

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Баблоян А.А., Барсегян В.В., Геворкян Г.А., Манусаджян В.Р.

Ա. Հ. Բաբոյան, Վ. Վ. Բարսեղյան, Գ. Ա. Գևորգյան, Վ. Ռ. Մանուսաջյան

Ռեղանկյուն կտրվածքով ձողերի ուղղման խնդիրների լուծման վերջավոր տարրերի մեթոդի մի ձևափոխության մասին

Առաջարկվում է վերջավոր տարրերի մեթոդի ձևափոխված տարրերակ, որում ուղղանկյուն կտրվածքով ձողերի ուղղման խնդիրների լուծումը համզեզվում է քառակուսային ծրագրավորման խնդիրների:

A. H. Babloyan, V. V. Barsegyan, G. A. Gevorgyan, V. R. Manusajyan

A Modified Final Elements Method of Solving the Torsion of Bars with Rectangular Section

A modified final elements method is suggested where the problems of solving the torsion of bars with rectangular section are reduced to quadratic programming ones.

Предлагается модификация метода конечных элементов, при котором решения задач кручения стержня с прямоугольным поперечным сечением сводятся к задачам квадратичного программирования.

С помощью вариационного исчисления задача кручения призматических стержней сводится к следующей задаче [3]: требуется найти функцию напряжения Φ , для которой взятый по всей области двойной интеграл

$$\chi = \iint \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{G} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{G} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} - 2\Theta\Phi \right] dx dy \quad (1)$$

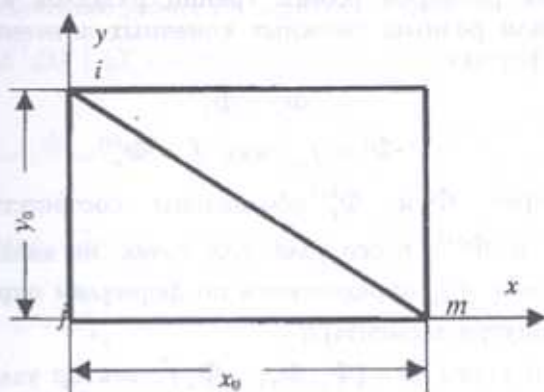
принимает минимальное значение, при условии, что Φ удовлетворяет граничным условиям рассматриваемой частной задачи. Здесь, $G(x, y)$ – модуль сдвига, Θ – угол закручивания на единицу длины стержня.

Решение задачи кручения составного стержня с прямоугольным поперечным сечением решим с помощью элементов четырехугольной формы, составленной из двух треугольников.

Рассмотрим двумерную область, которая разделена на $s \in \bar{N} = \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$ конечных элементов четырехугольной формы с узлами i, j, m, k (фиг. 1). Узловые значения функции Φ для s -ого конечного элемента зададим вектором $\Phi^s = (\Phi_i^s, \Phi_j^s, \Phi_m^s, \Phi_k^s)^T$.

Обозначим через χ^s величину функции (1) для s -ого элемента. Произведя интегрирование, выражение (1) перепишем в виде

$$\chi^s = \frac{1}{2} (\Phi^s)^T h^s \Phi^s + (\Phi^s)^T P_s \quad (2)$$



Фиг. 1

где

$$h^s = \frac{1}{2G^s x_0 y_0} \begin{vmatrix} x_0^2 + y_0^2 & -y_0^2 & -x_0^2 & 0 \\ -y_0^2 & x_0^2 + y_0^2 & 0 & -x_0^2 \\ -x_0^2 & 0 & x_0^2 + y_0^2 & -y_0^2 \\ 0 & -x_0^2 & -y_0^2 & x_0^2 + y_0^2 \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$P_s = -\frac{x_0 y_0 \Theta}{3} (1 \ 2 \ 2 \ 1)^T \quad (4)$$

Очевидно, что для функции (1) имеет место

$$\chi = \sum_{s=1}^{\bar{n}} \chi^s = \sum_{s=1}^{\bar{n}} \left(\frac{1}{2} (\Phi^s)^T h^s \Phi^s + (\Phi^s)^T P_s \right) \quad (5)$$

Исходя из принципа минимума потенциальной энергии системы [4], для определения искомых векторов $\Phi^s, s \in \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$ получим следующую задачу квадратичного программирования:

$$\min \left\{ \sum_{s=1}^{\bar{n}} \left(\frac{1}{2} (\Phi^s)^T h^s \Phi^s + (\Phi^s)^T P_s \right) \mid \text{условие совместности,} \right. \\ \left. \text{краевые условия} \right\} \quad (6)$$

Для определения касательных напряжений в треугольниках ijm и imk соответственно имеем

$$\tau^{s,ijm} = (\tau_{yz}^{s,ijm}, \tau_{zx}^{s,ijm})^T = H^{s,ijm} \Phi^{s,ijm}, \quad \tau^{s,imk} = (\tau_{yz}^{s,imk}, \tau_{zx}^{s,imk})^T = H^{s,imk} \Phi^{s,imk} \quad (7)$$

