

УДК 539.1

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ИЗГИБНЫХ ВОЛН  
МОДУЛЯЦИИ В МАГНИТОУПРУГИХ ПЛАСТИНАХ В  
ПРОСТРАНСТВЕННОМ ПОДХОДЕ

Багдоев А. Г., Варданян А. В.

Ա. Գ. Բագդոև, Ա. Վ. Վարդանյան

Ոչ գծային ճնշման մոդուլացիայի ալիքների կայունությունը մագնիսաուսածաղանկ սալերում տարածական մոտեցումով

Պատարկվում է տարածական մոտեցումով գծային հանախորյուցների որոշումը մագնիսաուսածաղանկ սալերում կամայական կեկտրաստորիակամությունների համար: Պատարկվում է ինչպես փոքր մագնիսական դաշտերի դեպք, որոնց համար ստացվում են արտք արտահայտություններ, այնպես էլ կամայական մագնիսական դաշտերի համար, որոնց համար բխային եղանակով լուծվում են երկու սրանագենդներ հավասարումներ, կառուցվում են աղյուսակներ: Ուսումնասիրվում է ոչ գծային մոդուլացիայի ալիքների կայունությունը:

A. G. Bagdoyev, A. V. Vardanyan

The stability of nonlinear modulation bending waves in magnetoelastic plates in space treatment

The problem of determination of frequencies of magnetoelastic plates vibrations for arbitrary electroconductivity value and general of connection between initial stresses is considered in space treatment.

Задача колебаний электропроводящих пластины в осредненном классическом подходе рассмотрена в [1-3]. Нелинейные волны модуляции в магнитоупругой пластине рассмотрены в [4]. Все эти исследования проводились в пределах осредненной теории. В [5] выведены уравнения и граничные условия для ферромагнитной как диэлектрической, так и проводящей пластины и получены дисперсионные соотношения по осредненной теории. В [6-8] рассмотрен пространственный подход получения дисперсионных соотношений для магнитоупругих пластин. Для ферромагнитных пластин эти исследования даны в [9].

В настоящей статье выводятся дисперсионные соотношения для магнитоупругих пластин для случая произвольной немалой электропроводности.

Высотле рассмотрена асимптотика для малых полей.

Построены графики для действительной частоты в зависимости от волнового числа. Рассмотрены случаи поперечного и продольного полей. В случае большой или конечной проводимости из полученных соотношений найдены результаты [6-8].

Исследована на основе линейных дисперсионных соотношений [6-8] устойчивость нелинейных волн.

Приведены расчеты частот для случая немалых магнитных полей.

§1. Пространственная задача для поперечного магнитного поля

В пространственной задаче выбираются оси  $Ox, Oy$  в средней плоскости невозмущенной пластины, ось  $z$  – по нормали к ней. В случае поперечного невозмущенного магнитного поля  $H_0$  для изотропной пластины, если искать решение в виде монохроматической волны  $e^{i(\alpha x + \beta y - \omega t)}$ , можно убедиться [1-3,8], что частота  $\omega$  будет функцией от  $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ , т. е. волновая задача будет изотропной. Поэтому при получении дисперсионного соотношения достаточно будет рассматривать плоскую задачу, разыскивая ее решение в виде  $e^{i(kz - \omega t)}$ , а в полученных для нее окончательных формулах для получения решения пространственной задачи делать указанную замену  $k$  на  $\alpha, \beta$ . Пусть невозмущенное магнитное поле  $H_0$  направлено по оси  $z$ ,  $u_x, u_z$  – компоненты перемещения по осям  $x, z$ .

$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}$  - вектор магнитного поля, причем для индуцированного поля считается  $h_x = H_0 H'_x$ ,  $h_z = H_0 H'_z$ .

Для квазимонохроматической волны можно написать

$$u_x = \frac{1}{2} U_x(z) e^{i\omega t + kx}; \quad u_z = \frac{1}{2} U_z(z) e^{i\omega t + kx} \quad (1.1)$$

$$\tau = kx - \omega t; \quad H'_x = \frac{1}{2} H_x(z) e^{i\tau + kx}; \quad H'_z = \frac{1}{2} H_z(z) e^{i\tau + kx}$$

Уравнения движения магнитоупругой среды в линейной постановке имеют вид [1-3]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{1}{4\pi} (\text{rot } \vec{h} \times \vec{H}_0)_x \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \frac{1}{4\pi} (\text{rot } \vec{h} \times \vec{H}_0)_z$$

где  $\rho$  - плотность,

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_z = \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (1.3)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

Уравнение электромагнитной индукции

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = \text{rot} \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{H}_0 \right) + v_m \Delta \vec{h} \quad (1.4)$$

Здесь  $\sigma$  - электропроводность,  $v_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$  - магнитная вязкость,  $c$  - скорость света.

