h_1=0.2\text{м}, h_2=1\text{м}$	2306.52	6575.05	10274	14427	19030.5
$h_1=1\text{м}, h_2=0.2\text{м}$	1623.94	4850.83	8008.44	11043.1	13956.9

Таблица 3

	$\omega_1 \text{ с}^{-1}$	$\omega_2 \text{ с}^{-1}$	$\omega_3 \text{ с}^{-1}$	$\omega_4 \text{ с}^{-1}$	$\omega_5 \text{ с}^{-1}$
I слой – СТЭТ			II слой – АСТТ		
$h_1=0.2\text{м}, h_2=1\text{м}$	2008.12	6153.4	10521.4	15043.1	19646.1
$h_1=1\text{м}, h_2=0.2\text{м}$	2821.95	10561.7	18902.3	24967.9	31753.4
I слой – АСТТ			II слой – СТЭТ		
$h_1=0.2\text{м}, h_2=1\text{м}$	4252.44	11153	17133.9	25429.1	33258.8
$h_1=1\text{м}, h_2=0.2\text{м}$	2323.8	6958.55	11549.3	16046.5	20372.4

Докажем, что собственные функции, соответствующие различным собственным значениям  $\omega_{n,m}$  и  $\omega_{k,m}$ , ортогональны с весом  $\sqrt{\rho_k}$  на интервале  $[-\zeta_2, \zeta_1]$ . Пусть в первом уравнении (2.1)  $\omega_{n_0} = \omega_{l_0 m}$ , а  $U^{(k,0)} = U_m^{(k,0)}$ , тогда

$$a_{55}^{(k)} \frac{d^2 U_m^{(k,0)}}{d\zeta^2} + a_{55}^{(k)} \rho_k (\omega_{l_0 m})^2 U_m^{(k,0)} = 0 \quad k = I, II \quad (2.17)$$

Умножив обе части уравнения (2.17) на  $U_n^{(k,0)}$  и рассматривая уравнение (2.17) для каждого слоя в отдельности, проинтегрируем обе части полученного уравнения в пределах  $[-\zeta_2; 0]$ , что соответствует второму слою и в пределах  $[0; \zeta_1]$  для первого слоя. В результате будем иметь:

$$\int_{-\zeta_2}^0 U_n^{(II,0)} \frac{d^2 U_m^{(II,0)}}{d\zeta^2} d\zeta + a_{55}^{II} \rho_{II} (\omega_{l_0 m})^2 \int_{-\zeta_2}^0 U_m^{(II,0)} U_n^{(II,0)} d\zeta = 0$$

$$\int_0^{\zeta_1} U_n^{(I,0)} \frac{d^2 U_m^{(I,0)}}{d\zeta^2} d\zeta + a_{55}^{I} \rho_I (\omega_{l_0 m})^2 \int_0^{\zeta_1} U_m^{(I,0)} U_n^{(I,0)} d\zeta = 0 \quad (2.18)$$

Произведя интегрирование, получим:

$$U_n^{(II,0)} \frac{dU_m^{(II,0)}}{d\zeta} \Big|_{-\zeta_2}^0 - \int_{-\zeta_2}^0 \frac{dU_n^{(II,0)}}{d\zeta} \frac{dU_m^{(II,0)}}{d\zeta} d\zeta + a_{55}^{II} \rho_{II} (\omega_{l_0 m})^2 \int_{-\zeta_2}^0 U_m^{(II,0)} U_n^{(II,0)} d\zeta = 0$$

$$U_n^{(I,0)} \frac{dU_m^{(I,0)}}{d\zeta} \Big|_0^{\zeta_1} - \int_0^{\zeta_1} \frac{dU_n^{(I,0)}}{d\zeta} \frac{dU_m^{(I,0)}}{d\zeta} d\zeta + a_{55}^{I} \rho_I (\omega_{l_0 m})^2 \int_0^{\zeta_1} U_m^{(I,0)} U_n^{(I,0)} d\zeta = 0 \quad (2.19)$$

