

УДК 539.3: 537.228.1

ВЛИЯНИЕ ТИПА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ПОВЕДЕНИЕ  
НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ  
ТОНКОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КЛИНА

Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М.

Գ.Գ.Ներսիսյան, Ա.Մ.Սարգսյան

Բարակ աինգաւելկտրիկ սեպի անկյունային կետի շրջակայքում լարումների վրա  
եզրային պայմանների տիպի ազդեցության մասին

Исследовано поведение характеристик электроупругого поля (напряжения и напряженность электрического поля) в окрестности угловой точки тонкого пьезоэлектрического клина при различных электрических граничных условиях. На границах клина заданы также упругие перемещения.

Տնյայ է տրված, որ էլեկտրական խառը եզրային պայմանները փոքրացնում են սեպի բացվածքի անկյան սահմանային արժեքը, որի դեպքում էլեկտրատաքայական դաշտի բնութագրիչները դառնում են վերջավոր:

G.G.Nersisyan, A.M.Sargsyan

The Influence of Type of Boundary Condition on the Behaviour of Stresses in Neighbourhood of  
Angular Point of Thin Piezoelectric Wedge

The behaviour of the electro-elastic field characteristics (stresses and electric-field strength) in the vicinity of the angular point of the thin piezoelectric wedge under various electric boundary conditions is studied. On the wedge boundaries elastic displacements are given as well.

It is established that only the mixed electric boundary condition diminish the values of the limit angle of the wedge opening, under which the characteristics of the electroelastic field become finite.

Изучено поведение характеристик электроупругого поля (напряжения и напряженность электрического поля) в окрестности угловой точки тонкого пьезоэлектрического клина при различных электрических граничных условиях. На границах клина заданы также упругие перемещения.

Установлено, что смешанные электрические граничные условия уменьшают значения предельного угла раствора клина, при котором характеристики электроупругого поля становятся конечными.

Исследование особенностей напряжений в окрестности угловой точки пьезоэлектрического тела имеет важное прикладное значение при проектировании и изготовлении многих элементов пьезоэлектронной техники, в частности, пьезотрансформаторов [1, 2].

В работах [3, 4, 5] исследовано поведение связанного электроупругого поля в окрестности угловой точки тонкого однородного пьезоэлектрического клина, на границах которого ( $\theta = 0$  и  $\theta = \theta_1$ ,  $\theta_1 < 2\pi$ ) заданы: а) распределение зарядов, б) потенциал электрического поля, в) на одной границе задан электрический потенциал, а на другой — распределение зарядов. Во всех случаях на границах пьезоклина заданы механические усилия. Было установлено, что смешанные электрические граничные условия (случай 3) уменьшают предельный угол раствора пьезоэлектрического клина, при котором характеристики электроупругого поля (напряжения, компоненты вектора электрической индукции) становятся конечными. Для первых двух граничных условий предельный угол  $\theta_{\text{пр}} = \pi$  и совпадает с таковым однородного анизотропного клина в упругой задаче [6].

В данной работе принимается, что на границах пьезоклина заданы упругие перемещения и те же электрические граничные условия.

Постановка задачи такова: тонкий пьезоэлектрический клин в каждой точке имеет плоскость материальной симметрии, параллельную его срединной плоскости. Электрические и механические внешние воздействия распределены симметрично относительно срединной плоскости и незначительно изменяются по толщине. Как и в обычной теории упругости, в условиях тонкого тела исследуются средние по толщине значения электроупругих величин. Начало декартовой  $x, y, z$  и полярной  $r, \theta, z$  систем координат находится в угловой точке срединной плоскости клина, ось  $z$  направлена нормально к этой плоскости.

При отсутствии объемных сил и электрических зарядов функции упругих напряжений  $F(x, y)$  и электрической индукции  $\Psi(x, y)$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям [7, 8]

$$4\pi L_4 F(x, y) - L_3 \Psi(x, y) = 0, \quad L_1 F(x, y) + L_2 \Psi(x, y) = 0 \quad (1)$$

механическим

$$u(x, y) = v(x, y) = 0 \text{ при } \theta = 0 \text{ и } \theta = \theta_1 \quad (2)$$

и электрическим граничным условиям, заданным в одном из видов:

$$\Psi(x, y)|_{\theta=0} = 0 \quad (3)$$

$$V(x, y)|_{\theta=0} = 0 \quad (4)$$

$$V(x, y)|_{\theta=0} = \Psi(x, y)|_{\theta=0} = 0 \quad (5)$$

Предполагается, что на бесконечности характеристики электроупругого поля стремятся к нулю.