В поперечном магнитном поле уравнения (1.2)-(1.4) в переменных (1.1) дают

$$\zeta = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$\frac{b^2}{a^2} \frac{d^2 U_x}{dz^2} - k^2 U_x + \frac{\omega^2}{a^2} U_x + ik\zeta \frac{dU_z}{dz} = -\frac{a_1^2}{a^2} \left( \frac{dH_x}{dz} - ikH_z \right)$$

$$-i\omega H_x + v_m k^2 H_x - v_m \frac{d^2 H_x}{dz^2} = -i\omega \frac{dU_x}{dz} \quad (1.5)$$

$$ik\zeta \frac{dU_z}{dz} + \frac{d^2 U_z}{dz^2} - \frac{b^2}{a^2} k^2 U_z + \frac{\omega^2}{a^2} U_z = 0$$

$$-i\omega H_z + v_m k^2 H_z - v_m \frac{d^2 H_z}{dz^2} = -\omega k U_z$$

где  $a_1^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho}$ ,  $a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ ,  $b^2 = \frac{\mu}{\rho}$ .

В пространственном подходе [6-8] решение можно искать в виде

$$U_z = A_j \text{ch } v_j z, \quad U_x = B_j \text{sh } v_j z, \quad H_x = C_j \text{ch } v_j z, \quad H_z = D_j \text{sh } v_j z \quad (1.6)$$

где по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3. Из (1.5), (1.6) можно получить связь между всеми константами через  $B_{1,2,3}$  в форме

$$C_{1,2,3} = -\frac{i\omega v_{1,2,3} B_{1,2,3}}{X_{1,2,3}}, D_{1,2,3} = -\frac{\omega k B_{1,2,3}}{X_{1,2,3}}, X_{1,2,3} = -i\omega + v_m k^2 - v_m v_{1,2,3}^2$$

$$ik\zeta B_{1,2,3} v_{1,2,3} + \left( v_{1,2,3}^2 - \frac{b^2}{a^2} k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} \right) A_{1,2,3} = 0 \quad (1.7)$$

$$\left( \frac{b^2}{a^2} v_{1,2,3}^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} \right) B_{1,2,3} + ik\zeta A_{1,2,3} v_{1,2,3} = -\frac{a_1^2}{a^2} (C_{1,2,3} v_{1,2,3} - ik D_{1,2,3})$$

Из (1.7) для  $\bar{v} = v_{1,2,3}(\omega)$  можно найти уравнение

$$\frac{b^2}{a^2} \bar{v}^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} + \zeta^2 \frac{\bar{v}^2 k^2}{\bar{v}^2 - \frac{b^2}{a^2} k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}} = -\frac{a_1^2}{a^2} \frac{\bar{v}^2 - k^2}{1 + i \frac{k^2 - \bar{v}^2}{\omega} v_m} \quad (1.8)$$

(1.8) является кубическим уравнением для  $\bar{v}^2$ , решение которого достаточно громоздкое. Поэтому принимается  $\frac{a_1^2}{b^2} \ll 1$  и разлагается решение по степеням  $\frac{a_1^2}{b^2}$ .

Тогда получится

$$v_1^{0,2} = k^2 - \frac{\omega^2}{a^2}, v_2^{0,2} = k^2 - \frac{\omega^2}{b^2}$$

$$v_1^2 = v_1^{0,2} + \frac{a_1^2 k^2}{a^2} \left( 1 + \frac{\omega^2}{a^2 \theta} \right), v_2^2 = v_2^{0,2} - \frac{a_1^2 k^2}{a^2} \left( 1 + \frac{\omega^2}{b^2 \theta} \right) + \frac{a_1^2 \omega^2}{b^4} \quad (1.9)$$

$$1 - \frac{k^2 - v_1^2}{\theta} = \frac{a_1^2 \zeta k^2 - \theta}{b^2 \theta}, \theta = \frac{i\omega}{v_m}, v_1^{0,2} = k^2 - \theta$$

$v_3^0$  есть значение  $v_3$  при  $a_1^2 = 0$ .