Суммируя уравнения (2.19), учитывая (2.3) и условия контакта (1.2), получим:

$$-\frac{1}{a_{55}^{II}} \int_{-\zeta_2}^0 \frac{dU_n^{(II,0)}}{d\zeta} \frac{dU_m^{(II,0)}}{d\zeta} d\zeta - \frac{1}{a_{55}^{I}} \int_0^{\zeta_1} \frac{dU_n^{(I,0)}}{d\zeta} \frac{dU_m^{(I,0)}}{d\zeta} d\zeta +$$

$$+ \rho_{II} (\omega_{0m})^2 \int_{-\zeta_2}^0 U_m^{(II,0)} U_n^{(II,0)} d\zeta + \rho_I (\omega_{0m})^2 \int_0^{\zeta_1} U_m^{(I,0)} U_n^{(I,0)} d\zeta = 0 \quad (2.20)$$

Теперь, пусть в первом уравнении (2.1)  $\omega_{\alpha 0} = \omega_{0m}$ , а  $U^{(k,0)} = U_n^{(k,0)}$ , тогда, выполнив аналогичные действия, получим:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{a_{ss}^{II}} \int_{-\zeta_2}^0 \frac{dU_m^{(II,0)}}{d\zeta} \frac{dU_n^{(II,0)}}{d\zeta} d\zeta - \frac{1}{a_{ss}^I} \int_0^{\zeta_1} \frac{dU_m^{(I,0)}}{d\zeta} \frac{dU_n^{(I,0)}}{d\zeta} d\zeta + \\ & + \rho_{II} (\omega_{0m})^2 \int_{-\zeta_2}^0 U_n^{(II,0)} U_m^{(II,0)} d\zeta + \rho_I (\omega_{0m})^2 \int_0^{\zeta_1} U_n^{(I,0)} U_m^{(I,0)} d\zeta = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из соотношения (2.20) вычтя (2.21), получим:

$$\left( (\omega_{0m})^2 - (\omega_{0n})^2 \right) \left[ \rho_{II} \int_{-\zeta_2}^0 U_m^{(II,0)} U_n^{(II,0)} d\zeta + \rho_I \int_0^{\zeta_1} U_m^{(I,0)} U_n^{(I,0)} d\zeta \right] = 0 \quad (2.22)$$

Введем новые функции:

$$\varphi_m = \begin{cases} \sqrt{\rho_I} U_m^{(I,0)}; & 0 \leq \zeta \leq \zeta_1 \\ \sqrt{\rho_{II}} U_m^{(II,0)}; & -\zeta_2 \leq \zeta \leq 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

тогда соотношение (2.22) запишется в виде:

$$\left( (\omega_{0m})^2 - (\omega_{0n})^2 \right) \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_m \varphi_n d\zeta = 0 \quad (2.24)$$

при  $\omega_{0m} \neq \omega_{0n}$  из (2.24) следует:

$$\int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_m \varphi_n d\zeta = 0 \quad (2.25)$$

то есть функции  $\{\varphi_m\}$  составляют ортогональную систему на интервале  $[-\zeta_2, \zeta_1]$ .

**3. О приближениях  $s \geq 1$ .** Рассмотрим уравнения (1.12) при  $s = 1$ . Первое уравнение (1.12) при  $\omega_{\alpha 0}$ , которая является решением уравнения (2.6), примет вид:

$$\frac{d^2 U_n^{(k,1)}}{d\zeta^2} + a_{ss}^{(k)} \rho_k (\omega_{\alpha 0})^2 U_n^{(k,1-m)} = R_{U_n}^{(k,1)} \quad m = \overline{0,1}; \quad k = I, II \quad (3.1)$$

Решения  $U_n^{(k,1)}$  представим в виде рядов по собственным функциям нулевого приближения  $U_n^{(k,0)}$ :

$$U_n^{(k,1)} = \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm}^{(k)} U_m^{(k,0)} \quad k = I, II \quad (3.2)$$

Эти решения удовлетворяют граничным условиям (1.1), соответствующим  $n$  и  $\sigma_{\alpha}$ . Подставив (3.2) в (3.1) и учитывая (2.1), получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_{nm}^{(k)} a_{ss}^{(k)} \rho_k \left( (\omega_{\alpha 0})^2 - (\omega_{0m})^2 \right) U_m^{(k,0)} = -a_{ss}^{(k)} \rho_k (\omega_{\alpha 0})^2 U_n^{(k,0)} + R_{U_n}^{(k,1)} \quad k = I, II \quad (3.3)$$