В (1)-(5)  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  — упругие перемещения,  $V(x, y)$  — потенциал электрического поля

$$\begin{aligned} L_4 &= s_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2s_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2s_{12} + s_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2s_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + s_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \\ L_3 &= -g_{22} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (g_{12} + g_{26}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (g_{12} + g_{16}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + g_{11} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \\ L_2 &= \eta_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\eta_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \eta_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (6)$$

где  $s_{22}, \dots$  — коэффициенты упругости при постоянной электрической индукции,  $\eta_{22}, \dots$  — коэффициенты диэлектрической восприимчивости при постоянных механических напряжениях,  $g_{22}, \dots$  — пьезоэлектрические модули.

Из (1)-(6) следует, что при отсутствии пьезоэлектрического эффекта ( $g_{ij} = 0$ ) краевые задачи (1)-(5) распадаются на две независимые группы задач: упругую задачу для анизотропного клина  $L_4 F(x, y) = 0$  с гранич-

ными условиями (2) и электростатические задачи для того же анизотропного клина  $L_2\Psi(x, y) = 0$  с граничными условиями (3), (4) или (5). Упругая задача легко решается изложенным в [3-6] методом, а решения электрических задач получаются из [7] как частный случай.

Напряжения и компоненты вектора электрической индукции выражаются через функции  $F(x, y)$  и  $\Psi(x, y)$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad D_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad D_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (7)$$

Как и в работах [3-5], представляя решение (1) в виде

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^3 [A_j (x + \mu_j y)^{\lambda+1} + B_j (x + \bar{\mu}_j y)^{\lambda+1}] \quad (8)$$

$$\Psi(x, y) = \sum_{j=1}^3 [A_j f(\mu_j)(x + \mu_j y)^\lambda + B_j f(\bar{\mu}_j)(x + \bar{\mu}_j y)^\lambda]$$

где  $A_j, B_j$  — неизвестные постоянные,  $\lambda$  — произвольный параметр и, учитывая уравнения состояния и условие потенциальности электрического поля [8,9], для осредненных характеристик электрического поля получаем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (\lambda + 1) \sum_{j=1}^3 [A_j M_j (x + \mu_j y)^\lambda + B_j \bar{M}_j (x + \bar{\mu}_j y)^\lambda] \\ v(x, y) &= (\lambda + 1) \sum_{j=1}^3 [A_j N_j (x + \mu_j y)^\lambda + B_j \bar{N}_j (x + \bar{\mu}_j y)^\lambda] \\ V(x, y) &= (\lambda + 1) \sum_{j=1}^3 [A_j m_j (x + \mu_j y)^\lambda + B_j \bar{m}_j (x + \bar{\mu}_j y)^\lambda] \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} M_j &= s_{11}\mu_j^2 - s_{16}\mu_j + s_{12} - f_j(g_{11}\mu_j - g_{21})/4\pi \\ N_j &= s_{12}\mu_j - s_{26} + s_{22}\mu_j^{-1} - f_j(g_{12} - g_{22}\mu_j^{-1})/4\pi \end{aligned} \quad (9)$$

$$m_j = g_{11}\mu_j^2 - g_{11}\mu_j + g_{12} + f_j(\eta_{11}\mu_j - \eta_{12})$$

$$f_j = f(\mu_j) = -l_3(\mu_j)/l_2(\mu_j), \quad (j=1, 2); \quad f_3 = 4\pi l_4(\mu_3)/l_3(\mu_3)$$

$\bar{M}_j, \bar{N}_j, \bar{m}_j, \bar{f}_j$  — сопряженные по отношению  $M_j, N_j, m_j$  и  $f_j$  комплексные числа, постоянные  $w, u_0, v_0$  характеризуют поворот и жесткое смещение пластинки в срединной плоскости,  $V_0$  — нулевой уровень электростатического поля,  $\mu_j$  и  $\bar{\mu}_j$  — корни алгебраического уравнения

$$4\pi l_4(\mu)l_2(\mu) + l_3^2(\mu) = 0 \quad (10)$$

причем, как показано в работах [9, 10], они не могут быть действительными.