Для того, чтобы вывести дисперсионное соотношение  $\omega = \omega(k)$  для изгибных волн в пространственной постановке, нужно к (1.5) добавить граничные условия на поверхности пластины  $z = \pm \frac{h}{2}$  с диэлектриком  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  и условия непрерывности  $\bar{h}$ . Вне пластины в диэлектрике индуцированное магнитное поле записывается в виде

$$\bar{h}_1 = \frac{1}{2} (C_1^1 e^{i\theta_1} + kc), \bar{h}_2 = \frac{1}{2} (C_2^1 e^{i\theta_2} + kc), \theta_1 = i\tau \mp kz \quad (1.10)$$

Используя также уравнение  $\frac{\partial \bar{h}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial z} = 0$  и условия

$$z = \frac{h}{2}, h_1 = \bar{h}_1, h_2 = \bar{h}_2, iC_1^1 = C_2^1, C_1^1 e^{-k\frac{h}{2}} = C_1^2 \operatorname{ch} v_1 \frac{h}{2}, C_2^1 e^{-k\frac{h}{2}} = D_1 \operatorname{sh} v_1 \frac{h}{2}$$

можно указанные граничные условия записать в виде

$$iC_1^2 \operatorname{ch} v_1 \frac{h}{2} = D_1 \operatorname{sh} v_1 \frac{h}{2}, D_1 = -C_1^2 \frac{k}{v_1} i$$

$$C_1^2 \operatorname{ch} v_1 \frac{h}{2} = kC_1^1 v_1^{-1} \operatorname{sh} v_1 \frac{h}{2}, B_1 v_1 \operatorname{ch} v_1 \frac{h}{2} + i k A_1 \operatorname{ch} v_1 \frac{h}{2} = 0 \quad (1.11)$$

$$A_j v_j \operatorname{sh} v_j \frac{h}{2} + \frac{a^2 - 2b^2}{a^2} i k B_j \operatorname{sh} v_j \frac{h}{2} = 0$$

где снова проведено суммирование по  $j=1,2,3$

В (1.11) нужно подставить (1.7). Уравнение, полученное приравнянием к нулю определителя системы (1.11), дает

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{k}{v_1} \operatorname{th} v_1 \frac{h}{2} & 1 + \frac{k}{v_2} \operatorname{th} v_2 \frac{h}{2} & 1 + \frac{k}{v_3} \operatorname{th} v_3 \frac{h}{2} \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 + \frac{\zeta}{\Delta_1} k^2 & 1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2 & 1 + \frac{\zeta}{\Delta_3} k^2 \\ \frac{\operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{v_1} \Gamma_1 & \frac{\operatorname{th} v_2 \frac{h}{2}}{v_2} \Gamma_2 & \frac{\operatorname{th} v_3 \frac{h}{2}}{v_3} \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.12)$$

где

$$\Delta_j = v_j^2 - \frac{b^2}{a^2} k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}, \quad X_j = 1 + i \frac{k^2 - v_j^2}{\omega} v_m, \quad \Gamma_j = \frac{a^2 - 2b^2}{a^2} - \frac{\zeta v_j^2}{\Delta_j} \quad (1.13)$$

Уравнение (1.12) дает

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \frac{k}{v_1} \operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{X_1} \left( \operatorname{th} v_2 \frac{h}{2} \Gamma_2 \frac{1 + \frac{\zeta}{\Delta_1} k^2}{v} - \operatorname{th} v_3 \frac{h}{2} \Gamma_1 \frac{1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2}{v_1} \right) - \\ & - \left( 1 + \frac{\zeta}{\Delta_3} k^2 \right) \left( \frac{\operatorname{th} v_2 \frac{h}{2}}{v_2} \Gamma_2 \frac{1 + \frac{k}{v_1} \operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{X_1} - \frac{\operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{v_1} \Gamma_1 \frac{1 + \frac{k}{v_2} \operatorname{th} v_2 \frac{h}{2}}{X_2} \right) + \\ & + \frac{\operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{v_1} \Gamma_1 \left[ \left( 1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2 \right) \frac{1 + \frac{k}{v_1} \operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{X_1} - \left( 1 + \frac{\zeta}{\Delta_1} k^2 \right) \frac{1 + \frac{k}{v_2} \operatorname{th} v_2 \frac{h}{2}}{X_2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

