

УДК 539.1

**ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ УДАРНЫХ ВОЛН В ЗАДАЧЕ  
 ПРОНИКАНИЯ ДАВЛЕНИЯ В УПРУГУЮ СРЕДУ И  
 НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИФРАКЦИИ ВОЛНЫ НА КРАЮ  
 ЭКРАНА В КВАДРАТИЧНО-КУБИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ  
 УПРУГОЙ СРЕДЕ**

Багдоев А. Г., Погосян С.М., Сафарян Ю. С.

Ա. Գ. Բագդոբ, Ա.Մ.Պոգոսյան, Յու. Ս. Սաֆարյան

Քառակուսա-խորանարդային առածգական ոչ գծային միջավայրում հարվածային ալիքների հաշվարկումը առածգական միջավայր ներթափանցող ճնշման խնդրում և էկրանի ծայրում ոչ ստացիոնար դիֆրակցիայի ժամանակ

Քառակուսա-խորանարդային առածգական ոչ գծային միջավայրում դիտարկվում է հարվածային ալիքների հաշվարկումը տարածվող և կետային ալիքների շոյալման կետի շրջակայքում: Դիտարկվում է ոչ գծային հավասարումների ճշգրիտ մասնավոր լուծումները և ցույց է տրվում հարվածային ալիքների քաղաքարող պայմանների հավաստիությունը:

A.G. Bagdoyev, S.M. Pogosyan, Yu. S. Safaryan

Calculation of shock waves in problem of pressure penetration in elastic media and in non-stationary diffraction problem of wave on edge of screen in quadratic cubic non-linear elastic media

The non-linear diffraction problem of determination of solutions of short waves equations in vicinity of tangency point of arbitrary propagated wave with point wave is solved for elastic media with quadratic cubic non-linearity.

Рассматривается расчет ударных волн в окрестности точки касания распространяющейся и точечной волны в квадратично-кубично нелинейной среде. Использовано точное частное решение нелинейных уравнений. Условия на ударных волнах удовлетворены с большой точностью.

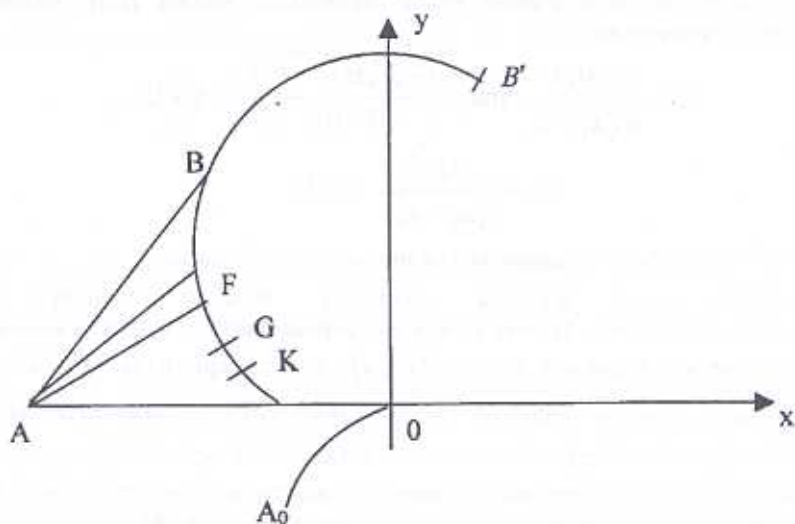
1. Рассматривается плоская задача дифракции продольной упругой волны *AB* (фиг. 1) около края *O* полубесконечного непрозрачного экрана в среде, описываемой уравнениями пятиконстантной (квадратичная нелинейность) и девятиконстантной (квадратичная кубичная нелинейность) теории упругости. Также решена задача проникания давления в упругую среду. В случае квадратичной кубичной нелинейной среды нормальная скорость волны записывается в виде [1]

$$c_n = c_0 + c_0 \delta_2 u + c_0 \delta_3 u^2 \tag{1}$$

$c_0$  – нормальная скорость линейной волны,  $u$  – возмущенная скорость частиц за волной. Можно получить коэффициенты  $\delta_2$  и  $\delta_3$  квадратичной и кубичной упругой среды. Согласно девятиконстантной теории для квадратичной кубичной упругой среды внутренняя энергия будет [2]

$$U = \mu u_{ik}^2 + \frac{1}{2} \lambda u_{cc}^2 + \frac{A}{3} u_{ik} u_{ic} u_{ic} + B u_{ik}^2 u_{cc} + \frac{C}{3} u_{cc}^3 + \alpha_1 u_{cc}^4 + \alpha_2 u_{cc}^2 u_{ik}^2 + \alpha_3 u_{cc} u_{ik} u_{ic} u_{ic} + \alpha_4 u_{ik}^4 \tag{2}$$

