ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №3, 2005 Механика

УДК 539.3

ДВА ТИПА ЗАДАЧ ПРОЧНОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ И ПЛАСТИНКИ

Мовсисян Л.А.

Լ.Ա.Մովսիսյան
Առաձգամածուցիկ անհամասեռ գլանային թաղանթի և սալի համար երկու տիպի ամրության խնդիրներ

Ուսումնասիրվող օբեկտների նյութը ենթադրվում է առաձգամածուցիկ և անհամասեռ ըստ բարձրության: Առաջին տիպի խնդիրը անվերջ գլանի համար կոնտակտային խնդիրն է: Ստացված է կոնտակտի չափի կախվածության արտահայտությունը ուժից և երկրաչափական չափերից ակնթարթային և երկարատև ժամանակների համար:

Երկրորդ տիպի խնդիրը՝ միաչափ սալի ծռման խնդիրն է՝ տվյալ կետում տրված ճկվածքը արտաքին բեռի մինիմալ արժեքի դեպքում:

L.A.Movsisyan
Two Type Solid Problems for Viscoelastic Nonhomogeneous Cylindrical Shell and Plate

The contact problems are considered of infinite cylindrical shell and of optimal bending (minimal load) for plate. The material of objects are assumed to be viscoelastic and nonhomogeneous along thickness.

Рассматриваются некоторые задачи для вязкоупругой цилиндрической оболочки и пластинки. Предполагается неоднородность физических свойств материала объекта по высоте. В задаче оптимального изгиба пластинки неоднородность осреднена.

1.Пусть имеется тонкостенная система, материал которой обладает неоднородностью по толщине. Причем изменяются как упругие, так и вязкие свойства. Это может быть как естественным, так и связанным с термочувствительностью материала, который находится в температурном поле. Вязкоупругость предполагается типа Максвелла—Томпсона, а температурное поле—стационарное. Так как для тонкостенных систем для расчетных величин довольствуются линейным приближением по нормальной координате, то относительно вязкоупругих характеристик также принимается линейное приближение:

$$E(z) = E_0\left(1 + 2\delta\frac{z}{h}\right), \quad E_0 = \frac{E_1 + E_2}{2}, \quad \delta = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \tag{1.1}$$

а в наследственной связи

$$\sigma = \bar{E}\left(e - \gamma\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} e\,d\tau\right), \qquad \gamma, \alpha \Rightarrow \gamma, \alpha(a_0 + za_1) \tag{1.2}$$

Как обычно, принимается, что коэффициент Пуассона при этом не меняется по толщине.

При сделанных предположениях двумерные вязкоупругие соотношения будут иметь вид

$$T_1 = I_1\left(1-\Gamma_1^*\right)\left(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2\right)+I_2\left(1-\Gamma_2^*\right)\left(\kappa_1+\nu\kappa_2\right)$$

$$M_1 = I_2\left(1-\Gamma_2^*\right)\left(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2\right)+I_3\left(1-\Gamma_3^*\right)\left(\kappa_1+\nu\kappa_2\right) \tag{1.3}$$

$$T_{12} = 0.5(1-\nu)\left[I_1\left(1-\Gamma_1^*\right)\varepsilon_{12}+I_2\left(1-\Gamma_2^*\right)\kappa_{12}\right]$$

здесь

$$I_1=\frac{E_0h}{1-\nu^2},\quad I_2=\frac{E_0h^2}{1-\nu^2}\delta,\quad I_3=\frac{E_0h^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$$

$$\Gamma_i^*u=\gamma a_0\int_0^t e^{-\alpha a_0(t-\tau)}\left[1+\frac{I_{i+1}}{I_i}A(t-\tau)\right]u\,d\tau,\quad i=1,2$$

$$\Gamma_3^*u=\gamma a_0\int_0^t e^{-\alpha a_0(t-\tau)}u\,d\tau \tag{1.4}$$

$$A(t-\tau)=\frac{a_1}{a_0}\left[1-\alpha a_0(t-\tau)\right]$$

Двумерные соотношения (1.3) приведены для будущих исследований, а здесь будем изучать лишь одномерные задачи.