В силу (1.9)

$$X_j = \frac{a^2 \zeta k^2 - \theta}{b^2} \quad (1.15)$$

Тогда (1.14) примет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{R a_0^2} \theta^2 \left\{ \left( 1 + \frac{\zeta}{\Delta_1} k^2 \right) \frac{\operatorname{th} v_2 \frac{h}{2}}{v_2} \Gamma_2 - \left( 1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2 \right) \frac{\operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{v_1} \Gamma_1 \right\} - \left( 1 + \frac{\zeta}{\Delta_3} k^2 \right) \times \\ & \times \left( \frac{1}{X_1} \frac{\operatorname{th} v_2 \frac{h}{2}}{v_2} \Gamma_2 - \frac{1}{X_2} \frac{\operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{v_1} \Gamma_1 \right) + \frac{\operatorname{th} v_3 \frac{h}{2}}{v_3} \Gamma_3 \left( \frac{1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2}{X_1} - \frac{1 + \frac{\zeta}{\Delta_1} k^2}{X_2} \right) = 0 \quad (1.16) \\ & R = -\frac{\zeta k^2 - \theta}{\theta} \left( 1 + \frac{k}{v_3} \operatorname{th} v_3 \frac{h}{2} \right) \end{aligned}$$

Разделим (1.16) на  $\left(1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2\right) \frac{\Gamma_1}{v_1} \operatorname{th} v_2 \frac{h}{2}$ , получим уравнение:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{Ra_1^2} \bar{b}^2 \left( \frac{\operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{\operatorname{th} v_2 \frac{h}{2}} - N \frac{v_1}{v_2} \frac{1 + \frac{\zeta}{\Delta_1} k^2}{1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2} \right) + \left( 1 + \frac{\zeta}{\Delta_3} k^2 \right) \left( \frac{1}{X_1} \frac{v_1}{v_2} N \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{X_2} \frac{\operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{\operatorname{th} v_2 \frac{h}{2}} \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2} \right) - \frac{\operatorname{th} v_3 \frac{h}{2}}{v_3} \Gamma_3 \frac{v_1}{\operatorname{th} v_2 \frac{h}{2} \Gamma_1} \left( \frac{1}{X_1} - \frac{1}{X_2} \frac{1 + \frac{\zeta}{\Delta_1} k^2}{1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2} \right) = 0 \quad (1.17) \end{aligned}$$

$$N = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}$$

С учетом (1.13) в основных порядках получится

$$N \frac{1 + \zeta k^2 / \Delta_1}{1 + \zeta k^2 / \Delta_2} = 1 - \frac{\omega^4}{4b^4 k^4} - \frac{\omega^2 a_1^2}{4b^2 a^2 k^2 \zeta} - \frac{\omega^2 a_1^2}{4b^4 k^2 \zeta} \quad (1.18)$$

Исследуем общий случай произвольной электропроводности и произвольных  $\theta$ , когда  $v_3 h$  конечное.

В уравнении (1.17) первое слагаемое после сокращения на  $\frac{v_1}{v_2}$  будет в основном порядке с учетом (1.18).

$$\frac{-b^2}{Ra_1^2} \left( 1 + \frac{1}{12} \omega^2 h^2 \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) - 1 + \frac{\omega^4}{4b^4 k^4} + \frac{\omega^2 a_1^2}{4b^2 a^2 k^2 \zeta} + \frac{\omega^2 a_1^2}{4b^4 k^2 \zeta} \right) \quad (1.19)$$

Второе слагаемое в (1.17) после сокращения на  $\frac{v_1}{v_2}$  с учетом

$$X_1 \approx 1 + \frac{i\omega}{a^2} v_m, \quad X_2 \approx 1 + \frac{i\omega}{b^2} v_m, \quad v_3^2 \approx k^2 - \theta, \quad 1 + \frac{\zeta}{\Delta_1} k^2 \approx 2, \quad 1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2 = 1 + \frac{k^2}{k^2 - \frac{\omega^2}{b^2}}$$

и (1.13), (1.15) будет

$$\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\zeta k^2}{\zeta k^2 - \theta} \right) \left( \frac{\omega^2}{2b^2 k^2} + i\omega v_m \frac{\zeta}{b^2} \right) = -\frac{\omega^2}{4b^2 \theta k^2} \frac{(2\zeta k^2 - \theta)^2}{\zeta k^2 - \theta} \quad (1.20)$$

Третье слагаемое в (1.17), поскольку

$$\Gamma_3 \approx -\frac{b^2}{a^2} \frac{2\zeta k^2 - \theta}{\zeta k^2 - \theta}, \quad \Gamma_1 \approx -2 \frac{b^2}{a^2} \quad (1.21)$$

будет

$$-\frac{\operatorname{th} v_3 \frac{h}{2}}{v_3} \frac{b^2}{a^2} \frac{2\zeta k^2 - \theta}{\zeta k^2 - \theta} \frac{2}{h} \frac{a^2}{2b^2} \left( \frac{\omega^2}{2b^2 k^2} - \frac{\omega^2}{b^2 \theta} \zeta \right) \quad (1.22)$$