где

$$H^{s,ijm} = \begin{vmatrix} 0 & -y_0 & y_0 \\ x_0 & -x_0 & 0 \end{vmatrix}, \quad H^{s,imk} = \begin{vmatrix} -y_0 & 0 & y_0 \\ 0 & -x_0 & x_0 \end{vmatrix} \quad (8)$$

$$\Phi^{s,ijm} = (\Phi_i^s, \Phi_j^s, \Phi_m^s)^T, \quad \Phi^{s,imk} = (\Phi_i^s, \Phi_m^s, \Phi_k^s)^T$$

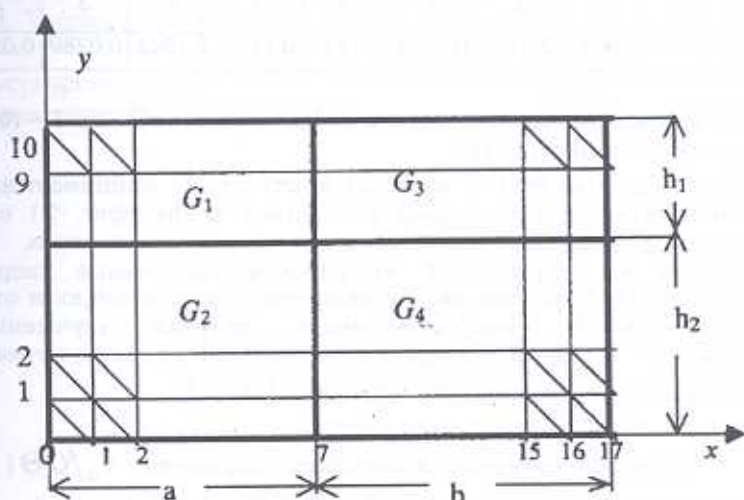
Поступая аналогично работе [2], задачу (14) представим в виде

$$\min \left\{ C^T X + \frac{1}{2} X^T D X \mid AX = 0, \text{ граничные условия} \right\} \quad (17)$$

Здесь $\bar{\Phi} = (\Phi_{n+1}, \Phi_{n+2}, \dots, \Phi_{2n-1})^T$; $X = \begin{pmatrix} \Phi \\ \bar{\Phi} \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} -P \\ 0 \end{pmatrix}$ — векторы — столбцы порядка $2n-1$; $D = \|d_y\| = \begin{pmatrix} \hat{D} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ — диагональная матрица порядка $2n-1$; $\hat{D} = \|\hat{d}_y\|$ — диагональная матрица порядка n , где

$$\left. \begin{aligned} \hat{d}_{ii} &= h_{ii}^{(0)} - \sum_{s=1}^{i-1} (h_{ii}^{(s)})^2 - 1, i \in \bar{M} \\ \hat{d}_{nn} &= h_{nn}^{(0)} - \sum_{i=1}^{2n-1} (h_{in}^{(i)})^2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

I — единичная матрица порядка $n-1$; $A = (A_1, A_2, \dots, A_{2n-1})$ — матрица коэффициентов системы уравнений (15) и (13), где $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{n+j-1})^T$.



Фиг. 2

Рассмотрим задачу кручения стержня с прямоугольным поперечным сечением. Стержень состоит из четырех различных материалов, для которых $G_1 = G$, $G_2 = 1,5G$, $G_3 = 2G$, $G_4 = 3G$. Рассмотрим случай, при котором значения величин $a = 7$, $b = 10$ и $h_1 + h_2 = 10$. Для решения задачи используем сетку 10×16 , как это показано на фиг. 2.

Учитывая, что функция напряжений $\Phi(x, y)$ на границе области принимает нулевое значение, граничные условия принимают вид

$$\Phi(i, 0) = 0, \quad \Phi(i, 10) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, 17\};$$

$$\Phi(0, i) = 0, \quad \Phi(17, i) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, 9\}.$$

Из остальных (ненулевых) узловых значений функции напряжения $\Phi(x, y)$ составим искомый вектор

$$\Phi = (\Phi(1,1), \Phi(2,1), \dots, \Phi(16,1), \Phi(1,2), \Phi(2,2), \dots, \Phi(16,2), \dots, \Phi(1,9), \Phi(2,9), \dots, \Phi(16,9))^T \quad (19)$$

порядка 144, в соответствии с которым, используя формулы (4), (5) и (6), сформируем матрицу жесткости h и вектор P для всей области (они имеют порядок 144).

Для формирования матрицы жесткости h и вектора P , а также для проведения вычислений на языке C++ написана программа. Используя эту программу, вычислены узловые значения функции напряжения (19), а также значение жесткостей, задаваемых формулой

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{16} \sum_{j=1}^9 \Phi(i, j)}{Gn(a+b)(h_1 + h_2)} \quad (20)$$

в зависимости от соотношения величин h_1 и h_2 .

В табл. 1 приведено значение величин (20), для $n = 198$.

Таблица 1

h_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h_2	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
C	0,0598	0,0646	0,0789	0,0994	0,1170	0,1199	0,1042	0,0789	0,0562	0,0431

Отметим, что приведенные в табл.1 значения C на 5–10% меньше полученных по методу [1].