При  $k = I$  уравнение (3.3), умножив на  $U_j^{(I,0)}$  и проинтегрировав по  $\zeta$  на интервале  $[0, \zeta_1]$ , получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_{nm}^I \left( (\omega_{\alpha 0})^2 - (\omega_{0m})^2 \right) \rho_I \int_0^{\zeta_1} U_m^{(I,0)} U_j^{(I,0)} d\zeta = \dots \quad (3.4)$$



$$= -(\omega_{1n})^2 \rho_I \int_0^{\zeta_1} U_n^{(I,0)} U_j^{(I,0)} d\zeta + \frac{1}{a_{55}^I} \int_0^{\zeta_1} R_{U_n}^{(I,1)} U_j^{(I,0)} d\zeta$$

а при  $k = II$ , умножив на  $U_j^{(II,0)}$  и проинтегрировав по  $\zeta$  на интервале  $[-\zeta_2, 0]$ , получим:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm}^{II} \left( (\omega_{0n})^2 - (\omega_{0m})^2 \right) \rho_{II} \int_{-\zeta_2}^0 U_m^{(II,0)} U_j^{(II,0)} d\zeta = & \quad (3.5) \\ = -(\omega_{1n})^2 \rho_{II} \int_{-\zeta_2}^0 U_n^{(II,0)} U_j^{(II,0)} d\zeta + \frac{1}{a_{55}^{II}} \int_{-\zeta_2}^0 R_{U_n}^{(II,1)} U_j^{(II,0)} d\zeta \end{aligned}$$

Удовлетворив условию контакта для  $U_n^{(k,1)}$ , будем иметь:

$$b_{nm}^I = b_{nm}^{II} = b_{nm} \quad (3.6)$$

Суммируя (3.4) и (3.5), получим:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \left( (\omega_{0n})^2 - (\omega_{0m})^2 \right) \times & \\ \times \left[ \int_{-\zeta_2}^0 \sqrt{\rho_{II}} U_m^{(II,0)} \sqrt{\rho_{II}} U_j^{(II,0)} d\zeta + \int_0^{\zeta_1} \sqrt{\rho_I} U_m^{(I,0)} \sqrt{\rho_I} U_j^{(I,0)} d\zeta \right] = & \quad (3.7) \\ = -(\omega_{1n})^2 \left[ \int_{-\zeta_2}^0 \sqrt{\rho_{II}} U_n^{(II,0)} \sqrt{\rho_{II}} U_j^{(II,0)} d\zeta + \int_0^{\zeta_1} \sqrt{\rho_I} U_n^{(I,0)} \sqrt{\rho_I} U_j^{(I,0)} d\zeta \right] + & \\ + \frac{1}{a_{55}^{II}} \int_{-\zeta_2}^0 R_{U_n}^{(II,1)} U_j^{(II,0)} d\zeta + \frac{1}{a_{55}^I} \int_0^{\zeta_1} R_{U_n}^{(I,1)} U_j^{(I,0)} d\zeta \end{aligned}$$

Учитывая (2.23), соотношение (3.7) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \left( (\omega_{0n})^2 - (\omega_{0m})^2 \right) \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_m \varphi_j d\zeta = -(\omega_{1n})^2 \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_n \varphi_j d\zeta + & \quad (3.8) \\ + \frac{1}{a_{55}^{II}} \int_{-\zeta_2}^0 R_{U_n}^{(II,1)} U_j^{(II,0)} d\zeta + \frac{1}{a_{55}^I} \int_0^{\zeta_1} R_{U_n}^{(I,1)} U_j^{(I,0)} d\zeta \end{aligned}$$

А с учётом (2.25) будем иметь:

$$\begin{aligned} b_{n,j} \left( (\omega_{0n})^2 - (\omega_{0j})^2 \right) \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_j \varphi_j d\zeta = -(\omega_{1n})^2 \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_n \varphi_j d\zeta + & \quad (3.9) \\ + \frac{1}{a_{55}^{II}} \int_{-\zeta_2}^0 R_{U_n}^{(II,1)} U_j^{(II,0)} d\zeta + \frac{1}{a_{55}^I} \int_0^{\zeta_1} R_{U_n}^{(I,1)} U_j^{(I,0)} d\zeta \end{aligned}$$