где  $v_3 = \sqrt{k^2 - \theta}$ . Тогда (1.17) примет вид

$$\left( 1 + \frac{k}{v_3} \operatorname{th} v_3 \frac{h}{2} \right) \frac{\theta b^2}{a_1^2 (\zeta k^2 - \theta)} \left( \frac{\omega^2}{4b^4 k^4} - \frac{h^2 \zeta}{12b^2} + \frac{a_1^2}{4b^2 a^2 k^2 \zeta} + \frac{a_1^2}{4b^4 k^2 \zeta} \right) +$$



$$+ \frac{(2\zeta k^2 - \theta)(1 - \frac{2k^2\zeta}{\theta})}{4b^2k^2} \frac{1}{\zeta k^2 - \theta} - \frac{\text{th } v_3 \frac{h}{2}}{v_3} \frac{2\zeta k^2 - \theta}{\zeta k^2 - \theta} \frac{2}{4b^2k^2h} (1 - \frac{2k^2\zeta}{\theta}) = 0$$

или

$$\omega^2 = \frac{1}{3} \zeta k^2 k^4 b^2 - \frac{a_1^2 k^2}{\zeta} (\frac{b^2}{a^2} + 1) + \frac{(2\zeta k^2 - \theta)^2}{\theta^2 (1 + \frac{k}{v_3} \text{th } v_3 \frac{h}{2})} a_1^2 k^2 (1 - \frac{\text{th } v_3 \frac{h}{2}}{v_3} \frac{2}{h}) \quad (1.23)$$

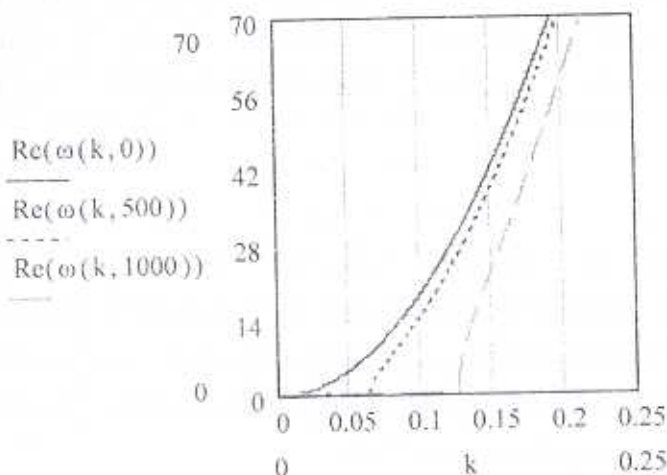
По формуле (1.23) проводятся вычисления на компьютере для типичных величин параметров

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}, \quad h = \frac{1}{10} \text{ см}, \quad v_m = 10^3 \text{ см}^2/\text{сек}, \quad b = 4 \cdot 10^4 \text{ см/сек}.$$

Данные взяты для алюминия и  $\rho = 3 \text{ г/см}^3$ .

Расчеты проведены для полей  $H_0 = 0$ ,  $H_0 = \frac{10^3}{2}$ ,  $H_0 = 10^3$  гаусс.

Результаты приведены для действительной  $\omega_1^0$  части  $\omega$ ,  $\omega = \omega_1^0 + i\omega_2^0$ , в функции  $k$  на фиг. 1.



Фиг. 1

Как видно из фиг. 1, наличие магнитного поля  $H_0$  приводит к уменьшению частоты  $\omega_1^0(k)$ . Этот вывод следует также для предельных случаев идеально проводящих пластин, для которых  $\sigma = \infty$ ,  $\theta \approx \infty$  и можно считать  $\text{th } v_3 \frac{h}{2} \approx 1$ , и конечно-проводящих пластин, для которых

$\text{th } v_3 \frac{h}{2} \approx v_3 \frac{h}{2}$ . В этих случаях (1.23) дает

$$\omega_1^{0,2} = \omega_{00}^2 - \frac{2a_1^2 k^2 b^2}{a^2 \zeta} \quad (1.24)$$

$$\omega_1^{02} = \omega_{00}^2 - \frac{a_1^2 k^2}{\zeta} \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \quad (1.25)$$

соответственно.