где тензор деформации



Фиг. 1

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_i} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_k} \right) \quad (3)$$

по повторяющимся индексам проводится суммирование. Записывая (2), (3) для одномерной по нормали к волне задачи, используя формулу для нормальной компоненты тензора напряжений Лагранжа

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial U}{\partial \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)} \text{ и уравнение движения } \rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}, \text{ учитывая, что на}$$

волне  $\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{1}{c_n} \frac{\partial u_x}{\partial t}$ , можно получить соотношение (1), где

$$c_0^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad \delta_2 = -\frac{1}{2\rho c_0^3} \left( 3\mu + \frac{3}{2}\lambda + A + 3B + C \right),$$

$$\delta_3 = -\frac{3}{2}\delta_2^2 + \frac{2}{\rho c_0^4} \left( \frac{\mu}{4} + \frac{\lambda}{8} + \frac{A + 3B + C}{2} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \right) \quad (4)$$

2. На фиг. 1  $AB$  есть распространяющаяся волна, в момент  $t = 0$  занимающая положение  $OA_0$ ,  $BB'$  есть точечная волна, произведенная краем  $O$  экрана в момент  $t = t_0$ . Волна  $ABB'$  получается и при проникании давления в среду. В линейном случае  $\delta_2 = 0$ ,  $\delta_3 = 0$  уравнения теории упругости описываются линейной гиперболической системой с переменными коэффициентами, и в окрестности точки  $B$  касания распространяющейся волны  $AB$  с точечной волной  $BB'$  (фиг. 1) в случае типичной скачкообразной начальной волны  $OA_0$ , за которой дается начальное условие  $u = a^0$ , и использованием теории Кирхгофа, согласно которой при определении решения в окрестности точки  $B$  нужно

интегрировать по освещенной части начальной волны [1,3], линейное решение [1] имеет вид

$$u_0 = \frac{A(t)}{\pi\sqrt{k_1 - k_2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-2c_1\tau(k_1 - k_2)}}{\theta - \theta_0}, \quad \tau < 0$$

$$u_0 = \frac{A(t)}{\sqrt{k_1 - k_2}}, \quad \tau > 0 \quad (5)$$

здесь  $r, \theta$  — лучевые координаты для неоднородной среды.

$\tau = \text{const}$  дает фронты точечных волн,  $\theta = \text{const}$  дает соответствующие лучи,  $k_1$  есть кривизна обращенной точечной волны  $EF$  фиг. 1 с центром в данной точке  $M(x, y)$ ,  $k_2$  есть кривизна  $OA_0$  в точке  $O$ ,  $A(t)$  есть лучевое решение [3] на волне  $BB'$ , умноженное на  $a^0$ .  $\tau = 0, \theta = \theta_0$  есть координаты точки  $B$  в линейной задаче. (5) дает также решение задачи о проникании давления в жидкую или упругую среду [3].

Справедливость теории Кирхгофа для задачи о проникании давления в жидкую или упругую среду показана прямым решением граничной задачи методом Адамара, причем в окрестности точки  $B$  решение совпало с решением эквивалентной задачи о начальных условиях, где интегрирование проводилось по освещенной части начальной волны.

Решение (5) совпадает также в частном случае однородной среды с известными решениями задач о дифракции плоских акустических и упругих волн на клине, частным случаем которых является задача о дифракции на полубесконечном плоском экране [4,5].

