

УДК539.3

ЗАДАЧА ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ
ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ БЕСКОНЕЧНЫМ КУСОЧНО-
ОДНОРОДНЫМ СТРИНГЕРОМ

Багдасарян Р.А.

Ռ.Ա. Բաղդասարյան

Կտոր առ կտոր համասեռ վերադիրով ուժեղացված կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ սալի խնդիրը

Աշխատանքում դիտարկվում է երկու կիսասանվերջ սալերից կազմված կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ սալի խնդիրը, որը ուժեղացված է սալի էլյուրների բաժանման գծին զուգահեռ կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ վերադիրով:

Վերադիրը կազմված է երկու միասեռակ կիսասանվերջ մասերից: և տասնվազանորյակ ուրիշ հաստատուն ունեցող մեկ վերջավոր մասից:

Սալը դեֆորմացվում է անվերջում կիրառված հորիզոնական ձգող լարումների ազդեցության տակ: Խնդիրը լուծվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը և գույց է տրվում, որ սալը հավասարումը բոլոր է առաջա լուծում հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով:

Ստացված է նաև ասիմպտոտիկ բանաձև անվերջ հեռու կետերի կոնտակտային լարումների համար:

R.A. Baghdasaryan

Problem for Piece-homogeneous Infinite Plate, Reinforced by
Infinite Piece-homogeneous Stringer

In the paper a problem of piece-homogeneous plate is considered, when the plate consists from two infinite plates, reinforced by infinite piece-homogeneous stringer, which is parallel to separation line of plate's material.

Stringer consists from two same half-infinite parts and one finite part with other elasticity modulus.

The plate is deformed under action of horizontal stretched stresses applied at infinity.

The problem is reduced to Fredholm's singular integral equation of second kind, which permit the solution by means of step-by-step approximation method.

The asymptotic formula is also obtained for contact stresses in infinite points.

В работе рассматривается задача для кусочно-однородной пластины, состоящей из двух полубесконечных пластин, усиленной бесконечным, кусочно-однородным стрингером, параллельным параллельно линии раздела материалов пластины.

Стрингер состоит из двух одинаковых полубесконечных частей и одной конечной части с другим модулем упругости.

Пластина деформируется под действием горизонтальных растягивающих напряжений, приложенных на бесконечности.

Задача сводится к решению сингулярного интегрального уравнения Фредгольма второго рода, допускающее решение методом последовательных приближений.

Получена также асимптотическая формула для контактных напряжений бесконечно удаленных точек.

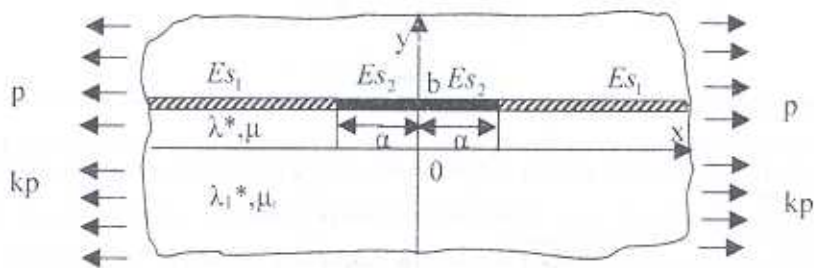
Пусть бесконечная кусочно-однородная пластина, состоящая из двух полубесконечных пластин с различными упругими постоянными, усилена бесконечным, кусочно-однородным стрингером, параллельным линии разнородности материалов пластины (фиг.1).

Ось абсцисс совпадает с линией разнородности материалов. Стрингер, который состоит из двух одинаковых полубесконечных частей и одной конечной части с другим модулем упругости, находится на расстоянии b от оси абсцисс. Концы конечной части стрингера находятся на расстоянии a от оси ординат.

Пластина деформируется под действием растягивающих напряжений $\sigma_x = p$, приложенных на бесконечности $|x| \rightarrow \infty$ при $y > 0$, а при $y < 0$ — под действием напряжений kp , где

$$k = \frac{\mu_1 \lambda^* + 2\mu \lambda_1^* + \mu_1}{\mu \lambda_1^* + 2\mu_1 \lambda^* + \mu}$$

$$\lambda^* = \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \lambda_1^* = \frac{E_1\nu_1}{1-\nu_1^2}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \mu_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$$



Фиг.1

E, ν и E_1, ν_1 — модули упругости и коэффициенты Пуассона пластины соответственно при $y > 0$ и при $y < 0$.