Проведем теперь расчеты для поперечного поля по точным формулам. Удобно ввести следующие безразмерные переменные:

$$\frac{\omega}{ak} = \omega', \quad \frac{v_j}{k} = v_j', \quad j = 1, 2, 3, \quad \frac{\theta}{k^2} = \theta', \quad \theta' = i\omega' \frac{a}{k v_m} \quad (1.26)$$

По формуле (1.23) для безразмерных величин  $\text{Re} \omega'$  проведены расчеты, результаты которых даны для  $h = \frac{1}{10}$  см табл. 1, и для  $h = \frac{1}{2}$  см

табл. 2, где  $\alpha = \frac{a_1}{a}$ .

Таблица 1

$\alpha \backslash k$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0.00272166	0.00544331	0.00816497	0.0108866	0.0136083
1/1000	0.002345	0.005125	0.0056321	0.0068732	0.00742351
1/100	0.000012	0.000019	0.00002	0.00003	0.00004
1/10	0.00000187	0.000005	0.0000067	0.0000089	0.0000098

Таблица 2

$\alpha \backslash k$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0.0128756	0.0255674	0.0482346	0.0526457	0.0545768
1/1000	0.01277546	0.02025456	0.02581241	0.0313427	0.03634652
1/100	0.000054252	0.000102554	0.00011457	0.000157568	0.00028879
1/10	0.00000534	0.00002645	0.000036576	0.000049661	0.00005712

Из (1.8) получится уравнение для  $v_j'(\omega')$

$$\left( v_j'^2 - \frac{b^2}{a^2} + \omega'^2 \right) \left( \frac{b^2}{a^2} v_j'^2 - 1 + \omega'^2 + \frac{v_j'^2 - 1}{1 - v_j'^2} \frac{a_1^2}{a^2} \right) + \zeta^2 v_j'^2 = 0 \quad (1.27)$$

Для  $z_j = v_j'^2$  получается кубическое уравнение.

При  $a_1 = 0$  в силу (1.23), (1.8) можно получить для частоты изгибных колебаний упругой пластины

$$\omega_0' = \frac{\omega_{00}}{ak}, \quad \omega_0' = \sqrt{\frac{\zeta}{3}} \frac{b}{a} kh \quad (1.28)$$

После нахождения  $v_j'$  можно решить уравнение для  $\omega' = \omega'(k)$  согласно (1.12)

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{v'_1} \operatorname{th} v'_1 \frac{kh}{2} & 1 + \frac{1}{v'_2} \operatorname{th} v'_2 \frac{kh}{2} & 1 + \frac{1}{v'_3} \operatorname{th} v'_3 \frac{kh}{2} \\ X'_1 & X'_2 & X'_3 \\ 1 + \frac{\zeta}{\Delta'_1} & 1 + \frac{\zeta}{\Delta'_2} & 1 + \frac{\zeta}{\Delta'_3} \\ \frac{\operatorname{th} v'_1 \frac{kh}{2}}{v'_1} \Gamma'_1 & \frac{\operatorname{th} v'_2 \frac{kh}{2}}{v'_2} \Gamma'_2 & \frac{\operatorname{th} v'_3 \frac{kh}{2}}{v'_3} \Gamma'_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.29)$$

где  $X'_j = 1 - \frac{1 - v_j'^2}{\sigma'}$ ,  $\Delta'_j = v_j'^2 - \frac{b^2}{a^2} + \omega'^2$ ,  $\Gamma'_j = 1 - 2 \frac{b^2}{a^2} - \zeta \frac{v_j'^2}{\Delta'_j}$ .

Результаты расчетов по (1.27), (1.29) для тех же параметров, что и выше, кроме  $H_0$ , для действительной части  $\omega'(k)$  для  $h = \frac{1}{10}$  см приведены в табл. 3, и для  $h = \frac{1}{2}$  см табл. 4.

Таблица 3

$\alpha \backslash k$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\omega'_0$	0.00272166	0.00544331	0.00816497	0.0108866	0.0136083
1/1000	0.00242809	0.00539412	0.00804649	0.0099884	0.0116025
1/100	0.000374367	0.00069921	0.0009127559	0.001076537	0.0012512
1/10	0.000233338	0.00030162	0.00034999	0.00036664	0.00039582

Таблица 4

$\alpha \backslash k$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\omega'_0$	0.0128756	0.0255674	0.0482346	0.0526457	0.0545768
1/1000	0.0124451	0.02336412	0.04612432	0.0499253	0.0524355
1/100	0.0016744	0.00309798	0.00462425	0.00551142	0.00582452
1/10	0.0011342	0.00155421	0.0017541	0.00190024	0.0020142

В качестве нулевого приближения использованы значения  $\omega'$  при  $\alpha = \frac{1}{1000}$  из табл. 1 и 2, а далее процесс повторяется.