Как следует из табл. 1, значение жесткости C принимает наибольшее значение, если горизонтальная контактная линия (фиг. 2.) проходит в непосредственной близости от середины поперечного сечения.

Исходя из соотношений (8), находим касательные напряжения в треугольниках. Осреднив два напряжения в треугольниках и отнеся их к центру тяжести четырехугольников, получим улучшенное поле напряжения. В табл. 2 и 3 приведены полученные таким путем значения касательных напряжения для случая $h_1 = 5, h_2 = 5$.

Таблица 2 (значение касательного напряжения $\tau_{xz}/G\Theta$)

1.619	1.602	1.243	1.018	0.853	0.733	0.671	1.054	0.599	0.221	-0.13	-0.49	-0.85	-1.24	-1.68	-2.22	-3.01
4.874	4.398	3.597	2.995	2.515	2.142	1.894	2.924	1.721	0.642	-0.40	-1.45	-2.53	-3.67	-4.92	-6.39	-8.33
7.855	6.768	5.751	4.852	4.07	3.425	2.946	4.422	2.717	1.03	-0.67	-2.39	-4.16	-5.99	-7.95	-10.1	-12.6
10.42	8.967	7.787	6.59	5.488	4.541	4.00	5.643	3.895	1.43	-0.91	-3.20	-5.71	-8.19	-10.8	-13.5	-16.3
11.44	10.05	8.671	7.328	6.019	4.785	3.284	7.251	4.413	1.889	-1.0	-3.68	-6.4	-9.17	-12.6	-14.9	-17.7
10.19	8.977	7.753	6.545	5.338	4.056	2.424	6.939	4.083	1.558	-0.88	-3.3	-5.74	-8.21	-10.7	-13.3	-15.7
8.129	7.114	6.125	5.171	4.254	3.381	2.652	4.824	3.071	1.193	-0.7	-2.8	-4.52	-6.48	-8.48	-10.5	-12.8
6.086	5.226	4.461	3.764	3.125	2.563	2.137	3.475	2.184	0.844	-0.51	-1.98	-3.27	-4.70	-6.19	-7.8	-9.53
3.902	3.242	2.731	2.297	1.919	1.607	1.399	2.219	1.344	0.513	-0.31	-1.14	-1.99	-2.86	-3.80	-4.87	-6.2
1.377	1.109	0.922	0.774	0.649	0.55	0.495	0.787	0.461	0.174	-0.10	-0.38	-0.67	-0.96	-1.29	-1.67	-2.22

Таблица 3 (значение касательного напряжения $\tau_{yz} / G\theta$)

1.619	4.84	7.685	9.947	11.81	13.41	14.81	16.54	18.19	19.01	19.01	18.48	17.13	15.04	12.13	8.237	3.011
1.636	4.465	6.769	8.837	10.6	12.09	13.31	14.68	16.02	16.74	16.81	16.19	14.89	12.87	10.1	6.573	2.306
1.345	3.867	6.087	8.029	9.673	11.03	12.13	13.32	14.47	15.13	15.19	14.6	13.35	11.43	8.847	5.644	1.948
1.223	3.57	5.685	7.518	9.031	10.21	11.27	12.37	13.41	14.13	14.23	13.68	12.49	10.66	8.21	5.21	1.791
-0.20	-0.55	0.79	-1.0	-1.25	-1.74	-3.35	-3.55	-2.27	-2.01	-1.94	-1.87	-1.77	-1.6	-1.36	-0.98	-0.37
-1.05	-3.04	-4.78	-6.27	-7.49	-8.34	-8.23	-9.2	-11.1	-11.8	-11.9	-11.5	-10.6	-9.1	-7.13	-4.63	-1.63
-1.01	-2.94	-4.69	-6.2	-7.44	-8.35	-8.9	-9.82	-11.0	-11.7	-11.8	-11.3	-10.4	-8.87	-6.86	-4.38	-1.51
-1.04	-3.03	-4.84	-6.4	-7.7	-8.73	-9.52	-10.5	-11.5	-12.1	-12.1	-11.7	-10.7	-9.1	-7.08	-4.52	-1.56
-1.15	-3.32	-5.23	-6.86	-8.24	-9.37	-10.3	-11.3	-12.4	-13.0	-13.0	-12.6	-11.5	-9.9	-7.79	-5.01	-1.77
-1.38	-3.86	-5.89	-7.59	-9.01	-10.2	-11.3	-12.5	-13.8	-14.4	-14.5	-14.0	-13.0	-11.3	-9.08	-6.11	-2.22

ЛИТЕРАТУРА

1. Баблоян А.А., Мкртчян А.М. Кручение стержней с поперечным сечением в виде соединений прямоугольников и кольцевых секторов. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1979. Т. 32. №6. С. 3-16.
2. Геворкян Г.А., Манусаджян В.Р. Об одной модификации метода конечных элементов для решения двумерных задач теории поля // Изв. НАН Армении и государственного инженерного университета Армении. 2004. Т. LVII. №3. С. 422-428.
3. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. М.: Недра. 1974. 240с.
4. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука. 1970. 940 с.

Ереванский государственный
университет архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
10.02.2005