2. Сначала рассмотрим контактную задачу для бесконечной цилиндрической оболочки открытого профиля, свободно опертой на кромках, аналог задач [1 – 3], для среды типа (1.3). Сосредоточенная сила передается через симметрично расположенный жесткий штамп. Необходимые уравнения задачи следующие:

$$\frac{\partial T}{\partial\theta}=N,\quad \frac{\partial N}{\partial\theta}+T+Rq=0,\quad \frac{\partial M}{\partial\theta}=RN \tag{2.1}$$

Принято отсутствие касательных напряжений под штампом, а q – неизвестное нормальное давление.

$$T=I_1\left[\varepsilon-\Gamma_3^*\left(\varepsilon+\frac{h^2}{12}A(t-\tau)\kappa\right)\right]$$

$$M=I_3\left[\kappa-\Gamma_3^*\left(\kappa+A(t-\tau)\right)\varepsilon\right] \tag{2.2}$$

$$N=0.5(1-\nu)I_1\left(1-\Gamma_3^*\right)\beta$$

$$\varepsilon=\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{w}{R},\quad \beta=\psi+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\theta},\quad \kappa=\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{2.3}$$

В (2.2) в отличие от (1.3) упругая часть от неоднородности не приведена только ради краткости, к тому же, как известно [4], например, при не очень высоких температурах считается, что изменяются только коэффициенты вязкости. Принимая начало координат на линии симметрии, граничные условия будут

$$N=v=\frac{\partial w}{\partial\theta}=0 \text{ при } \theta=0$$

$$T=M=w=0 \text{ при } \theta=\theta_1 \tag{2.4}$$

При заданной сосредоточенной силе P неизвестными, подлежащими определению, являются нормальное давление q и неизвестная зона контакта θ_0.

Решение (2.1) после удовлетворения кинематическим условиям (2.4) дается

$$T = C_1 \cos\theta - R\int_0^{\theta} q \sin(\theta - \varphi) d\varphi$$

$$N = -C_1 \sin\theta - R\int_0^{\theta} q \cos(\theta - \varphi) d\varphi$$

$$M = RC_1 \cos\theta - R^2\int_0^{\theta} q \sin(\theta - \varphi) d\varphi \tag{2.5}$$

$$C_1 = \frac{R}{\cos\theta_1}\int_0^{\theta_0} q \sin(\theta_1 - \varphi) d\varphi$$

Подвергая (2.3), (2.4) и (2.5) преобразованию Лапласа по времени, получим

$$\overline{\kappa} = \frac{1}{R}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\theta} = \frac{(p+\alpha a_0)^3}{I_1\Delta}\left[\frac{12R}{h^2}(p + a_0(\alpha-\gamma)) + \frac{a_1}{a_0}\gamma a_0 \frac{p}{p+\alpha a_0}\right]\times$$
$$\times\left(\overline{C}_1 \cos\theta - R\right)\int_0^{\theta} \overline{q} \sin(\theta - \varphi) d\varphi \tag{2.6}$$

p — параметр преобразования, а

$$\Delta = (p + (\alpha-\gamma)a_0)^2 (p+\alpha a_0)^2 - \frac{h^2}{12}(a_1\gamma p)^2$$

Изменение кривизны под штампом определяется

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} = \frac{R}{R_1} - 1 \tag{2.7}$$

R_1 — кривизна штампа.