При  $j = n$  из (3.9) следует:

$$(\omega_{1n})^2 = \frac{\frac{1}{a_{55}^{II}} \int_{-\zeta_2}^0 R_{U_n}^{(II,1)} U_n^{(II,0)} d\zeta + \frac{1}{a_{55}^I} \int_0^{\zeta_1} R_{U_n}^{(I,1)} U_n^{(I,0)} d\zeta}{\int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_n \varphi_n d\zeta} \quad (3.10)$$

а при  $j \neq n$ :

$$b_{n,j} = \frac{\frac{1}{a_{55}^{II}} \int_{-\zeta_2}^0 R_{U_n}^{(II,1)} U_j^{(II,0)} d\zeta + \frac{1}{a_{55}^I} \int_0^{\zeta_1} R_{U_n}^{(I,1)} U_j^{(I,0)} d\zeta}{\left( (\omega_{0n})^2 - (\omega_{0j})^2 \right) \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_j \varphi_j d\zeta} \quad (3.11)$$

Для определения  $b_{nm}$  введём следующую функцию:

$$\varphi_n^{(k)} = \begin{cases} \sqrt{\rho_I} U_n^{(I,k)}; & 0 \leq \zeta \leq \zeta_1 \\ \sqrt{\rho_{II}} U_n^{(II,k)}; & -\zeta_2 \leq \zeta \leq 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\|\varphi_n^{(0)}\| = \|\varphi_n\| = \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_n \varphi_n d\zeta$$

Нормируя функцию  $\Phi_n = \varphi_n^{(0)} + \varepsilon \varphi_n^{(1)} + \dots$  и ограничиваясь первым приближением, будем иметь [4,5]:

$$\frac{1}{\|\varphi_n^{(0)}\|} \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} [\varphi_n^{(0)} + \varepsilon \varphi_n^{(1)}]^2 d\zeta = 1 \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{\|\varphi_n^{(0)}\|} \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_n^{(0)} \varphi_n^{(0)} d\zeta + \frac{2\varepsilon}{\|\varphi_n^{(0)}\|} \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_n^{(0)} \varphi_n^{(1)} d\zeta + \frac{\varepsilon^2}{\|\varphi_n^{(0)}\|} \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_n^{(1)} \varphi_n^{(1)} d\zeta = 1 \quad (3.14)$$

Из (3.14) следует:

$$\int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_n^{(0)} \varphi_n^{(1)} d\zeta = 0 \quad (3.15)$$

Подставив  $\varphi_n^{(0)}$  и  $\varphi_n^{(1)}$  из (3.12) в (3.15) и учитывая, что функции  $\{\varphi_n^{(0)}\}$  ортогональны, получим, что  $b_{nn} = 0$ .

Из (1.13), учитывая (2.9), следует:

$$R_{U_n}^{(k,1)} = 0, \quad k = I, II \quad (3.16)$$

Подставив (3.16) в (3.10) и (3.11), будем иметь:

$$\omega_{1n} = 0, \quad b_{n1} = 0 \quad (3.17)$$

Следовательно, приближение  $s = 1$  даёт нулевое решение.

Теперь рассмотрим приближение  $s = 2$ . Первое уравнение (1.12), учитывая (3.17), примет вид:

$$\frac{d^2 U_n^{(k,2)}}{d\zeta^2} + a_{55}^{(k)} \rho_k (\omega_{0n})^2 U_n^{(k,2)} = -a_{55}^{(k)} \rho_k (\omega_{2n})^2 U_n^{(k,0)} + R_{U_n}^{(k,2)} \quad k = I, II \quad (3.18)$$

Решение снова поищем в виде:

$$U_n^{(k,2)} = \sum_{r=1}^{\infty} c_{nr}^{(k)} U_r^{(k,0)} \quad k = I, II \quad (3.19)$$