В дальнейшем принимается, что корни уравнения (10)

$$\mu_j = \sigma_j + i\tau_j, \quad \bar{\mu}_j = \sigma_j - i\tau_j, \quad \tau_j > 0 \quad (j=1,2,3)$$

простые и не являются одновременно корнями  $l_k(\mu) = 0$ , ( $k = 4,3,2$ ).

Полиномы  $l_k(\mu)$  получаются из  $L_k$  заменой  $\partial^k/\partial x^k$  на единицу, а  $\partial^k/\partial y^k$  — на  $\mu_j$ .

Удовлетворяя граничным условиям (2)-(5), для определения  $A_j, B_j$  получим однородные системы линейных алгебраических уравнений. Из условий существования нетривиальных решений этих систем будем иметь следующие уравнения относительно параметра  $\lambda = \alpha + i\beta$ :

для задачи (1), (3)

$$\Delta^{(3)}(\lambda) = \begin{vmatrix} M_1 & M_2 & \bar{M}_1 & \bar{M}_2 & M_3 & \bar{M}_3 \\ N_1 & N_2 & \bar{N}_1 & \bar{N}_2 & N_3 & \bar{N}_3 \\ M_1 a_1 & M_2 a_2 & \bar{M}_1 \tilde{a}_1 & \bar{M}_2 \tilde{a}_2 & M_3 a_3 & \bar{M}_3 \tilde{a}_3 \\ N_1 a_1 & N_2 a_2 & \bar{N}_1 \tilde{a}_1 & \bar{N}_2 \tilde{a}_2 & N_3 a_3 & \bar{N}_3 \tilde{a}_3 \\ f_1 & f_2 & \bar{f}_1 & \bar{f}_2 & f_3 & \bar{f}_3 \\ f_1 a_1 & f_2 a_2 & \bar{f}_1 \tilde{a}_1 & \bar{f}_2 \tilde{a}_2 & f_3 a_3 & \bar{f}_3 \tilde{a}_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

для задач (1), (4)

$$\Delta^{(4)}(\lambda) = \begin{vmatrix} M_1 & M_2 & \bar{M}_1 & \bar{M}_2 & M_3 & \bar{M}_3 \\ N_1 & N_2 & \bar{N}_1 & \bar{N}_2 & N_3 & \bar{N}_3 \\ M_1 a_1 & M_2 a_2 & \bar{M}_1 \tilde{a}_1 & \bar{M}_2 \tilde{a}_2 & M_3 a_3 & \bar{M}_3 \tilde{a}_3 \\ N_1 a_1 & N_2 a_2 & \bar{N}_1 \tilde{a}_1 & \bar{N}_2 \tilde{a}_2 & N_3 a_3 & \bar{N}_3 \tilde{a}_3 \\ m_1 & m_2 & \bar{m}_1 & \bar{m}_2 & m_3 & \bar{m}_3 \\ m_1 a_1 & m_2 a_2 & \bar{m}_1 \tilde{a}_1 & \bar{m}_2 \tilde{a}_2 & m_3 a_3 & \bar{m}_3 \tilde{a}_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

для задачи (1), (5)

$$\Delta^{(5)}(\lambda) = \begin{vmatrix} M_1 & M_2 & \bar{M}_1 & \bar{M}_2 & M_3 & \bar{M}_3 \\ N_1 & N_2 & \bar{N}_1 & \bar{N}_2 & N_3 & \bar{N}_3 \\ M_1 a_1 & M_2 a_2 & \bar{M}_1 \tilde{a}_1 & \bar{M}_2 \tilde{a}_2 & M_3 a_3 & \bar{M}_3 \tilde{a}_3 \\ N_1 a_1 & N_2 a_2 & \bar{N}_1 \tilde{a}_1 & \bar{N}_2 \tilde{a}_2 & N_3 a_3 & \bar{N}_3 \tilde{a}_3 \\ m_1 & m_2 & \bar{m}_1 & \bar{m}_2 & m_3 & \bar{m}_3 \\ f_1 a_1 & f_2 a_2 & \bar{f}_1 \tilde{a}_1 & \bar{f}_2 \tilde{a}_2 & f_3 a_3 & \bar{f}_3 \tilde{a}_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