Учитывая (2.1)—(2.3), (2.6), окончательно для определения $\overline{q}$ в предположении $\frac{R^2}{h^2} >> 1$ получим

$$2(1+\nu)\frac{p+\alpha a_0}{p + a_0(\alpha-\gamma)}Q +$$
$$+\frac{(p+\alpha a_0)^3}{\Delta}\frac{12R^2}{h^2}(p + a_0(\alpha-\gamma))\left(C\cos\theta - \int_0^{\theta} Q \sin(\theta-\varphi)d\varphi\right) = 1 - \frac{R}{R_1} \tag{2.8}$$

здесь введены обозначения

$$Q = \frac{R\overline{q}}{I_1}, \qquad C = \overline{C}_1 \frac{1}{I_1}$$

При решении интегрального уравнения (2.8) приходится подвергать его еще преобразованию Лапласа по θ. Дело в том, что параметр p

будет входить в изображающую функцию таким сложным образом, что делает это невозможным для обратного преобразования. Но, как известно [4], часто не интересен процесс ползучести, а интересен конечный результат – в конце концов, что получится для бесконечного момента времени $(p=0)$. Поэтому (2.8) будем изучать только как для мгновенного случая $(p \to \infty)$, так и для окончательного процесса $(p=0)$. Тогда уравнение при $\nu = 0$ будет иметь вид

$$Q + a^2 C\cos\theta - a^2 \int_0^{\theta} Q\sin(\theta-\varphi)d\varphi = A \tag{2.9}$$

$$a^2 = \frac{6R^2}{h^2}, \quad A = \frac{1}{2}\left(1-\frac{R}{R_1}\right)\beta, \quad \beta = \begin{cases} 1 & t=0 \\ \alpha-\gamma & t\to\infty \end{cases}$$

Случай $t \to \infty$ фактически соответствует тому, чтобы с самого начала взять осредненные значения для вязких характеристик $a_1 = 0$.

Кстати, если с самого начала учесть упругую неоднородность, то для определения q уравнение сохраняет вид (2.9), только теперь

$$a^2 = \frac{RI_1(I_1R-I_2)}{2(I_1I_3-I_2^2)}$$

Решением уравнения (2.9) будет

$$Q = A(1 + a\,\mathrm{sh}\,a\theta) - a^2 C\,\mathrm{ch}\,a\theta \tag{2.10}$$

Неизвестный контактный интервал $\theta_0(t)$ определяется из условия равновесия штампа – равнодействующее контактного давления равно действующей силе P

$$\overline{P} = \frac{P}{I_1} = 2\int_0^{\theta_0} Q\cos\theta d\theta$$
$$C = \frac{1}{\cos\theta_1}\int_0^{\theta_0} Q\sin(\theta_1-\theta)d\theta \tag{2.11}$$

Совместное решение системы (2.11) дает зависимость $P(\theta_0)$ (из-за громоздкости полученных формул они не приводятся). Числовой пример произведен для следующих параметров:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \gamma = 0.5\alpha, \quad a = 25;30, \quad R/R_1 = 0.25;\ 0.5$$

Ниже приводится таблица зависимости $\overline{P}$ от θ. В первом столбце приведены значения θ_0 в градусах, а в остальных столбцах $\overline{P}$ для достижения данного значения θ_0. Хотя в таблице θ_0 приведены в градусах, естественно, для формул (2.11) они переведены на радианы. В каждой клетке в первых строках помещены решения мгновенной задачи, а во вторых – длительной.

Из таблицы можно заключить (помимо ожидаемых выводов), что хотя длительный модуль в два раза меньше мгновенного $(\gamma = 0.5\alpha)$, это соотношение не сохраняется для действующих сил, в то же время линейная связь почти сохраняется.

Таблица

θ_0	25		30	
	0.25	0.5	0.25	0.5
1	0.0112 0.0079	0.0150 0.0113	0.0063 0.0047	0.0075 0.0057
2	0.0566 0.0378	0.0872 0.0581	0.0283 0.0189	0.0459 0.0291
3	0.1537 0.1024	0.2482 0.1711	0.0795 0.0512	0.1241 0.0856
4	0.3421 0.2253	0.5663 0.3727	0.1753 0.1169	0.2905 0.1936
5	0.6447 0.4386	1.1155 0.7437	0.3223 0.2193	0.5702 0.3718
6	1.1416 0.7680	2.1008 1.4005	0.5812 0.3944	1.0715 0.7003
7	1.9034 1.2690	3.7652 2.5101	0.9517 0.6345	1.9182 1.2551
8	3.1639 2.1259	6.5695 4.3796	1.6068 1.0878	3.3447 2.1898
9	5.0599 3.3989	11.4925 7.7290	2.5684 1.7379	5.7462 3.9656
10	8.1026 5.3622	19.9157 13.1637	4.0513 2.7521	10.1281 6.7521