которое снова удовлетворяет граничным условиям. Повторив те же действия, получим:

$$(\omega_{2n})^2 = \frac{\frac{1}{a_{55}^{II}} \int_{-\zeta_2}^0 R_{U_n}^{(II,2)} U_n^{(II,0)} d\zeta + \frac{1}{a_{55}^I} \int_0^{\zeta_1} R_{U_n}^{(I,2)} U_n^{(I,0)} d\zeta}{\int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_n \varphi_n d\zeta} \quad (3.20)$$

$$c_{nr} = \frac{\frac{1}{a_{55}^{II}} \int_{-\zeta_2}^0 R_{U_n}^{(II,2)} U_r^{(II,0)} d\zeta + \frac{1}{a_{55}^I} \int_0^{\zeta_1} R_{U_n}^{(I,2)} U_r^{(I,0)} d\zeta}{((\omega_{1n})^2 - (\omega_{0n})^2) \int_{-\zeta_2}^{\zeta_1} \varphi_r \varphi_r d\zeta} \quad r \neq n \quad (3.21)$$

Для определения  $c_{nn}$  поступим так же, как в случае с  $b_{nn}$ , но нормируя функцию  $\Phi_n$ , ограничимся вторым приближением, в результате получим, что  $c_{nn} = 0$ .

В формулах (3.20) и (3.21) участвует функция  $R_{U_n}^{(k,2)}$ , которая имеет вид:

$$R_{Un}^{(k,2)} = \left( a_{55}^{(k)} A_{23}^{(k)} - 1 \right) \frac{\partial^2 W_n^{(k,1)}}{\partial \xi^2 \partial \zeta} - a_{55}^{(k)} A_{22}^{(k)} \frac{\partial^2 U_n^{(k,0)}}{\partial \xi^2} - \frac{a_{55}^{(k)} \partial^2 U_n^{(k,0)}}{a_{66}^{(k)} \partial \eta^2} \quad (3.22)$$

где  $W_n^{(k,1)}$  определяется из третьего уравнения (1.12), при  $s = 1$ , где  $\omega_{0n}$  удовлетворяет уравнению (2.6):

$$A_{11}^{(k)} \frac{d^2 W_n^{(k,1)}}{d\zeta^2} + \rho_k (\omega_{0n})^2 W_n^{(k,1)} + \rho_k (\omega_{1n})^2 W_n^{(k,0)} = R_{n_n}^{(k,1)} \quad k = I, II \quad (3.23)$$

Подставив  $R_{n_n}^{(k,1)}$  из (1.13) и  $\omega_{1n}$  из (3.17), получим:

$$A_{11}^{(k)} \frac{d^2 W_n^{(k,1)}}{d\zeta^2} + \rho_k (\omega_{0n})^2 W_n^{(k,1)} = \left( A_{23}^{(k)} - \frac{1}{a_{55}^{(k)}} \right) \frac{\partial^2 U_n^{(k,0)}}{\partial \xi \partial \zeta} \quad k = I, II \quad (3.24)$$

При  $k = I$  уравнение (3.24) примет вид:

$$\begin{aligned} A_{11}^I \frac{d^2 W_n^{(I,1)}}{d\zeta^2} + \rho_I (\omega_{0n})^2 W_n^{(I,1)} = \\ = \left( A_{23}^I - \frac{1}{a_{55}^I} \right) \sqrt{a_{55}^I \rho_I} \omega_{0n} \left( C_U^{(I,0)} \right)_{\xi} \cos \left[ \sqrt{a_{55}^I \rho_I} \omega_{0n} (\zeta - \zeta_1) \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

а при  $k = II$ :

$$\begin{aligned} A_{11}^{II} \frac{d^2 W_n^{(II,1)}}{d\zeta^2} + \rho_{II} (\omega_{0n})^2 W_n^{(II,1)} = \\ = - \left( A_{23}^{II} - \frac{1}{a_{55}^{II}} \right) \sqrt{a_{55}^{II} \rho_{II}} \omega_{0n} \left( C_U^{(II,0)} \right)_{\xi} \sin \left[ \sqrt{a_{55}^{II} \rho_{II}} \omega_{0n} (\zeta + \zeta_2) \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