Результаты расчетов по (1.27), (1.29) приведены в табл. 3 и 4.

В работах [6-8] формулы (1.9) и далее настоящей статьи записаны с учетом слагаемых с множителем  $a^4$ , причем из них следует вместо (1.24) дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \omega_{00}^2 - 2a_1^2 k^2 \frac{b^2}{a^2 \xi} + \frac{a_1^4 k^4}{\xi \omega_{00}^2} \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \quad (1.30)$$

Отсюда видно, что  $\omega^2 > 0$ . Но для сравнительно небольших полей по-прежнему  $\omega^2 < \omega_{00}^2$ . Последнее неравенство, как видно из табл. 3, 4, имеет



место для действительной части частоты для произвольных полей.

По усредненной теории [8] имеет место

$$\omega^2 = \omega_{00}^2 - \frac{2a_1^2 k^2}{h} \frac{\omega^2}{v_m^2 \lambda_1^2} \left[ \lambda_1 \frac{h}{2} \operatorname{ch} \lambda_1 \frac{h}{2} - \operatorname{sh} \lambda_1 \frac{h}{2} \right] \frac{h}{2}, \quad \lambda_1 = \sqrt{k^2 - \frac{i\omega}{v_m}} \quad (1.31)$$

по которой проведены расчеты для  $h = 1/10, 1/2$ .

Таблица 5

$\alpha \backslash k$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\omega$	0.00272166	0.00544331	0.00816497	0.0108866	0.0136083
1/1000	0.0027214	0.00544308	0.0081643	0.0108858	0.0136081
1/100	0.0027212	0.0054426	0.0081631	0.0108848	0.013604
1/10	0.0026662	0.0053324	0.0080011	0.0106684	0.013335

Таблица 6

$\alpha \backslash k$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\omega$	0.0128756	0.0255674	0.0482346	0.0526457	0.0545768
1/1000	0.0125827	0.025245	0.0408219	0.0523123	0.0482345
1/100	0.0123158	0.025045	0.0402312	0.0521673	0.0475867
1/10	0.0011267	0.0049653	0.0098721	0.0154326	0.0223457

Сравнение показывает, что табл. 5 и 6 дают очень малый эффект, в то время как табл. 3 и 4, полученные по точной теории, дают сильное уменьшение частот за счет магнитного поля.

## §2. Случай продольного поля

Пусть начальное магнитное поле  $H_0$  направлено по оси  $X$ .

Повторяя выкладки, можно получить для произвольных  $\alpha$

$$\omega^2 = \omega_{00}^2 + a_1^2 k^2 \left( 3 + 2 \frac{b^4}{a^4 \zeta} \right) - (1 + 2\zeta \frac{k^2}{\theta}) \frac{k^3 a_1^2}{k + v_3^0 \operatorname{th} v_3^0 \frac{h}{2}} \left( 1 + \frac{\zeta}{\theta b^2} a^2 k^2 \right) \times$$

$$\times \left( \frac{b^2}{a^2} \frac{2v_3^0 \operatorname{th} v_3^0 \frac{h}{2}}{k^2 h} + \zeta \frac{v_3^{02} \frac{b^2}{a^2} + 2v_3^0 \operatorname{th} v_3^0 \frac{h}{2} \frac{1 - 2b^2/a^2}{h}}{\zeta k^2 + \theta b^2 / a^2} \right) \quad (2.1)$$

Результаты вычисления  $\omega_0^2 = \operatorname{Re}(\omega(k, H_0))$  для данных §1 даны в табл. 7.

Таблица 7

$k$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\operatorname{Re}(\omega(k, 0))$	19	75	170	302	471
$\operatorname{Re}(\omega(k, 500))$	22	79	174	306	475
$\operatorname{Re}(\omega(k, 1000))$	311	90	185	317	487

В случае  $\sigma = \infty$  из (2.1) получится в основном порядке

$$\omega^2 = \omega_{00}^2 + \frac{2a_1^2 k}{h} \quad (2.2)$$

В этом случае решение по точному пространственному подходу совпадает с полученным по осредненному подходу на основе гипотезы Кирхгофа значением частоты [8].

В случае конечных  $\sigma$ , когда  $\left|v_1\right| \frac{h}{2} \ll 1$ , (2.1) дает

$$\omega^2 = \omega_{00}^2 + a_1^2 k^2 \left( 1 + 2 \frac{b^2}{a^2 \zeta} - \frac{\theta}{k^2} \right) \quad (2.3)$$

Полученные дисперсионные соотношения позволяют рассмотреть вопрос устойчивости нелинейных волн модуляций в пластине.

