

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ
ДВИЖЕНИЙ ЗАМКНУТОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ В КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЯХ

Габриелян М.С., Мазманян Л.А.

Մ.Ս.Գաբրիելյան, Լ.Ա.Մազմանյան

Փակ շրջանային զանային բաղանիքի տատանողական շարժման օպտիմալ
զնկավարման մասին հավանաբար իրավիճակներում

Ինտերկվամ է փակ շրջանային զանային բաղանիքի զծային տատանումների օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը, երբ երա վրա ազդում են բաշխված հակամետ ուժեր: Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի եղանակով և բերված է երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներով բևուրազրվող խաղային խնդրի: Խաղացողների օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունները որոշված են Էքստրեմալ նշանատրյան եղանակով: Ցույց է տրված, որ եթե առաջին խաղացողի ռեսուրսները ազնի շատ են, քան երկրորդ խաղացողինը և ազդող ուժերը պատկանում են L_2 դասին, ապա լուծվում է բաղանիքի տատանումների մարման խնդիրը: Աշխատանքի վերջում բերված է թվային օրինակ:

M.S. Gabrielyan, L.A. Mazmanyan

On the Optimal Control for The Elastic Plate's Vibrations in the Conflict Situations

The problem of an optimal control for the closed circular cylindrical shell's linear vibrations, when the distributive disposed forces influence on it. The problem is solved by the method of Fourier and it is brought to the differential game, which is described by the infinitesimal differential equations of the second order. The extremal strategies are constructed by the extreme targeting method. It is shown that if the resources of the first player are more than the resources of the second player and the influencing forces belong to class L_2 , then the problem of damping of shell's vibrations is solved. In the end of the article a numerical example is given.

Исследуется задача об оптимальном управлении линейных колебаний замкнутой круговой цилиндрической оболочки при помощи противоборствующих сил, приложенных к поверхностям оболочки. Задача решается методом Фурье и приводится к игровой задаче для бесконечной линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка. С помощью метода экстремального прицеливания определяются оптимальные управляющие силы. Указываются условия, при которых действующие силы, принадлежащие классу L_2 , гасят колебательное движение оболочки, если ресурсы первого игрока больше, чем второго. В конце статьи приведен численный пример.

1. Рассматриваются линейные колебания шарнирно опертой замкнутой круговой цилиндрической оболочки при малых прогибах. Оболочка однослойная, изготовленная из однородного изотропного материала. Для круговой цилиндрической оболочки наименьший радиус кривизны совпадает с радиусом поперечного сечения. Цилиндрическая оболочка имеет срединную поверхность нулевой кривизны ($k_x = 0$, $k_y = 1/R$) ([1], с. 12).

Пусть L — длина оболочки, R — радиус кривизны срединной поверхности, h — постоянная толщина, ρ — плотность оболочки ($\rho = \gamma/g$, где γ — удельный вес материала, g — ускорение силы тяжести). Выберем координатные линии x и y таким образом, чтобы они совпадали с линиями кривизны срединной поверхности вдоль образующей и дуги соответственно. Координату z будем отсчитывать вдоль нормали к поверхности, считая z направленной к центру кривизны. Обозначим перемещения точек срединной поверхности по направлениям x , y , z через u , v , w соответственно.

Пусть на поверхности оболочки на множестве положительной меры действуют две распределенные перпендикулярные силы: $F_1(x, y, t)$ и $F_2(x, y, t)$, под действием которых оболочка будет колебаться. Обозначим нормальные перемещения срединной поверхности оболочки через $w(x, y, t)$.

Дифференциальные уравнения линейных колебаний оболочки будут ([1], с. 103)

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{F_1(x, y, t)}{h} + \frac{F_2(x, y, t)}{h} \quad (1.1)$$

$$\nabla^4 \Phi = - \frac{E}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

где D — цилиндрическая жесткость оболочки $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$, μ — коэффициент Пуассона, E — модуль упругости материала при растяжении (сжатии), $\Phi(\cdot)$ — функция напряжения срединной поверхности, а

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

Пусть граничные условия замкнутой круговой цилиндрической оболочки удовлетворяют следующим условиям шарнирного опирания со свободными смещениями в продольном направлении и при отсутствии смещения в дуговом ([1], с. 110):

$$w = 0, v = 0, M_x = 0, N_x = 0 \quad \text{при } x = 0, x = L \quad (1.3)$$

где изгибающий момент $M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$, а нормальное усилие

$$N_x = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R} w \right] \right\}$$

Пусть начальные условия будут

$$w(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad \left. \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x, y) \quad (1.4)$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — начальный прогиб и начальная скорость срединной поверхности соответственно.