Здесь, как и в [1], относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, т.е. предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактных участков, а для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины справедлива модель обобщенного плоского напряженного состояния.

Задача заключается в определении контактных напряжений, действующих на контактных участках между стрингером и пластиной.

Поставленная задача решается методом, изложенным в [2], где рассматривается задача для упругой однородной плоскости с бесконечным включением, состоящим из трех различных кусков.

В силу вышесказанного, дифференциальные уравнения равновесия стрингера запишутся в следующем виде:

$$\frac{d^2 u_x}{dx^2} = \frac{\tau(x)}{E_{s_1} F_s} \quad \text{при } |x| > a \quad (1)$$

$$\frac{d^2 u_x}{dx^2} = \frac{\tau(x)}{E_{s_2} F_s} \quad \text{при } |x| < a$$

при граничных условиях

$$\left. \frac{du_x}{dx} \right|_{x=a+0} = \frac{X}{E_{s_1} F_s}, \quad \left. \frac{du_x}{dx} \right|_{x=a-0} = \frac{X}{E_{s_2} F_s}$$

$$\left. \frac{du_x}{dx} \right|_{x=-a-0} = \frac{X}{E_{s_1} F_s}, \quad \left. \frac{du_x}{dx} \right|_{x=-a+0} = \frac{X}{E_{s_2} F_s} \quad (2)$$

$$\frac{du_x}{dx} \rightarrow \frac{p}{E_s} \text{ при } |x| \rightarrow \infty \quad (2')$$

где E_{s_1} и E_{s_2} — модули упругости стрингера соответственно при $|x| > a$ и при $|x| < a$, F_s — площадь поперечного сечения стрингера, $\tau(x) = d \cdot q(x)$, d — ширина стрингера, $q(x)$ — контактные касательные напряжения под стрингером, а $u_x(x)$ — горизонтальные перемещения точек стрингера, X — нормальная сила поперечного сечения стрингера при $x = \pm a$.

Отметим, что $\tau(x)$ удовлетворяет условию

$$X = -\int_a^\infty \tau(s) ds + \frac{E_s F_s}{E} P \quad (3)$$

Чтобы уравнения (1) и граничные условия (2) записать одним уравнением на всей оси Ox ($-\infty < x < \infty$), введем функцию

$$U_s(x) = [\theta(-x-a) + \theta(x-a)] \frac{du_x}{dx} + [\theta(x+a) - \theta(x-a)] \frac{du_x}{dx}$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

Из (1) и (2) для $U_s(x)$ получим

$$\frac{dU_s(x)}{dx} = \frac{X}{F_s} \frac{E_{s_2} - E_{s_1}}{E_{s_1} E_{s_2}} [\delta(x-a) - \delta(x+a)] + \frac{\tau_1(x)}{E_{s_1} F_s} + \frac{\tau_2(x)}{E_{s_2} F_s}, \quad (-\infty < x < \infty) \quad (4)$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака.

$$\tau_1(x) = [\theta(-x-a) + \theta(x-a)] \tau(x), \quad \tau_2(x) = [\theta(x+a) - \theta(x-a)] \tau(x)$$

С другой стороны, для перемещения точек пластины имеем [3]

$$u^{(1)}(x, y) = \frac{1}{\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_1 \ln \frac{1}{[(x-s)^2 + (y+b)^2]^{1/2}} + A_2 \frac{(y+b)^2}{(x-s)^2 + (y+b)^2} + \right. \\ \left. + A_3 \frac{yb[(y+b)^2 - (x-s)^2]}{[(x-s)^2 + (y+b)^2]^2} + A_4 \ln \frac{1}{[(x-s)^2 + (y-b)^2]^{1/2}} - \right. \\ \left. - A_5 \frac{(y-b)^2}{(x-s)^2 + (y-b)^2} \right\} \tau(s) ds + \frac{\lambda^* + 2\mu}{4\mu(\lambda^* + \mu)} px \quad (5)$$