3. Здесь рассматривается предыдущая задача в предположении, что сосредоточенная сила $P(t)$ передается непосредственно без штампа, условия прежние. Задача эта приводится скорее всего для того, чтобы показать, с какими громоздкими выкладками приходится сталкиваться при обратном преобразовании. Здесь нет смысла учета сдвига. Удовлетворяя кинематическим условиям, получим

$$T=\frac{P}{2}(\sin\theta-\operatorname{tg}\theta_1\cos\theta),\qquad M=RT$$
$$N=\frac{P}{2}(\cos\theta+\operatorname{tg}\theta_1\sin\theta) \tag{3.1}$$

Вот выражение преобразованного прогиба:

$$\overline{w}=\frac{1}{2}A(p)(\sin\theta-\operatorname{tg}\theta_1\cos\theta-\theta+\theta_1)P$$
$$A(p)=\frac{12R^3}{h^2I_1\Delta}(p+\alpha a_0)^2\left[(p+(\alpha-\gamma)a_0)(p+\alpha a_0)+\frac{h^2}{12R}a_1\gamma\, p\right] \tag{3.2}$$

и, наконец, его окончательный вид:

$$w=\frac{6R^3}{h^2I_1}(\sin\theta-\operatorname{tg}\theta_1\cos\theta-\theta+\theta_1)\{P(t)+\int_0^t P(\tau)[ae^{-\alpha_1(t-\tau)}\{\cos\beta_1(t-\tau)+$$
$$+\frac{b_1}{\beta_1}\sin\beta_1(t-\tau)\}+ce^{-\alpha_2(t-\tau)}\{\operatorname{ch}\beta_2(t-\tau)+\frac{d_1}{\beta_2}\operatorname{sh}\beta_2(t-\tau)\}]d\tau\}$$

$$2a=(\delta+\varepsilon)\left(1+\frac{1}{\varepsilon}a_0\gamma\right),\qquad 2d=\alpha a_0(\varepsilon-\delta)$$
$$2c=(\delta-\varepsilon)\left(1-\frac{1}{\varepsilon}a_0\gamma\right),\qquad 2b=-\alpha a_0(\varepsilon+\delta)$$
$$\alpha_1=\alpha a_0-\frac{1}{2}(\varepsilon+\gamma a_0),\qquad \beta_1^2=\varepsilon a_0\alpha-\frac{1}{4}(\varepsilon+\gamma a_0)^2$$
$$\alpha_2=\alpha a_0+\frac{1}{2}(\varepsilon-\gamma a_0),\qquad \beta_2^2=\varepsilon a_0\alpha+\frac{1}{4}(\gamma a_0-\varepsilon)^2 \tag{3.3}$$
$$b_1=\frac{b}{a}+\frac{1}{2}(\varepsilon+\gamma a_0),\qquad d_1=\frac{c}{d}+\frac{1}{2}(\gamma a_0-\varepsilon)$$
$$\delta=\frac{a_1\gamma h^2}{12R},\qquad \varepsilon^2=\delta R a_1\gamma$$

В случае пластинки $(R\to\infty)$ формулы упрощаются. Если на концах условия такие, как (2.4), то

$$T=0,\quad N=\frac{P}{2},\qquad M=\frac{P}{2}(x-l) \tag{3.4}$$

Прогиб определится

$$w(x,t)=\frac{P}{2I_3}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{l^3}{3}\right)W(t) \tag{3.5}$$

где $W(t)$ есть выражение в фигурных скобках (3.3) при $\delta=0$.