Условия (1.3) шарнирного опирания будут удовлетворены, если прогиб представить в виде

$$w = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} f_{m0}(t) \sin \frac{m\pi x}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} \quad (1.5)$$

рассматривая при этом t как параметр. Для определения $w(x, y, t)$ достаточно определить функции $f_{mn}(t)$. m — число полуволн вдоль оболочки, n — число полных волн по окружности.

Подставляя (1.5) в (1.2) и интегрируя, получим

$$\Phi = \frac{E}{2R} \sum_{m=1}^{\infty} f_{m0}(t) \frac{L^2}{m^2 \pi^2} \sin \frac{m\pi x}{L} + \frac{E}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t) \frac{m^2 \pi^2}{L^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} \quad (1.6)$$

Так как в области $[0, L] \times [0, 2\pi R]$ система функций $\left\{ \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} \right\}$, ($m=1, 2, \dots, n=0, 1, 2, \dots$) ортогональная и полная, то функции $F_1(x, y, t)$, $F_2(x, y, t)$, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} F_1(x, y, t) &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{u}_{m0}(t) \sin \frac{m\pi x}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} \\ F_2(x, y, t) &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{v}_{m0}(t) \sin \frac{m\pi x}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} \\ \varphi(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{m0} \sin \frac{m\pi x}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} \\ \psi(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{m0} \sin \frac{m\pi x}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}_{mn}(t) &= \frac{2}{L\pi R} \int_0^L \int_0^{2\pi R} F_1(x, y, t) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} dx dy \\ \bar{v}_{mn}(t) &= \frac{2}{L\pi R} \int_0^L \int_0^{2\pi R} F_2(x, y, t) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} dx dy \\ \varphi_{mn} &= \frac{2}{L\pi R} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \varphi(x, y) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} dx dy \\ \psi_{mn} &= \frac{2}{L\pi R} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \psi(x, y) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} dx dy, \quad (m=1, 2, \dots; n=0, 1, \dots) \end{aligned}$$

Подставляя (1.5), (1.6), (1.7) в уравнение (1.1), после несложных преобразований, получим

$$\begin{aligned} &\left(\frac{Dg}{\gamma h} \frac{(L^2 n^2 + m^2 \pi^2 R^2)^2}{L^4 R^4} + \frac{Eg}{\gamma} \frac{m^4 \pi^4 R^2}{(L^2 n^2 + m^2 \pi^2 R^2)^2} \right) \frac{f_{mn}(t)}{h} + \frac{f_{mn}''(t)}{h} - \\ &- \frac{g}{\gamma h^2} \bar{u}_{mn}(t) - \frac{g}{\gamma h^2} \bar{v}_{mn}(t) = 0, \quad (m=1, 2, \dots, n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (1.8)$$

От (1.8) перейдем к следующим безразмерным обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка, описывающим линейные колебания замкнутой круговой цилиндрической оболочки:

$$\frac{d^2 \xi_{mn}(t)}{dt^2} = -\omega_{mn}^2 \xi_{mn}(t) + u_{mn}(t) + v_{mn}(t), \quad (1.9)$$

где $\xi_{mn}(t) = \frac{f_{mn}(t)}{h}$, $u_{mn} = \frac{g}{\gamma h^2} \bar{u}_{mn}(t)$, $v_{mn} = \frac{g}{\gamma h^2} \bar{v}_{mn}(t)$,