где

$$a_j = e^{\alpha \ln r_j - \beta \varphi_j} [\cos(\beta \ln r_j + \alpha \varphi_j) + i \sin(\beta \ln r_j + \alpha \varphi_j)]$$

$$\tilde{a}_j = e^{\alpha \ln r_j + \beta \varphi_j} [\cos(\beta \ln r_j - \alpha \varphi_j) + i \sin(\beta \ln r_j - \alpha \varphi_j)]$$

$r_j$  и  $\varphi_j$  — модуль и аргумент обобщенных комплексных переменных

$$z_j = \cos \theta_j + \mu_j \sin \theta_j, \quad 0 < \theta_j < 2\pi, \quad (j=1,2,3).$$

Общее решение (1), удовлетворяющее граничным условиям (2)-(5) и конкретным условиям на замыкающей части контура угловой области, после перехода к полярной системе координат ( $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ) представляется в виде

$$F = \sum_{(\lambda_n)} r^{\lambda_n+1} \sum_{j=1}^3 r_{j_n}^{\lambda_n+1} [C_j \cos(\lambda_n+1)\varphi_{j_n} + D_j \sin(\lambda_n+1)\varphi_{j_n}] \quad (14)$$

$$\Psi = \sum_{(\lambda_n)} r^{\lambda_n} \sum_{j=1}^3 r_{j_n}^{\lambda_n} [K_j \cos \lambda_n \varphi_{j_n} + E_j \sin \lambda_n \varphi_{j_n}]$$

где  $C_j, D_j, E_j$  и  $K_j$  — действительные постоянные,  $r_{j_n}$  и  $\varphi_{j_n}$  — модуль и аргумент обобщенных комплексных переменных

$$z_{j_n} = \cos \theta + \mu_j \sin \theta, \quad 0 < \theta_j < \varphi.$$

Первую сумму в (14) необходимо распространить на все корни трансцендентного уравнения (11), имеющие положительные действительные части.

Из (7) и (14) следует, что характеристики электроупругого поля (напряжения и напряженность электрического поля) затухают вблизи угловой точки клина ( $r \rightarrow 0$ ), если действительные части первых корней  $\operatorname{Re} \lambda_1^{(k)} > 1$  ( $k=3,4,5$ ). Если  $\operatorname{Re} \lambda_1^{(k)} < 1$ , характеристики электроупругого поля неограниченно возрастают при  $r \rightarrow 0$ . В случае  $\operatorname{Re} \lambda_1^{(k)} = 1$  эти характеристики в окрестности вершины клина конечны и вообще отличны от нуля.

Внося за знак определителей (11)-(13) общий множитель  $f_3$  из пятого столбца и  $\bar{f}_3$  из шестого и переходя к пределу  $g_M \rightarrow 0$ , вместо уравнений (10)-(13) будем иметь

$$l_4(\mu)l_2(\mu) = 0 \quad (10)$$

$$\Delta^{(n)}(\lambda) = \Delta_{\text{упр}}(\lambda)\Delta_{\text{эл}}^{(n)}(\lambda) = 0, \quad (n=3,4,5) \quad (11)$$

где

$$\Delta_{\text{упр}}(\lambda) = \begin{vmatrix} M_1^* & M_2^* & \bar{M}_1^* & \bar{M}_2^* \\ N_1^* & N_2^* & \bar{N}_1^* & \bar{N}_2^* \\ M_1^* a_1 & M_2^* a_2 & \bar{M}_1^* \tilde{a}_1 & \bar{M}_2^* \tilde{a}_2 \\ N_1^* a_1 & N_2^* a_2 & \bar{N}_1^* \tilde{a}_1 & \bar{N}_2^* \tilde{a}_2 \end{vmatrix}$$

$$M_p^* = S_{11}\mu_p^2 - S_{16}\mu_p + S_{12}, \quad N_p^* = S_{12}\mu_p^2 - S_{26}\mu_p + S_{22}$$

$\bar{M}_p^*$  и  $\bar{N}_p^*$  — сопряженные по отношению  $M_p^*$  и  $N_p^*$  комплексные числа,  $\mu_p$  и  $\bar{\mu}_p$  — корни уравнения  $l_4(\mu) = 0$ . ( $p=1,2$ );

$$\Delta_{\lambda\lambda}^{(3)}(\lambda) = \Delta_{\lambda\lambda}^{(4)}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_3 & \bar{a}_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{\lambda\lambda}^{(5)}(\lambda) = \begin{vmatrix} \eta_{11}\mu_3 - \eta_{12} & \eta_{11}\bar{\mu}_3 - \eta_{12} \\ a_3 & \bar{a}_3 \end{vmatrix}$$

$\mu_3$  и  $\bar{\mu}_3$  — корни уравнения  $l_2(\mu) = 0$ .