3. В нелинейной задаче, записывая с помощью (1) нелинейные упрощенные уравнения коротких волн вблизи  $B$  [1] и вводя функции

$$u = \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}} \mu, \quad v = \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}} \nu, \quad \text{где } \nu \text{ — трансверсальная компонента}$$

скорости частиц, аналогично случаю квадратичной нелинейности [1,3], можно найти точное частное решение указанных уравнений, сращиваемое вдали от  $B$  с линейным решением (5) в виде

$$\tau = -\frac{(\theta - \theta_0)^2}{2(k_1 - k_2)c_1} \operatorname{tg}^2 \mu \pi + \int_0^1 \delta_2 \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}} \mu dt + \int_0^1 \delta_3 \frac{A^2}{k_1 - k_2} dt + C_1(c)$$

$$\nu = \frac{\theta - \theta_0}{\pi(k_1 - k_2)c_1} \operatorname{tg} \mu \pi - \frac{\theta - \theta_0}{k_1 - k_2} \frac{\mu}{c_1} \quad (6)$$

где  $c_1$  есть значение  $c_0$  в точке  $B$ ,  $C = \frac{\sin \mu \pi}{\sqrt{k_1 - k_2}}$ ,  $C_1(c)$  — произвольная функция.

Можно показать, что  $ABB'$  будет ударной волной в случае  $\delta_2 a^0 > 0$ . В случае  $\delta_2 a^0 < 0$  волна  $ABB'$  будет непрерывной волной (на которой  $u = 0$ ), при этом, как показано в аналогичной по математической постановке задаче обтекания верха треугольного крыла [6,7] сверхзвуковым потоком газа, имеется всякая ударная волна  $BK$  фиг. 1, позади которой можно снова взять решение (6), а впереди нее решение



имеет место в виде семейства характеристик, на каждой из которых  $\mu = \text{const}$ , и может быть записано в виде [1]  $\mu = \mu_1, v = v_1$ ,

$$\tau - \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2(k_1 - k_2)c_1} = \mu_1^2 \int_0^t \frac{\delta_3 A^2}{k_1 - k_2} dt + \mu_1 \int_0^t \frac{\delta_2 A}{\sqrt{k_1 - k_2}} dt, \quad (7)$$

$$v_1 = -\frac{(\theta - \theta_0)\mu_1}{(k_1 - k_2)c_1}$$

В случае однородной среды и плоской волны  $AB$   $c_0 = c_1$ ,  $k_2 = 0$ ,  $k_1 = \frac{1}{c_1 t}$ , и решения (6) упрощаются и в предположении  $\delta_2 a^0 > 0$ ,  $\delta_3 > 0$ ,

после замен величин

$$\frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}} = \gamma, \quad \gamma = a^0, \quad \theta - \theta_0 = \sqrt{\delta_2} \gamma y, \quad u = \gamma \mu, \quad \tau = \delta_2 v t \delta, \quad v = \sqrt{\delta_2} \gamma t v' \quad (8)$$

дают решение позади  $KBB'$

$$\delta = -\frac{1}{2} y^2 \text{tg}^2 \mu \pi + \mu + \frac{1}{2\pi} \sin 2\mu \pi + B \sin^2 \mu \pi + \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2} \quad (9)$$

$$\left( \mu^2 + \frac{1}{\pi} \mu \sin 2\mu \pi - \frac{2}{\pi^2} \sin^2 \mu \pi \ln \sin \mu \pi \right), \quad v' = \frac{y}{\pi} \text{tg} \mu \pi - \mu y$$

где  $B$  — постоянная. Уравнение ударной волны  $BB'$

$$\frac{d\delta}{dy} = -\sqrt{2\delta - \mu - \frac{2}{3} \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2} \mu^2} \quad (10)$$

куда следует подставить  $\delta$  из (9), причем получается

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{y \text{tg}^2 \mu \pi - \zeta}{\chi + \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2} \Gamma} \quad (11)$$

где  $\chi = -\frac{y^2 \text{tg} \mu \pi}{\cos^2 \mu \pi} \pi + 1 + \cos 2\mu \pi$ ,  $\Gamma = 2\mu + 2\mu \cos 2\mu \pi - \frac{2}{\pi} \sin 2\mu \pi \ln \sin \mu \pi$ ,

$$\zeta = \sqrt{-y^2 \text{tg}^2 \mu \pi + \mu + \frac{1}{\pi} \sin 2\mu \pi + \frac{2\delta_3 \gamma}{\delta_2} \left( \frac{2}{3} \mu^2 + \frac{\mu}{\pi} \sin 2\mu \pi - \frac{2}{\pi^2} \sin^2 \mu \pi \ln \sin \mu \pi \right)} \quad (12)$$