Решениями (3.25) и (3.26) будут:

$$W_n^{(I,1)} = C_{W1}^I \cos \sqrt{\frac{\rho_I}{A_{11}^I}} \omega_{0n} \zeta + C_{W2}^I \sin \sqrt{\frac{\rho_I}{A_{11}^I}} \omega_{0n} \zeta + A_W^I \cos \left[ \sqrt{a_{55}^I \rho_I} \omega_{0n} (\zeta - \zeta_1) \right] \quad (3.27)$$

$$W_n^{(II,1)} = C_{W1}^{II} \cos \sqrt{\frac{\rho_{II}}{A_{11}^{II}}} \omega_{0n} \zeta + C_{W2}^{II} \sin \sqrt{\frac{\rho_{II}}{A_{11}^{II}}} \omega_{0n} \zeta + A_W^{II} \sin \left[ \sqrt{a_{55}^{II} \rho_{II}} \omega_{0n} (\zeta + \zeta_2) \right] \quad (3.28)$$

где:

$$A_W^I = \frac{\left( a_{55}^I A_{23}^I - 1 \right) \left( C_U^{(I,0)} \right)_{\xi}}{\left( 1 - a_{55}^I A_{11}^I \right) \sqrt{a_{55}^I \rho_I} \omega_{0n}}, \quad A_W^{II} = \frac{\left( 1 - a_{55}^{II} A_{23}^{II} \right) \left( C_U^{(II,0)} \right)_{\xi}}{\left( 1 - a_{55}^{II} A_{11}^{II} \right) \sqrt{a_{55}^{II} \rho_{II}} \omega_{0n}} \quad (3.29)$$

Подчинив решения (3.27) соответствующим граничным и контактным условиям:

$$\begin{aligned} W_n^{(II,1)}(\zeta = -\zeta_2) = 0 \\ \sigma_{33n}^{(I,1)}(\zeta = \zeta_1) = 0 \Rightarrow \left( A_{11}^I \frac{\partial W_n^{(I,1)}}{\partial \zeta} - A_{23}^I \frac{\partial U_n^{(I,0)}}{\partial \xi} \right) \Big|_{\zeta = \zeta_1} = 0 \\ W_n^{(I,1)}(\zeta = 0) = W_n^{(II,1)}(\zeta = 0), \quad \sigma_{33n}^{(I,1)}(\zeta = 0) = \sigma_{33n}^{(II,1)}(\zeta = 0) \Rightarrow \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\Rightarrow \left( A_{11}^I \frac{\partial W_n^{(I,1)}}{\partial \zeta} - A_{23}^I \frac{\partial U_n^{(I,0)}}{\partial \xi} \right) \Big|_{\zeta=0} = \left( A_{11}^{II} \frac{\partial W_n^{(II,1)}}{\partial \zeta} - A_{23}^{II} \frac{\partial U_n^{(II,0)}}{\partial \xi} \right) \Big|_{\zeta=0}$$

из (3.29) и (3.30) определим четыре неизвестных  $C_{W_i}^{(k)}$ .

Итак, мы определили  $\omega_{2n}$  и  $U_n^{(k,2)}$ , которые отличны от нуля. Следовательно, имеем:

$$\begin{cases} (\omega_{2n})^2 = (\omega_{0n})^2 + \varepsilon^2 (\omega_{2n})^2 \\ U_n^{(k)} = U_n^{(k,0)} + \varepsilon^2 U_n^{(k,2)} \end{cases} \quad (3.31)$$

Аналогичным образом рассматриваются остальные случаи. Этот процесс можно продолжить для любого приближения, но вряд ли будет представлять практический интерес. Из полученных результатов следует, что начальное приближение даёт достаточно точные для практических приложений значения для частот и форм собственных колебаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Агаляян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415с.
2. Агаляян Л. А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел. // Международн. научн. журнал Прикл. механика. 2002. Т. 38. №7. С. 3-24.
3. Агаляян Л. А., Оганесян Р. Ж. Собственные колебания ортотропных пластин при смешанных краевых условиях на лицевых поверхностях. // Изв. НАН РА. Механика. 2003. Т. 56. №4. С. 18-28.
4. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Изд-во Мир, 1976. 456с.
5. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука. 1981. 398с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
8.04.2005