Следовательно, при отсутствии пьезоэффекта уравнения (11)-(13) распадаются на два независимых уравнения  $\Delta_{\text{упр}}(\lambda) = 0$  и  $\Delta_{\lambda\lambda}^{(m)}(\lambda) = 0$ .

К такому же результату можно придти, если в решении (8) принимать  $A_3 = A_3^*/f_3$ ,  $B_3 = B_3^*/\bar{f}_3$ .

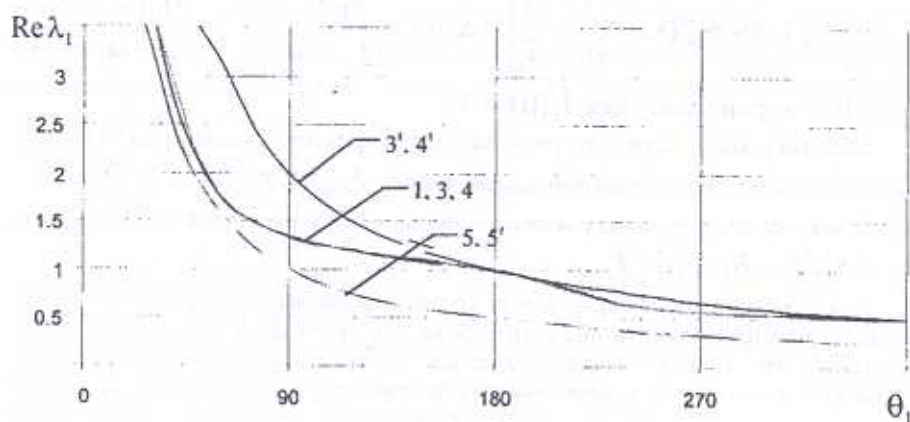
Как и в работах [3]-[5], и здесь, после раскрытия определителей 6-ого порядка, можно получить аналитический вид уравнений (11)-(13). Однако, учитывая, что при решении подобных задач для кусочно-однородного клина (что намечается в дальнейшем) получаются определители 12-го или более высокого порядка, был разработан алгоритм численного определения  $\lambda$  из (11)-(13).

Дело в том, что при использовании имеющихся в компьютерах стандартных программ для вычисления промежуточных значений детерминантов  $\Delta^{(k)}(\lambda)$ , возникает ситуация, когда аргумент произведения комплексных чисел выходит из интервала  $(-\pi, \pi)$  (вложенного в компьютер), что приводит к потере выбранной ветви. Разработанный алгоритм избавлен от подобных недостатков.

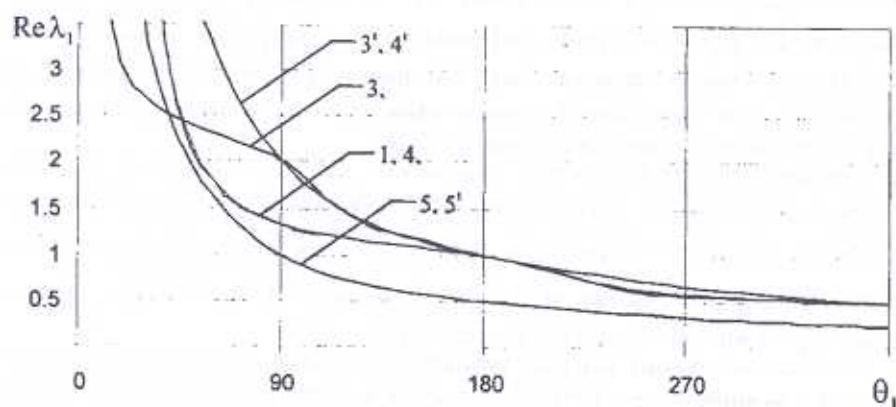
Заметим прежде всего, что, независимо от электроупругих свойств материала клина,  $\lambda = 1$  является корнем уравнений (11)-(13) при  $\theta_1 = \pi$  и  $\theta_1 = 2\pi$ , а  $\lambda = 0.5$  — только при  $\theta_1 = 2\pi$ . В этом легко убедиться, если учесть, что в этих случаях  $a_j = \bar{a}_j = -1$  и, поэтому некоторые строки каждого детерминанта из (11)-(13) совпадают.

