ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №4, 2005 Механика

УДК. 539.9

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ПЛАНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ

Ананян А.Ж.

Ա.Ժ.Անանյան
Բարակ կիսաանվերջ սալ-շերտի տեղայնացված պլանար տատանումները

Դիտարկվում է կիսաանվերջ սալ-շերտ, որի եզրերը հոդակապորեն ամրակցված են: Այն դեպքում, երբ վերջավոր եզրը ազատ է, տեղայնացված տատանումների հաճախությունը որոշող հավասարումը հանդիսանում է կիսատարածությունում Ռելեյի մակերևութային ալիքների հավասարման անալոգը: Խնդիրը ուսումնասիրվում է այն դեպքի համար, երբ վերջավոր եզրում տրված են առաձգական ամրակցման եզրային պայմանները: Որոշվում են տատանումների հաճախությունները՝ կախված առաձգական ամրակցման բնութագրիչ գործակցից: Ստացված են տեղայնացված ալիքների գոյության պայմաններ:

A.J.Ananyan
Localized planar vibrations of thin semi-infinite plate-strip

The problem of semi-infinite plate-strip, two edges of which are jointly fixed is considered. In the case, when plate finite edge is free the equation determining the frequencies of localized vibrations becomes analogy of Relay equation for the surface waves in half-space. The problem is investigated for the case, when on the finite edge the boundary condition of elastic fixing is given. Vibrations frequencies are determined in depend on ration characteting an elastic fixing. The conditions of localized vibrations existence are received.

Рассматривается полубесконечная пластинка-полоса, две полубесконечные края которой шарнирно закреплены. В случае, когда конечный край пластинки свободен, уравнение, определяющее частоты локализованных колебаний, является аналогом уравнения Рэлея для поверхностных волн в полупространстве. Задача исследуется для случая, когда на конечном крае заданы граничные условия упругого закрепления. Определяются частоты колебаний в зависимости от коэффициента, характеризующего упругие закрепления. Получены условия существования локализованных колебаний.

1.Пластинка из упругого изотропного материала постоянной толщины в прямоугольной декартовой системе координат занимает область $0 \le x \le \infty$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$.

Уравнения планарных колебаний пластинки – уравнения обобщенного плоского напряженного состояния – имеют вид:

$$C_t^2 \Delta u + \left(C_l^2 - C_t^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$C_t^2 \Delta v + \left(C_l^2 - C_t^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (1.1)$$

где u, v – перемещение по направлениям x, y, соответственно; Δ – двумерный оператор Лапласа

$$C_l^2 = \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)\rho}, \quad C_t^2 = \frac{E}{2(1+\nu)\rho} \qquad (1.2)$$

C_l, C_t–скорости продольных и поперечных волн, E–модуль Юнга, ν–коэффициент Пуассона, ρ–плотность материала пластинки. Следует отметить, что уравнения распространения волн в задаче плоской деформации совпадают с уравнениями (1.1), но отличаются выражением для продольной скорости C_l. Для задач плоской деформации

$$C_l^2 = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}$$

Преобразование [1]

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y},\ v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.3}$$

приводит систему (1.1) к автономным уравнениям

$$C_l^2\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\ C_t^2\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

Для задачи локализованных колебаний пластинки, по аналогии с поверхностными волнами Рэлея, требуется найти такие решения системы уравнений (1.1) или уравнений (1.4), которые удовлетворяли бы условиям затухания на бесконечности

$$\lim_{x\to\infty} u = 0,\quad \lim_{x\to\infty} v = 0 \tag{1.5}$$

или

$$\lim_{x\to\infty}\varphi = 0,\quad \lim_{x\to\infty}\psi = 0 \tag{1.6}$$

Рассматривается наиболее простой вариант задачи локализованных колебаний пластинки, когда на краях $y = 0, b$ заданы граничные условия Навье [2]

$$u = 0,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1.7}$$

Согласно преобразованию (1.3), условия (1.7) записываются в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0 \tag{1.8}$$

Обзор работ, где рассматриваются другие варианты граничных условий при $y = 0, b$, приводится в [3].