$$v^{(1)}(x, y) = \frac{1}{\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ B_1 \operatorname{arctg} \frac{x-s}{y+b} + B_2 \frac{(x-s)(y-b)}{(x-s)^2 + (y+b)^2} + \right. \\ \left. + B_3 \frac{yb(x-s)(y+b)}{[(x-s)^2 + (y+b)^2]^2} + B_4 \frac{(x-s)(y-b)}{(x-s)^2 + (y-b)^2} \right\} \tau(s) ds - \frac{\lambda^*}{4\mu(\lambda^* + \mu)} py \\ (-\infty < x < \infty; 0 \leq y < \infty; b > 0) \quad (6)$$



$$u^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ C_1 \ln \frac{1}{[(x-s)^2 + (y-b)^2]^{1/2}} + C_2 \frac{b(y-b)}{(x-s)^2 + (y-b)^2} - \right. \\ \left. - C_3 \frac{y(y-b)}{(x-s)^2 + (y-b)^2} \right\} \tau(s) ds + \frac{\lambda_1^* + 2\mu_1}{4\mu_1(\lambda_1^* + \mu_1)} kpx \quad (7)$$

$$v^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ D_1 \operatorname{arctg} \frac{x-s}{y-b} + D_2 \frac{b(x-s)}{(x-s)^2 + (y-b)^2} + \right. \\ \left. + D_3 \frac{y(x-s)}{(x-s)^2 + (y-b)^2} \right\} \tau(s) ds - \frac{\lambda_1^*}{4\mu_1(\lambda_1^* + \mu_1)} kpy \quad (8)$$

$$(-\infty < x < \infty; -\infty < y \leq 0; b > 0).$$

где h — толщина пластины, $u^{(1)}(x, y)$, $v^{(1)}(x, y)$ и $u^{(2)}(x, y)$, $v^{(2)}(x, y)$ — перемещения точек пластины при $y \geq 0$ и при $y \leq 0$, соответственно.

Для коэффициентов из (5) — (8) имеем

$$A_1 = \frac{\mu^2(\lambda_1^* + 3\mu_1)(\lambda^* + 2\mu)^2 + \mu^2}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)[\mu_1(\lambda^* + 3\mu) + \mu(\lambda^* + \mu)]} - \frac{\mu_1^2(\lambda^* + 3\mu)[2\mu^2 + (\lambda_1^* + \mu_1)(\lambda^* + 3\mu)]}{[\mu(\lambda_1^* + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1^* + \mu_1)]}$$

$$A_2 = \frac{(\mu_1 - \mu)(\lambda^* + \mu)(\lambda^* + 3\mu)}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)[\mu_1(\lambda^* + 3\mu) + \mu(\lambda^* + \mu)]}, \quad A_4 = \frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)}$$

$$A_3 = \frac{(\mu - \mu_1)(\lambda^* + \mu)^2}{2\mu(\lambda^* + 2\mu)[\mu_1(\lambda^* + 3\mu) + \mu(\lambda^* + \mu)]}, \quad A_5 = \frac{\lambda^* + \mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)}$$

$$B_1 = \frac{\mu^2(\lambda_1^* + 3\mu_1) - \mu_1^2(\lambda^* + 3\mu)}{2[\mu_1(\lambda^* + 3\mu) + \mu(\lambda^* + \mu)][\mu(\lambda_1^* + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1^* + \mu_1)]}$$

$$B_4 = \frac{(\mu - \mu_1)(\lambda^* + \mu)(\lambda^* + 3\mu)}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)[\mu_1(\lambda^* + 3\mu) + \mu(\lambda^* + \mu)]}$$

$$B_3 = \frac{(\mu_1 - \mu)(\lambda^* + \mu)^2}{\mu(\lambda^* + 2\mu)[\mu_1(\lambda^* + 3\mu) + \mu(\lambda^* + \mu)]}, \quad B_2 = \frac{\lambda^* + \mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)}$$

$$C_1 = \frac{\mu(\lambda^* + 2\mu)(\lambda_1^* + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1^* + 2\mu_1)(\lambda^* + 3\mu)}{2[\mu(\lambda_1^* + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1^* + \mu_1)][\mu_1(\lambda^* + 3\mu) + \mu(\lambda_1^* + \mu_1)]}$$

$$C_2 = \frac{\lambda^* + \mu}{2[\mu_1(\lambda^* + 3\mu) + \mu(\lambda^* + \mu)]}, \quad C_3 = \frac{\lambda_1^* + \mu_1}{2[\mu(\lambda_1^* + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1^* + \mu_1)]}$$

$$D_1 = \frac{\mu_1^2(\lambda^* + 3\mu) - \mu^2(\lambda_1^* + 3\mu_1)}{2[\mu(\lambda_1^* + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1^* + \mu_1)][\mu_1(\lambda^* + 3\mu) + \mu(\lambda^* + \mu)]}$$

$$D_2 = \frac{\lambda^* + \mu}{2[\mu_1(\lambda^* + 3\mu) + \mu(\lambda^* + \mu)]}, \quad D_3 = \frac{\lambda_1^* + \mu_1}{2[\mu(\lambda_1^* + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1^* + \mu_1)]}$$