С целью выяснения влияния граничных условий на поведение характеристик связанного электроупругого поля в окрестности угловой точки клина был проведен численный анализ по разработанному алгоритму. На компьютере, после определения положительных действительных корней уравнений (11)-(13), определяется нулевая линия мнимой части  $\Delta^{(k)}(\lambda)$ , и по ходу вычислений на этой линии определяется ноль действительной части, если такая точка в области поиска существует.

На фиг. 1 и 2 представлены некоторые результаты численного расчета зависимости  $\lambda_1$  от угла раствора клина, изготовленного из бифталата калия (фиг. 1) или бифталата рубидия (фиг. 2) [9]; при граничных условиях (2) и (3) — кривые 3, при (2) и (4) — кривые 4, при (2) и (5) — кривые 5. Там же, для сравнения, приведены соответствующие кривые при отсутствии пьезоэффекта (кривые 1 — для чисто упругой задачи, кривые 3, 4, 5 — для электростатической задачи с граничными условиями (3), (4) и (5) соответственно).



Фиг. 1



Фиг. 2

Из приведенных кривых следует, что в случае граничных условий (2) и (3) или (2) и (4) предельный угол раствора пьезоклина  $\theta_{пр}$ , при котором окрестность угловой точки переходит из малонапряженного состояния ( $\theta_1 < \theta_{пр}$ ) в концентрационное ( $\theta_1 > \theta_{пр}$ ), равняется  $\pi$ . А при смешанных граничных условиях (5), при тех же механических граничных условиях (2), предельный угол уменьшается, что было обнаружено также в работе [5]. В последнем случае, как и в работе [5],  $Re \lambda_1$  стремится к 0.25 при  $\theta_1 \rightarrow 2\pi$ .

Отметим, что плоские задачи электроупругости для клиновидных тел при неоднородных граничных условиях успешно решаются с помощью интегрального преобразования Мелина комплексной функции  $f(x + \mu y)$  [11].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472с.
2. Лавренко В.В. Пьезоэлектрические трансформаторы. М.: Энергия, 1975. 112с.
3. Саргсян А.М. Поведение связанного электроупругого поля в окрестности угловой точки пьезоэлектрического клина при обобщенном плоском напряженном состоянии. // Докл. НАН Армении. 1999. Т.99. №1. С. 34-39.
4. Саргсян А.М. Особенность связанного электроупругого поля в угловой точке пьезоэлектрического клина. // Сб. научных трудов конференции, посвященный 91-летию со дня рождения профессоров Т.Т.Хачатряна и О.М.Сапонджяна, состоявшейся 23-24 октября 1998г. в г.Ереване. С. 169-175.
5. Саргсян А.М. Об особенностях связанного плоского электроупругого поля в угловой точке пьезоэлектрического клина. // Изв. НАН Армений. Механика. 2002. Т.55. №2. С. 36-41.
6. Алексанян Р.К. Об одном классе решений уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела. // Докл. АН АрмССР. 1975. Т. LXI. №4. С. 219-224.
7. Вековищева И.М. Плоская задача теории электроупругости для пьезоэлектрической пластинки. // ПМ. 1975. Т. XI. №2. С. 85-89.
8. Саргсян А.М. О влиянии граничных условий на малонапряженность антиплоской задачи кусочно-однородного прямолинейно-анизотропного клина. // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №1. С. 17-22.
9. Лихницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416с.
10. Космодамианский А.С., Ложкин В.Н. Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин. // ПМ. 1975. Т. XI. №5. С. 45-53.
11. Михайлов С.Е. Сингулярность напряжений в составном произвольно-анизотропном теле и приложения к композитам. // МТТ. 1979. №6. С. 33-42.

Институт Механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
13.09.2004