при следующих начальных условиях:

$$f_{mn}(0) = \varphi_{mn} \quad \dot{f}_{mn}(0) = \psi_{mn}.$$

Квадрат частоты собственных колебаний оболочки при малых прогибах имеет вид:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{Dg}{\gamma h} \frac{(L^2 n^2 + m^2 \pi^2 R^2)^2}{L^4 R^4} + \frac{Eg}{\gamma} \frac{m^4 \pi^4 R^2}{(L^2 n^2 + m^2 \pi^2 R^2)^2} \quad (1.10)$$

Предположим, что силы $F_1(x, y, t)$ и $F_2(x, y, t)$ принадлежат классу L_2 и удовлетворяют условиям [2]

$$\left[\int_0^L \int_0^{2\pi R} [F_1(x, y, t)]^2 dx dy \right]^{1/2} = \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_{mn}^2(t) \right]^{1/2} \leq P$$

$$\left[\int_0^L \int_0^{2\pi R} [F_2(x, y, t)]^2 dx dy \right]^{1/2} = \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{v}_{mn}^2(t) \right]^{1/2} \leq Q \quad (1.11)$$

равномерно по $t \in [0, T]$.

Здесь P, Q, T — заданные положительные числа.

Рассмотрим следующую игровую ситуацию:

Пусть первый игрок, распоряжающийся управлениями u_{mn} ($m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$), стремится минимизировать значение

величины $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [\xi_{mn}^2(\vartheta) + \zeta_{mn}^2(\vartheta)]$ при самом упорном сопротивлении

второго игрока, распоряжающегося управляющими воздействиями v_{mn} ($m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$), а второй игрок в свою очередь стремится

максимизировать значение величины $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [\xi_{mn}^2(\vartheta) + \zeta_{mn}^2(\vartheta)]$ при самом

упорном сопротивлении со стороны первого игрока. Величину ϑ ($0 < \vartheta \leq T$) определим ниже. Динамика игры определяется бесконечной системой дифференциальных уравнений (1.9). Используем метод экстремального прицеливания ([2], [3] с. 149).

Составим гипотетическое рассогласование. Так как собственные числа λ_{mn} ($m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$) положительны, то вводя следующие обозначения:

$$z_{mn}^{(1)} = \xi_{mn}, \quad z_{mn}^{(2)} = \frac{\zeta_{mn}}{\sqrt{\lambda_{mn}}} \quad (1.12)$$

систему дифференциальных уравнений (1.9) можем записать в виде

$$\begin{cases} \dot{z}_{mn}^{(1)} = \sqrt{\lambda_{mn}} z_{mn}^{(2)} \\ \dot{z}_{mn}^{(2)} = -\sqrt{\lambda_{mn}} z_{mn}^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_{mn}}} u_{mn} + \frac{T}{\sqrt{\lambda_{mn}}} v_{mn} \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots; n = 0, 1, \dots) \quad (1.13)$$

(m, n) -ый блок фундаментальной матрицы однородной части системы (1.13) будет:

$$Z_{mn}[t, \tau] = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\lambda_{mn}}(t - \tau) & \sin \sqrt{\lambda_{mn}}(t - \tau) \\ -\sin \sqrt{\lambda_{mn}}(t - \tau) & \cos \sqrt{\lambda_{mn}}(t - \tau) \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Гипотетическое рассогласование для сформулированной игровой задачи будет [2]

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T) = & \max_{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [(l_{mn}^{(1)})^2 + (l_{mn}^{(2)})^2] \leq I} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (l_{mn}^{(1)}, l_{mn}^{(2)}) Z_{mn}[T, t] \cdot \begin{pmatrix} z_{mn}^{(1)}(t) \\ z_{mn}^{(2)}(t) \end{pmatrix} + \right. \\ & + \int_0^T \min_{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}^2 \leq P^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (l_{mn}^{(1)}, l_{mn}^{(2)}) Z_{mn}[T, \tau] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda_{mn})^{-1/2} \end{pmatrix} u_{mn} d\tau + \\ & \left. + \int_0^T \max_{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{mn}^2 \leq Q^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (l_{mn}^{(1)}, l_{mn}^{(2)}) Z_{mn}[T, \tau] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda_{mn})^{-1/2} \end{pmatrix} v_{mn} d\tau \right\} \quad (1.15) \end{aligned}$$