(11) решается при начальном условии в точке  $B$  касания нелинейных волн  $AB$  и  $BK$

$$y = -\sqrt{1 + \frac{4}{3} \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2}}, \quad \mu = 1, \quad \delta = 1 + \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2} \quad (13)$$

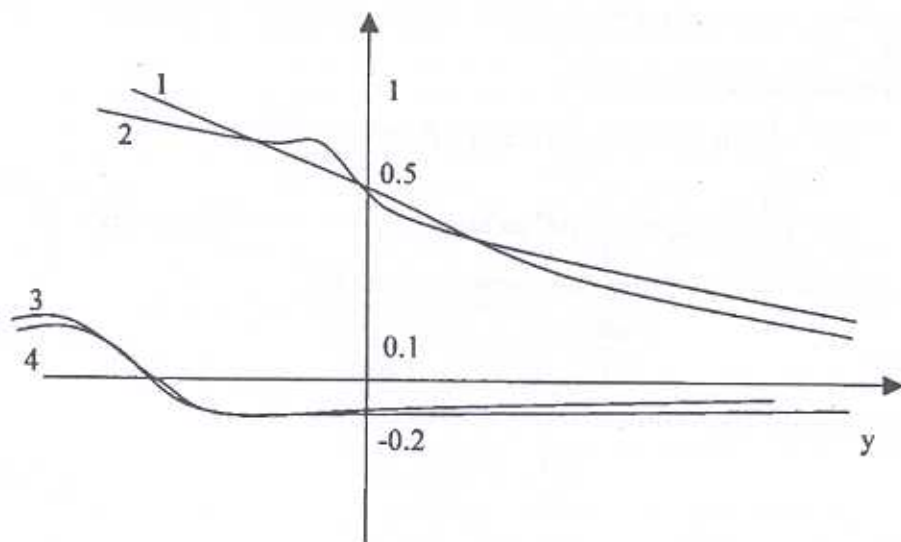
Кроме того, следует посчитать функцию  $\varkappa$ , представляющую безразмерную касательную к ударной волне  $BB'$  скорость частицы

$$\varkappa = \frac{y}{\pi} \text{tg} \mu \pi - \mu y - \mu \zeta \quad (14)$$

причем на  $BB'$  должно быть  $\varkappa \approx 0$ .

Расчеты уравнения (11), (12) при условиях (13) при значениях  $\delta_3\gamma/\delta_2 = 0; 1/2$  показали, что наилучшее удовлетворение условия  $\alpha = 0$  получается при  $B = 0$ , что и учтено в формулах (10)-(14). Результаты расчетов приведены на фиг. 2, где кривые 1,2 дают  $\mu(y)$ , 3,4 дают  $\alpha(y)$  для указанных  $\delta_3\gamma/\delta_2$  соответственно.  $\alpha(y)$  мало на всей волне  $BB'$ . таким образом, частное решение (6) позволяет в случае  $\delta_2\gamma > 0$  удовлетворить условию  $\alpha = 0$  с большой точностью, что для задачи газовой динамики в квадратично нелинейной среде показано в [6].

В случае упругой среды согласно (4)  $\delta_2 < 0$  [9] и при  $\delta_3 > 0, a^0 > 0$ , как было сказано, имеется виская ударная волна  $BK$  фиг. 1. Этот случай также осуществляется в случае электромагнитных ударных волн в сегнетоэлектрике [1], [10].



Фиг.2 ( $\delta_3\gamma/\delta_2 = 0; \delta_3\gamma/\delta_2 = 1/2$ )

Полагая при  $\delta_2\gamma < 0$

$$\frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}} = a^0, \quad \gamma = a^0, \quad u = -\gamma\mu, \quad v = -\gamma\sqrt{-\delta_2\gamma}v' \quad (15)$$

$$\theta - \theta_0 = \sqrt{-\delta_2\gamma}y, \quad \tau = -\delta_2\gamma t \delta$$

подставляя (15) в (6), можно показать, что (9) снова имеет место позади  $BK$ , только в нем следует заменить

$$\frac{\delta_3\gamma}{\delta_2} \rightarrow -\frac{\delta_3\gamma}{\delta_2}, \quad \ln \sin \mu \pi \rightarrow \ln \sin |\mu| \pi \quad (16)$$

а (7) дает впереди  $BF$  фиг. 1

$$v'_1 = -\gamma\mu_1, \quad \mu_1 = \frac{\delta_2}{2\gamma\delta_3} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{4\gamma\delta_3}{\delta_2} \left( \frac{y^2}{2} - \delta \right)} \right) \quad (17)$$