Из (5) определим $\frac{\partial u^{(1)}(x, b)}{\partial x}$

$$\frac{\partial u^{(1)}(x, b)}{\partial x} = U^{(1)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r(x-s)\tau(s)ds + \frac{\lambda^* + 2\mu}{4\mu(\lambda^* + \mu)} p, \quad (-\infty < x < \infty) \quad (9)$$

где

$$r(x) = -\frac{1}{ih} \left[A_1 \frac{x}{x^2 + 4b^2} + 8b^2 A_2 \frac{x}{(x^2 + 4b^2)^2} + 2b^2 A_3 \frac{x(12b^2 - x^2)}{(x^2 + 4b^2)^2} + A_4 \frac{1}{x} \right] \quad (10)$$

Учитывая также условия контакта

$$U_s(x) = U^{(1)}(x), \quad (-\infty < x < \infty) \quad (11)$$

и применив к (4), (9) и (11) преобразование Фурье, соответственно получим

$$-i\sigma \bar{U}_s(\sigma) = \frac{\chi}{F_s} \frac{E_{s_2} - E_{s_1}}{E_{s_2} E_{s_1}} (e^{i\infty} - e^{-i\infty}) + \frac{\bar{\tau}_1(\sigma)}{E_{s_1} F_s} + \frac{\bar{\tau}_2(\sigma)}{E_{s_2} F_s} \quad (12)$$

$$\bar{U}^{(1)}(\sigma) = \bar{r}(\sigma)\bar{\tau}(\sigma) + \frac{\lambda^* + 2\mu}{4\mu(\lambda^* + \mu)} p\delta(\sigma), \quad \bar{U}_s(\sigma) = \bar{U}^{(1)}(\sigma) \quad (13)$$

где

$$\bar{r}(\sigma) = \frac{1}{ih} \left[A_4 \operatorname{sgn} \sigma + (A_4 \operatorname{sgn} \sigma + 2bA_2\sigma + b^2A_3\sigma^2 \operatorname{sgn} \sigma) e^{-2h|\sigma|} \right] \quad (14)$$

при этом

$$\bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\sigma x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\sigma)e^{-i\sigma x} d\sigma$$

Сопоставлением формул (12) и (13) получим:

$$\bar{\tau}_1(\sigma) = \frac{A(E_{s_2} - E_{s_1})}{E_{s_2}} \frac{\bar{\tau}_2(\sigma)}{A + |\sigma| + \bar{q}(\sigma)} + \bar{g}(\sigma) \quad (15)$$

где

$$\bar{q}(\sigma) = (C_1|\sigma| + 2bC_2\sigma^2 + b^2C_3|\sigma|^3) e^{-2h|\sigma|} \quad (16)$$

$$A = \frac{h}{E_{s_1} F_s A_4}, \quad C_1 = \frac{A_1}{A_4}, \quad C_2 = \frac{A_2}{A_4}, \quad C_3 = \frac{A_3}{A_4}$$

$$\bar{g}(\sigma) = -2i \frac{A\chi(E_{s_2} - E_{s_1})}{E_{s_2}} \frac{\sin(a\sigma)}{A + |\sigma| + \bar{q}(\sigma)} \quad (17)$$

Применив к (15) обратное преобразование Фурье, получим

$$\tau(x) = \frac{A(E_{s_2} - E_{s_1})}{E_{s_2}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\tau}_2(\sigma)e^{-i\sigma x}}{A + |\sigma| + \bar{q}(\sigma)} d\sigma + g(x) \quad (18)$$

где

$$g(x) = -\frac{i}{\pi} \frac{A\chi(E_{s_2} - E_{s_1})}{E_{s_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\sigma)e^{-i\sigma x}}{A + |\sigma| + \bar{q}(\sigma)} d\sigma \quad (19)$$

Теперь покажем, что в точках $x = \pm a$ контактные напряжения имеют логарифмическую особенность [4].