Подставляя значения $Z_{mn}[T, \tau]$ в (1.15) и учитывая, что области $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}^2 \leq P^2$, $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{mn}^2 \leq Q^2$ строго выпуклые, а минимизирующиеся и максимизирующиеся функции линейные, то есть минимум и максимум достигаются на границах, будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T) = & \max_{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [(l_{mn}^{(1)})^2 + (l_{mn}^{(2)})^2] \leq I} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [l_{mn}^{(1)} a_{mn} + l_{mn}^{(2)} b_{mn}] + \right. \\ & + \int_0^T \min_{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}^2 \leq P^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [l_{mn}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) + l_{mn}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau)] \cdot \frac{u_{mn}}{\sqrt{\lambda_{mn}}} d\tau + \\ & \left. + \int_0^T \min_{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{mn}^2 \leq Q^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [l_{mn}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) + l_{mn}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau)] \cdot \frac{v_{mn}}{\sqrt{\lambda_{mn}}} d\tau \right\} \quad (1.16) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_{mn} &= z_{mn}^{(1)}(t) \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - t) + z_{mn}^{(2)}(t) \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - t) \\ b_{mn} &= z_{mn}^{(2)}(t) \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - t) - z_{mn}^{(1)}(t) \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - t) \end{aligned}$$

Используя метод неопределенных коэффициентов Лагранжа, для $u_{mn}^{(0)}$ и $v_{mn}^{(0)}$ получим

$$u_{mn}^{(0)}(\tau) = \frac{P [l_{mn}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) + l_{mn}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau)]}{\sqrt{\lambda_{mn}} \left[\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{rj}} (l_{rj}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) + l_{rj}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau))^2 \right]^{1/2}} \quad (1.17)$$

$$v_{mn}^{(0)}(\tau) = \frac{Q \left[l_{mn}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) + l_{mn}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) \right]}{\sqrt{\lambda_{mn}} \left[\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{rj}} \left(l_{rj}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) + l_{rj}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) \right)^2 \right]^{1/2}}$$

Подставляя значения $u_{mn}^{(0)}(\tau)$ и $v_{mn}^{(0)}(\tau)$ из (1.17) в (1.16), получим

$$\varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T) = \max_{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [(l_{mn}^{(1)})^p + (l_{mn}^{(2)})^p] \leq 1} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [l_{mn}^{(1)} a_{mn} + l_{mn}^{(2)} b_{mn}] - (P - Q) \times \right. \\ \left. \times \int_t^T \left[\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{rj}} \left(l_{rj}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) + l_{rj}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) \right)^2 \cdot \right]^{1/2} dt \right\} \quad (1.18)$$

Определение: Задача для системы (1.13) назовем регулярным, если она регулярна для любых конечных m, n из (1.13).

При условии $P > Q$ выражение в фигурных скобках в формуле (1.18) является вогнутой функцией по переменным $l_{rj}^{(1)}$ и $l_{rj}^{(2)}$ ($r = 1, 2, \dots, j = 0, 1, 2, \dots$), следовательно, максимум в (1.18) при любых $z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)$ достигается на единственном векторе $(l_{mn}^{(1)})^p, (l_{mn}^{(2)})^p$ ($m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$), т.е. при любых начальных значениях игровая ситуация регулярна [2]. Компоненты вектора l^0 определяются из следующих уравнений:

$$a_{pk} + \xi (l_{pk}^{(1)})^p + \frac{Q - P}{\lambda_{pk}} \int_t^T \frac{(l_{pk}^{(1)})^p \sin \sqrt{\lambda_{pk}} (T - \tau) + (l_{pk}^{(2)})^p \cos \sqrt{\lambda_{pk}} (T - \tau) \sin \sqrt{\lambda_{pk}} (T - \tau) dt}{\left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn}^{-1} \left((l_{mn}^{(1)})^p \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) + (l_{mn}^{(2)})^p \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) \right)^2 \right]^{1/2}} = 0 \\ b_{pk} + \xi (l_{pk}^{(2)})^p + \frac{Q - P}{\lambda_{pk}} \int_t^T \frac{(l_{pk}^{(1)})^p \sin \sqrt{\lambda_{pk}} (T - \tau) + (l_{pk}^{(2)})^p \cos \sqrt{\lambda_{pk}} (T - \tau) \cos \sqrt{\lambda_{pk}} (T - \tau) dt}{\left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn}^{-1} \left((l_{mn}^{(1)})^p \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) + (l_{mn}^{(2)})^p \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) \right)^2 \right]^{1/2}} = 0 \\ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(l_{pk}^{(1)})^2 + (l_{pk}^{(2)})^2 \right] = 1 \quad (p = 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.19)$$