Впереди участка  $FK$  ударной волны вместо (17) имеет место  $\mu = -1$ .  
Уравнение висячей ударной волны  $BK$  имеет вид

$$\frac{d\delta}{dy} = \mp \sqrt{2\delta - \mu - \mu_1 + \frac{2}{3} \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2} (\mu^2 + \mu_1 \mu + \mu_1^2)}$$

$$v' - v'_1 = -(\mu - \mu_1) \frac{d\delta}{dy} \quad (18)$$

Знаки  $\mp$  выбираются в ходе расчета.

Уравнение (18) с учетом исправленного по (16) решения (9) будет:

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{y/g^2 \mu \pi \mp \zeta}{\chi + \delta_3 \gamma / \delta_2 \Gamma} \quad (19)$$

где поскольку впереди ударной волны  $GK$   $\mu = -1$ ,

$$\zeta' = \sqrt{-y^2/g^2 \mu \pi + \mu + \frac{1}{\pi} \sin 2\mu \pi + 1 - \frac{2\delta_3 \gamma}{\delta_2} \left( \frac{2}{3} \mu^2 + \frac{\mu}{3} - \frac{1}{3} + \frac{\mu}{\pi} \sin 2\mu \pi - \frac{2}{\pi^2} \sin^2 \mu \pi \ln |\sin \mu \pi| \right)}$$

Начальные условия для (19) будут в точке  $B$  следующими:

$$y = 0, \mu = 0, \delta = 0 \quad (20)$$

В соответствующей задаче обтекания верха крыла [1], где среда квадратично нелинейная, показано, что вблизи точки  $B$  ударная волна  $BK$  вырождается в характеристику  $BG$  фиг. 1, уравнение которой получается из (18), где следует выбрать нижний знак и полагать  $\mu = \mu_1$ . Учитывая (17),

интегрируя уравнение характеристики  $\frac{d\delta}{dy} = \sqrt{2(\delta - \mu + \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2} \mu^2)}$ , с учетом

(20) можно получить на  $BF$  фиг. 1

$$0 > y > y_1, \delta = -\frac{y^2}{2}, \mu = \mu_1. \quad (21)$$

где  $\mu_1$  дается (17). В случае  $\delta_3 = 0$  имеет место на  $BF$   $\mu_1 = -y^2$ . На участке  $FG$  характеристики, где  $\mu_1 = -1$ , интегрируя

$\frac{d\delta}{dy} = \sqrt{2(\delta + 1 + \delta_3 \gamma / \delta_2)}$  с начальными условиями в точке  $F$