Решения уравнений (1.4), удовлетворяющие граничным условиям (1.8) и условиям затухания (1.6), имеют вид

$$\begin{gathered}\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(i\omega_n t - \lambda_n \nu_1 x)\sin\lambda_n y \\ \psi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(i\omega_n t - \lambda_n \nu_2 x)\cos\lambda_n y\end{gathered} \tag{1.9}$$

где

$$\begin{gathered}\lambda_n = \frac{n\pi}{b},\ \nu_1 = \sqrt{1-\theta\eta_n},\ \nu_2 = \sqrt{1-\eta_n} \\ \eta_n = \frac{\omega_n^2}{\lambda_n^2 C_t^2},\ \theta = \frac{C_t^2}{C_l^2} = \frac{1-\nu}{2}\end{gathered} \tag{1.10}$$

Произвольные постоянные A_n и B_n должны определяться из граничных условий на кромке пластинки $x=0$. Согласно условиям затухания (1.6) искомые параметры η_n, характеризующие частоты локализованных колебаний пластинки, должны удовлетворять условиям

$$0 \le \eta_n \le 1 \tag{1.11}$$

2. Пусть на кромке пластины $x=0$ заданы условия свободной границы

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{2.1}$$

т. е. отсутствие нормальной и касательной нагрузок.

Согласно (1.3) условия (2.1) приводятся к виду

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+(1-\nu)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=0\\&2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0\end{aligned} \tag{2.2}$$

Подстановка решений (1.9) в граничные условия (2.2) при $x=0$ даст для определения произвольных постоянных A_n, B_n следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}&\left(\nu_1^2-\nu\right)A_n+(1-\nu)\nu_2B_n=0\\&2\nu_1A_n+\left(\nu_2^2+1\right)B_n=0\end{aligned} \tag{2.3}$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.3) с учетом обозначений (1.10) приводит к известному уравнению Рэлея

$$R(\eta_n)\equiv(2-\eta_n)^2-4\nu_1\nu_2=0 \tag{2.4}$$

Так как известно, что уравнение (2.4) всегда имеет действительный корень, удовлетворяющий условиям (1.11), то локализованные колебания у свободного края пластинки существуют. Обобщения уравнения (2.4) для анизотропной пластинки из материала с кубической симметрией приводятся в [4]. Планарные локализованные колебания ортотропной пластины рассмотрены в [5].

Можно показать, что если на кромке $x=0$ пластины заданы условия либо закрепления, либо Навье, либо скользящего контакта, то локализованные колебания не существуют. Более сложные вопросы возникают при решении задач с условиями упругого закрепления кромки $x=0$ [5]. Граничные условия для частного случая упругого закрепления кромки $x=0$ имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}+\alpha u=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \alpha\ge 0 \tag{2.5}$$

что является обобщением условий свободного края (2.1). Здесь коэффициент α характеризует упругие свойства закрепления (стесненного перемещения по направлению оси $0x$) [6].

Подстановка решений (1.9), с учетом преобразования (1.3) в граничные условия, (2.5) приводит к следующей системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_n, B_n.

$$\begin{aligned}&\left(\nu_1^2-\nu-\alpha\lambda_n^{-1}\nu_1\right)A_n+\left[(1-\nu)\nu_2-\alpha\lambda_n^{-1}\right]B_n=0\\&2\nu_1A_n+\left(\nu_2^2+1\right)B_n=0\end{aligned} \tag{2.6}$$

Дисперсионное уравнение задачи получается из равенства нулю детерминанта системы (2.6)

$$R(\eta_n,\alpha)\equiv(2-\eta_n)^2-4\nu_1\nu_2+\lambda_n^{-1}\alpha\nu_1\theta^{-1}\eta_n=0 \tag{2.7}$$

В отличие от классического уравнения Рэлея, уравнение (2.7) определяет безразмерную фазовую скорость η_n в зависимости от λ_n, т. е. локализованные волны обладают дисперсионным свойством. Значение $\eta_n=0$, как и для уравнения Рэлея, является корнем уравнения (2.7). Исключением корня $\eta_n=0$ [7], уравнение (2.7) приводится к виду

$$R_1(\eta_n,\alpha)\equiv\eta_n-\frac{4(1-\theta)\nu_2}{\nu_1+\nu_2}+\lambda_n^{-1}\alpha\nu_1\theta^{-1}=0 \tag{2.8}$$