### §3. Нелинейные волны модуляций

В нелинейном приближении можно записать нелинейное дисперсионное соотношение в виде [4]

$$\omega = \omega_1^0 + i\omega_2^0 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial A^2} \right)_0 A^2 \quad (3.1)$$

где  $A$  есть амплитуда перемещения  $u$ , для нелинейной упругой пластины [4]

$$\left( \frac{\partial \omega}{\partial A^2} \right)_0 = D_3 + iD_4, \quad D_3 = \frac{DD_1 e^{i\omega_1^0} k^8}{8\rho h \omega_1^0}, \quad D_4 = -D_3 \frac{\omega_2^0}{\omega_1^0} \quad (3.2)$$

$$D = \frac{Ek^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_1 = \frac{4h^2 (1-\nu+\nu^2)^2}{45 (1-\nu)^3} \gamma_2$$

$\gamma_2$  есть нелинейный коэффициент,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона [4].

Используя (3.1), можно получить методом медленно меняющейся амплитуды [4] уравнение модуляции и исследовать его на устойчивость. Для частоты волны модуляций  $\Omega$  имеем [4]

$$i\Omega + iK \frac{d\omega_0^0}{dk} = \frac{3}{2} D_4 \Psi_0^2 \pm \sqrt{\left( \frac{3}{2} D_4 \Psi_0^2 \right)^2 - \Delta_0} \quad (3.3)$$

где  $K$  есть волновой вектор модуляционной волны, через  $\Psi_0$  обозначено начальное значение амплитуды  $A_0$

$$\Delta_0 = \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} K^2 \left( \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} K^2 + 2D_3 \Psi_0^2 \right) \quad (3.4)$$

Условие модуляционной устойчивости

$$\Omega = \Omega' + i\Omega'', \quad \Omega'' \leq 0 \quad (3.5)$$

Для идеально проводящей пластины  $\sigma = \infty$ ,  $D_4 = 0$  и условие устойчивости будет

$$\Delta_0 \geq 0 \quad (3.6)$$

В присутствии диссипации в случае  $\gamma_2 < 0$  решение устойчиво, а для  $\gamma_2 > 0$  неустойчиво. В случае  $\Delta_0 < 0$  будет неустойчивость обоих решений.

Модуляционная устойчивость в адиабатическом приближении согласно (3.3) будет

$$\gamma_2 \frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} > 0 \quad (3.7)$$

Для случая магнитоупругой идеально проводящей пластины в продольном магнитном поле согласно (3.7), (2.2)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} < 0, \quad \frac{H_0^2}{4\pi} > Dk^3(4+3\sqrt{2}) \\ \frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} > 0, \quad \frac{H_0^2}{4\pi} < Dk^3(4+3\sqrt{2}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

В нижней строке магнитное поле не влияет на устойчивость, а для верхнего знака оно меняет устойчивость на неустойчивость и наоборот.

Для поперечного магнитного поля в случае идеальной проводимости согласно (1.24) вместо (3.8) получится

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} < 0, \quad h^2 k^2 \zeta^2 < \zeta \frac{a_1^2}{a^2} \\ \frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} > 0, \quad h^2 k^2 \zeta^2 > \zeta \frac{a_1^2}{a^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

И снова, так же, как и в (3.8), сильное магнитное поле меняет условие устойчивости на обратное.

Авторы благодарят Ю. Г. Санояна за помощь в проведении вычислений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука. 1997. 272 с.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М.: Физматлит. 1996. 286с.
3. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. Колебания и устойчивость токонесящих упругих пластин. Ереван: Изд. НАН Армении. 1992. 124 с.
4. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. Модуляция термомангнитоупругих волн в нелинейной пластине//Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т. 52. №1. С. 25-30
5. Багдасарян Г. Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. ЕГУ. Изд. "Тигран Мец".1999. 439 с.
6. Багдоев А. Г., Саакян С. Г. Устойчивость нелинейных волн модуляции в магнитном поле для пространственной и осредненной задачи//Изв. РАН. МТТ. 2001. №5. С. 35-42.
7. Bagdоеv A. G., Vantsyan A. A. Theoretical and experimental investigations of waves in plate in magnetic field for space and averaged problems//Int. J. of Solids and Structures. 2002. V. 39. P.251-259.
8. Сафарян Ю. С. Исследование колебаний магнитоупругих пластин в пространственной и осредненной постановке//Информационные технологии и управление. 2001, №2. С. 17-49.