Заметим, что $\varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T)$ — ограниченная величина, так как ряды, участвующие в выражениях (1.18), сходятся, следовательно, оптимальные управляющие воздействия, определяемые формулой (1.17) равномерно по $\tau \in [0, T]$, составляют сходящиеся квадратом ряды [2]. Для определения момента \mathcal{G} в каждой ситуации нужно найти наименьший корень уравнения:

$$\min_{t \in [t_*, T]} \varepsilon^{(0)}(t_*, \{z_{mn}^{(1)}(t_*), z_{mn}^{(2)}(t_*)\}, \tau) = \varepsilon^{(0)}(t_*, \cdot, \mathcal{G}) \quad (1.20)$$

2. В этом разделе исследуем случай, когда оболочка совершает

колебания с образованием четырех волн вдоль каждой стороны ($m = 3, n = 3$).

Так как $(I_{mn}^{(1)})^0, (I_{mn}^{(2)})^0, \varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T), u_{mn}^{(0)}$ и $v_{mn}^{(0)}$ ($m = 1, 2, 3; n = 0, 1, 2, 3$) трудно представить в аналитической форме, то задачу решим численно.

Для численного примера возьмем оболочку из стали, которая имеет следующие значения параметров: $L = 3\text{м}, R = 2\text{м}, h = 0.001\text{м}, \rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, E = 200\text{ГПа} = 2 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2, \mu = 0,3, P = 8, Q = 2, t = 0$.

Пусть начальный прогиб и начальная скорость срединной поверхности есть

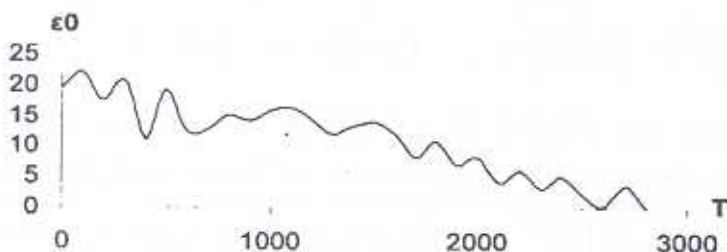
$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{1}{100}x^2 + \frac{1}{200}y^2 \\ \psi(x, y) &= \frac{1}{50}x^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Вычисляя квадрат частоты собственных колебаний оболочки при малых прогибах из (1.8) для $m = 3, n = 3$, получим

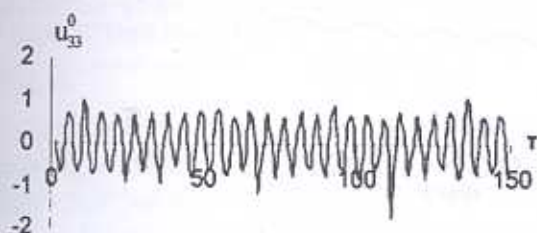
$$\begin{aligned} \lambda_{10} = \omega_{10}^2 &= 641026, & \lambda_{11} = \omega_{11}^2 &= 425107, & \lambda_{12} = \omega_{12}^2 &= 175369 \\ \lambda_{13} = \omega_{13}^2 &= 68832, & \lambda_{20} = \omega_{20}^2 &= 641030, & \lambda_{21} = \omega_{21}^2 &= 573766 \\ \lambda_{22} = \omega_{22}^2 &= 425114, & \lambda_{23} = \omega_{23}^2 &= 280059, & \lambda_{30} = \omega_{30}^2 &= 641049 \\ \lambda_{31} = \omega_{31}^2 &= 609768, & \lambda_{32} = \omega_{32}^2 &= 528531, & \lambda_{33} = \omega_{33}^2 &= 425141 \end{aligned}$$

Учитывая эти значения, с помощью программы «Mathematica 5.0» и «Microsoft Excel» численным методом вычислены $(I_{mn}^{(1)})^0, (I_{mn}^{(2)})^0$ ($m = 1, 2, 3; n = 0, 1, 2, 3$), а следовательно, вычислены гипотетическое рас-согласование из (1.18) и оптимальные управляющие воздействия из (1.17).