Функция R_1 на концах промежутка $0<\eta_n<1$ принимает следующие значения:

$$\begin{aligned}&R_1(0,\alpha)\equiv-2(1-\theta)+\lambda_n^{-1}\alpha\theta^{-1}\\&R_1(1,\alpha)\equiv1+\lambda_n^{-1}\alpha\theta^{-1}\sqrt{1-\theta}\end{aligned} \tag{2.9}$$

Если функция R_1 на концах промежутка принимает значения разных знаков, то это достаточно, чтобы существовал действительный корень, удовлетворяющий условиям затухания (1.11). Из (2.9) следует что указанный корень существует, т.е. локализованные колебания имеют место, если

$$-\frac{\theta}{\sqrt{1-\theta}}<\frac{\alpha}{\lambda_n}<2(1-\theta)\theta \tag{2.10}$$

В табл. 1 приводятся значения безразмерной фазовой скорости η_n в зависимости от квадрата безразмерного коэффициента стеснения (пружины) $\dfrac{\alpha}{\lambda_n}$ при $\theta=\dfrac{1}{3},\left(\nu=\dfrac{1}{3}\right)$

Таблица 1

α/λ_n	$(6,0)^{-1/2}$	-0.3	-0.1	0	0.1	0.3	0.4	0.43	4/9
η_n	1	0.9924	0.9214	0.8453	0.7332	0.3787	0.1280	0.0428	0

3. Другой вариант обобщения условий свободного края $x=0$ (2.1) является введение стеснения перемещения по направлению оси oy

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\beta v=0 \tag{3.1}$$

Подставляя решение (1.9), с учетом преобразования (1.3) в граничные условия, (3.1) приводит к следующей системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_n, B_n

$$\begin{aligned}&(\nu_1^2-\nu)A_n+(1-\nu)\nu_2 B_n=0\\&(2\nu_1-\beta\lambda_n^{-1})A_n+(\nu_2^2+1-\beta\lambda_n^{-1}\nu_2)B_n=0\end{aligned}\tag{3.2}$$

Из равенства нулю детерминанта системы (3.2) получается дисперсионное уравнение

$$R(\eta_n,\beta)\equiv(2-\eta_n)^2-4\nu_1\nu_2+\lambda_n^{-1}\beta\nu_2\eta_n=0\tag{3.3}$$

Здесь при $\beta=0$ также получается известное уравнение Рэлея. Уравнение (3.3), аналогично предыдущему случаю, имеет корень $\eta_n=0$.

Исключение корня $\eta_n=0$ преобразует дисперсионное уравнение к виду

$$R_2(\eta_n,\beta)\equiv\eta_n-\frac{4(1-\theta)\nu_2}{\nu_1+\nu_2}+\frac{\beta}{\lambda_n}\nu_2=0\tag{3.4}$$

Из свойств функции $R_2(\eta_n,\beta)$

$$\begin{aligned}&R_2(0,\beta)\equiv-2(1-\theta)+\beta\lambda_n^{-1}\\&R_2(1,\beta)=1\end{aligned}\tag{3.5}$$

следует, что уравнение (3.4) имеет корень, удовлетворяющий условию затухания (1.11), если

$$\beta\lambda_n^{-1}<2(1-\theta)\tag{3.6}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.
2. Белубекян М. В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. //В сб.: Проблемы механики тонких деформируемых тел». Ереван: Изд-во НАН Армении. 2002. С. 67-88.
3. Городецкая Н. С., Гринченко В. Т. Анализ физических особенностей явления краевого резонанса в упругих телах. //Акустический вестник. 2004. № 1. С. 30-43.
4. Белубекян М. В., Енгибарян И. А. Волны, локализованные вдоль свободной кромки пластинки с кубической симметрией. //Изв. РАН. МТТ. 1996. № 6. С.139-143.
5. Гулгазарян Г. Р., Гулгазарян Л. Г. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой ортотропной безмоментной цилиндрической оболочке. //В.сб.: Математический анализ и его приложения. Ереван: Изд-во «Манкаварж». 2002.Вып. 1. С. 50-67.
6. Вибрации в технике.(Справочник в 6 томах).Т. 1. Колебания линейных систем. (ред. В. В. Болотин). М.: Машиностроение. 1978. 352с.
7. Белубекян М. В. Поверхностные волны в упругих средах.//В сб.: «Проблемы механики деформируемого твердого тела». Ереван: Изд. НАН Армении. 1997. С.79-96.

Институт Механики
НАН РА

Поступила в редакцию
6.05.2005