Действительно, поскольку $\bar{\tau}(0) = 0$, следовательно,

$$\bar{\tau}_2(\sigma) = o\left[\frac{\sin(a\sigma)}{\sigma}\right] \text{ при } |\sigma| \rightarrow \infty$$

Учитывая также следующее соотношение:

$$A + |\sigma| + \bar{q}(\sigma) = O(|\sigma|) \text{ при } |\sigma| \rightarrow \infty$$

из свойств интеграла Фурье получим, что первый член в выражении $\tau(x)$ — непрерывная функция, а $g(x)$ имеет логарифмическую особенность при $x \rightarrow \pm a$.

Далее, применив теорему о свертке и полагая $|x| < a$, из соотношения (18) для определения $\tau(x)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\tau(x) = \frac{A(E_{s_2} - E_{s_1})}{E_{s_2}} \int_{-a}^a k(x-s)\tau(s)ds + g(x), \quad |x| < a \quad (20)$$

где

$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\sigma x}}{A + |\sigma| + \bar{q}(\sigma)} d\sigma \quad (21)$$

Отметим, что при $|x| \rightarrow 0$ $k(x)$ имеет логарифмическую особенность, поскольку знаменатель подынтегрального выражения в (21) имеет порядок $|\sigma|$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$.

Рассматривая уравнение (20) в пространстве суммируемых функций $L(-a, a)$, ее решение можно получить методом последовательных приближений при

$$\frac{A|E_{s_2} - E_{s_1}|}{E_{s_2}} \sup_{|x| < a} \int_{-a}^a |k(x-s)| dx < 1$$

Имея значения $\tau(x)$ при $|x| < a$, остальные ее значения получаются из соотношения (18).

Что касается постоянной X , то она определяется из условия (3).

Получим также асимптотическую формулу для $\tau(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Имея в виду разложение $\bar{\tau}(\sigma)$ при $|\sigma| \rightarrow 0$

$$\bar{\tau}(\sigma) = a_0\sigma + a_1\sigma|\sigma| + a_2\sigma^3 + a_3i\sigma^3|\sigma| + a_4\sigma^5 + O(\sigma^6)$$

где

$$a_0 = \frac{E_{s_2} - E_{s_1}}{E_{s_2}} [\bar{\tau}'_2(0) - 2iaX], \quad a_1 = -\frac{E_{s_2} - E_{s_1}}{E_{s_2}} (1 + c_1) [\bar{\tau}'_2(0) - 2iaX]$$

$$a_3 = \frac{E_{\alpha_1} - E_{\alpha_2}}{AE_{\alpha_2}} \left[\frac{4b}{A} (1+c_1)(c_2 - c_1) - b^2 (c_1 + 2c_2 - 4c_3) - \frac{(1+c_1)^3}{A^2} \right] \left[\bar{v}_2(0) - 2iaX \right] - \frac{1+c_1}{A} \left[\bar{v}_2''(0) + \frac{2i}{3} a^3 X \right]$$

a_0, a_2 и a_4 – некоторые постоянные, в силу свойств интеграла Фурье [5] имеем

$$\tau(x) = \frac{2a_1}{\pi x^3} + \frac{24a_2}{\pi x^5} + o(x^{-7}), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (22)$$

Автор выражает благодарность профессору Э.Х. Григоряну за ценные советы в ходе решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стериберг Э. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке. П.М. Тр. Амер. общ. инж. механиков. 1966. Сер. Е. №4. С.124-135.
2. Григорян Э.Х. Об одном подходе решения задач для упругой плоскости с бесконечным кусочно-однородным включением. // Уч. записки ЕГУ, естеств. науки. 1985. №2. С.35-40.
3. Багдасарян Р.А., Гукасян Г.О. Об одной задаче для кусочно-однородной пластины, усиленной бесконечным стрингером. // Межвуз. сб. научных трудов. 1991. Вып.8. С.316-321.
4. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки и упругой полуплоскости. // Уч. записки. ЕГУ, естеств. науки. 1979. №3. С.29-34.
5. Lighthill M.J. An Introduction to Fourier analysis and generalized functions. Cambridge Univ. Press. 1959. P.87.

Государственный инженерный университет Армении

Поступила в редакцию
8.07.2005