4. Интересна еще задача оптимального изгиба для вязкоупругой пластинки. Такая задача для упругого материала рассмотрена в [6]. По вышеприведенным соображениям эту задачу будем изучать для осредненного случая $(a_1=0)$. Тогда уравнение изгиба пластин будет

$$I_3\left(1-\Gamma_3^*\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=q(x,t) \tag{4.1}$$

Если предположим, что нагрузка действует в некотором интервале $\left[x_1, x_2\right]$, то решение (4.1) запишется

$$w(x,t)=\Phi(x,t)+\gamma a_0\int_0^t e^{-\alpha a_0(t-\tau)}\Phi(x,t)d\tau \tag{4.2}$$

$$\Phi=\int_{x_1}^{x} Q(\xi,t)u_1(x,\xi)d\xi+\int_{x_1}^{x_2} Q(\xi,t)u_2(x,\xi)d\xi$$

$$Q(x,t)=\frac{q(x,t)}{I_3} \tag{4.3}$$

Первое слагаемое в (4.3) — частное решение от нагрузки $q(x,t)$ и одинаковое для всех случаев граничных условий, а второе соответствует решению однородной части и различное для каждого случая граничных условий.

Вопрос оптимального изгиба ставится обычным образом — в какой-то точке (x_0) пластинки (или в ряде) получить данный прогиб в данный момент (t_1), т.е.

$$w_0=w(x_0,t_0)=\Phi(x_0,t_0)+\gamma a_0\int_0^{t_0} e^{-\alpha a_0(t_0-\tau)}\Phi(x_0,\tau)d\tau \tag{4.4}$$

при определенном критерии качества, например,

$$J=\int_0^{t_0}\int_{x_1}^{x_2} Q^2 dxdt=\min \tag{4.5}$$

Такую постановку можно рассматривать как изопериметрическую задачу и если составить функцию

$$F=Q^2+\lambda a_0\gamma Q\, e^{-\alpha a_0(t_0-\tau)}u(x_0,x)$$

$$u(x_0,t)=\begin{cases}u_1+u_2, & x_0\le x_1\\ u_2, & x_0>x_1\end{cases} \tag{4.6}$$

где λ — множитель Лагранжа, то из условия экстремума функционала находим

$$2Q+\lambda a_0\gamma\, e^{-\alpha a_0(t_0-\tau)}u(x_0,x)=0 \tag{4.7}$$

которое на основании (4.4) дает

$$\lambda=-\frac{2w_0}{\Gamma},\qquad \Gamma=\gamma a_0\left[1-\frac{\gamma}{2\alpha}\left(1-e^{-2\alpha a_0 t_0}\right)\right] \tag{4.8}$$

и, следовательно, оптимальная нагрузка будет

$$Q=w_0\Gamma^{-1}e^{-\alpha a_0(t_0-t)}u(x_0,x) \tag{4.9}$$

между прочим, наверное, практический интерес представляет и обратная задача — имеется начальный прогиб и оптимальным образом устранить его. Фактически, полученная формула отвечает и на этот вопрос.

Приведенные в таблице данные получены Г.Г.Нерсисяном, за что приношу благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пелех Б.А., Сухорольский М.А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. Киев: Наукова думка, 1980. 214 с.
2. Мовсисян Л.А. К устойчивости круговой арки под штампом. //Изв.НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. №1-2. С.14-18.
3. Мовсисян Л.А. Об одной контактной задаче для анизотропной цилиндрической оболочки. /Сб. научн.тр. Контактные и смешанные граничные задачи. МДТТ. (К 85-летию Н.Х.Арутюняна). Ереван. 1999. С.105-108.
4. Мовсисян Л.А. Об одной контактной задаче для кольца с заполнителем./Сб. научн. тр.конф. Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем. Изд. ЕГУ, 2002. С.181-185.
5. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердого тела. М.: Наука, 1977. 384 с.
6. Габриелян М.С., Мовсисян Л.А. К оптимальному управлению упругих систем. //Изв. АН РАН. МТТ. 1999. №6. С.146-153.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
11.11.2004