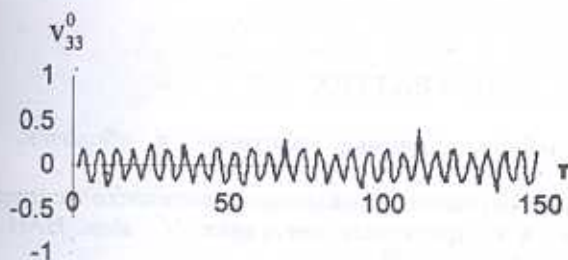
Ниже представлены зависимости $\varepsilon^0 \{T, 0, 3000\}$ (фиг.1), $u_{33}^0 \{\tau, 0, 150\}$ (фиг.2), $v_{33}^0 \{\tau, 0, 150\}$ (фиг.3).



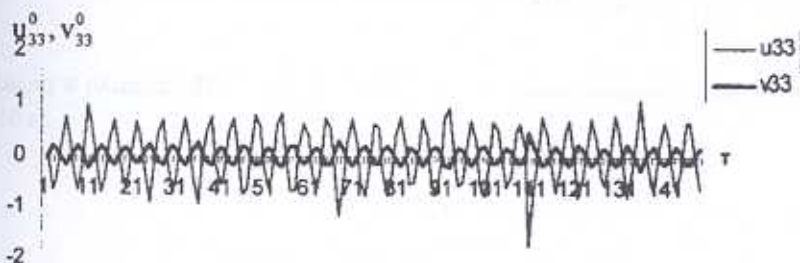
Фиг.1



Фиг.2



Фиг.3

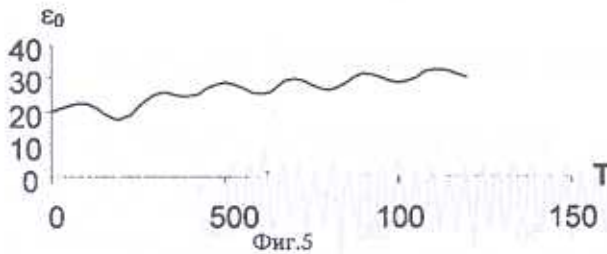


Фиг.4

Из фиг. 4 видно, что u_{33}^0 и v_{33}^0 имеют противоборствующее влияние в том же интервале времени. Остальные оптимальные управляющие воздействия $u_{mn}^0 \{ \tau, 0, 150 \}$, $v_{mn}^0 \{ \tau, 0, 150 \}$ ($m = 1, 2, 3$; $n = 0, 1, 2, 3$) имеют тот же характер, что и $u_{33}^0 \{ \tau, 0, 150 \}$ (фиг.2) и $v_{33}^0 \{ \tau, 0, 150 \}$ (фиг. 3).

Возьмем теперь $P < Q$, $P=2$, $Q=8$. Аналогично получим следующий график для гипотетического рассогласования (фиг. 5):

Из фиг. 1-5 следует, что когда ресурсы первого игрока больше, чем второго ($P > Q$), то задача всегда решается в пользу первого игрока, т.е. первый игрок, распоряжающийся управлением u_{mn}^0 ($m = 1, 2, 3$; $n = 0, 1, 2, 3$), гасит колебательное движение оболочки при самом упорном сопротивлении со стороны второго игрока v_{mn}^0 ($m = 1, 2, 3$; $n = 0, 1, 2, 3$).



Авторы выражают глубокую благодарность проф. В.Ц. Гнуни за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972, с. 9-111.
2. Габриелян М.С. Об оптимальном управлении механической системой мощности континуума в конфликтных ситуациях // Изв. НАН РА. Механика. 1998. Т. 51. №4. С. 72 – 76.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
24.01.2005