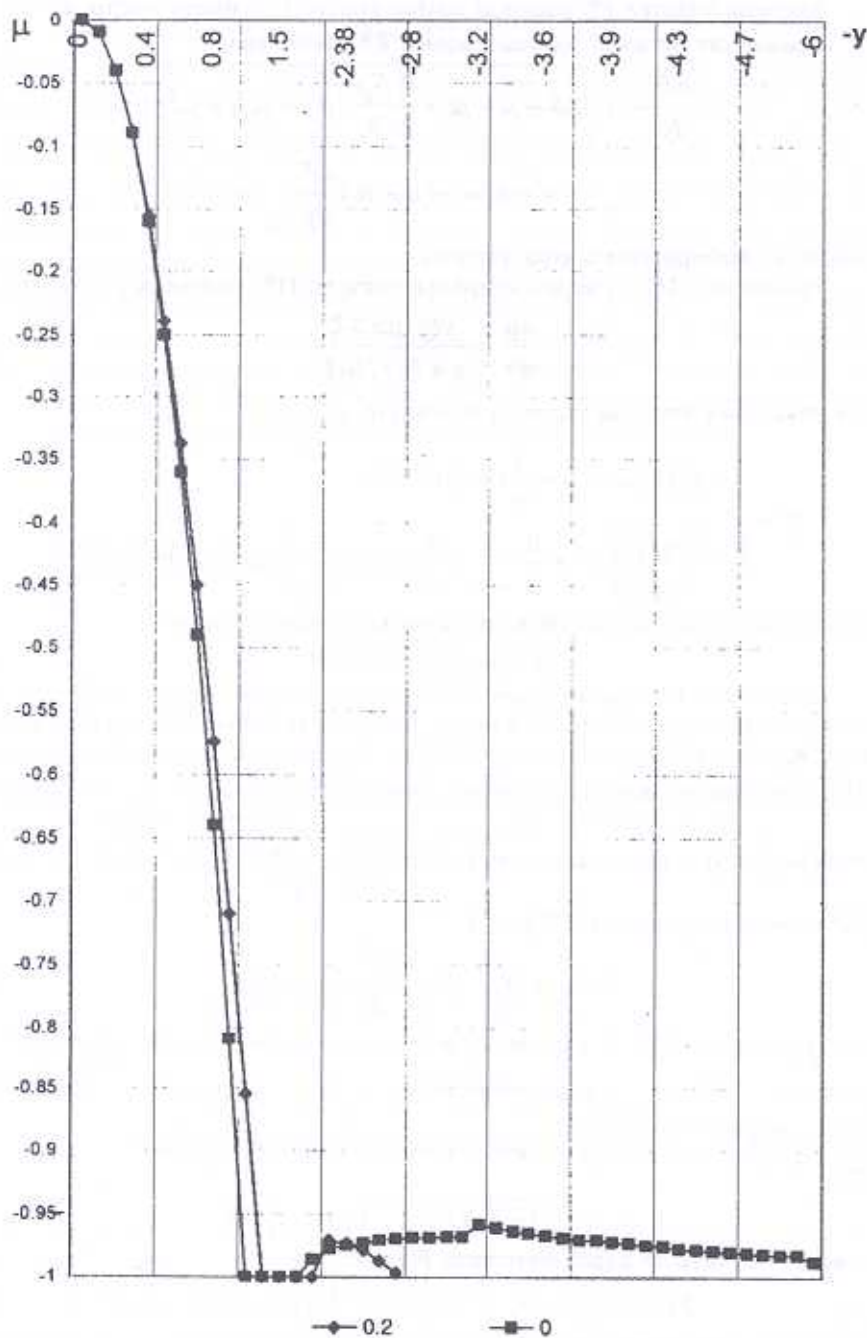
$$y_1 = -\sqrt{1 + \delta_3 \gamma / \delta_2}, \delta_1 = -y_1^2 / 2$$

можно получить на характеристике  $FG$  фиг. 1

$$y_1 > y > y_2, \mu_1 = -1, \delta + 1 + \delta_3 \gamma / \delta_2 = (y - 2y_1)^2 / 2 \quad (22)$$

где  $y = y_2$  есть точка зарождения ударной волны  $GK$  фиг. 1. В уравнении (19) выбирается верхний знак перед  $\zeta'$ , а в точке  $G$   $y_2 = 2y_1$ , в которой положено  $\mu_1 = -1$  и интегрируется (19) с этим начальным условием.

Далее решение проводится до точки  $y_3 < y_2$ , в которой меняется знак в (19) перед  $\zeta'$  на нижний и решение проводится до точки  $y = 3y_1$ .



Фиг.3 ( $\delta_3\gamma/\delta_2 = 0; 0,2$ )

Значения  $y_{2,3}$  выбраны так, чтобы  $\zeta'$  было вещественно и  $|\mu| < 1$ .  
 Рассчитано также на ГК



$$\alpha = \left( \frac{1}{\pi} \lg \mu \pi - \mu \right) y - y \mp \zeta'(\mu + 1) \quad (23)$$

которое должно быть мало вдоль ударной волны.

Результаты расчетов для  $\delta_3 \dot{\gamma} / \delta_2 = 0; 1/5$  приведены на фиг. 3. При этом  $\alpha(y)$  порядка  $10^3$ , то есть мало. Таким образом, для квадратично-кубичной нелинейной среды, как упругой, так и электромагнитной, посчитаны ударные волны  $BB'$  и  $BK$  с помощью частного решения (9), (16) с почти что точным удовлетворением условий на ударных волнах. Решение с интегральным удовлетворением условия на  $BK$   $\alpha = 0$  для квадратично-нелинейной среды дано в [11].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А. Г., Саакян С. Г., Мартиросян Г. А. Решение дифракционной задачи для электромагнитной волны в неоднородной квадратично и кубически нелинейной среде. Конференция "Лазерная физика" 2001. С. 43-47.
2. Вальдек У. А., Пейпман Т. А., Энгельбрехт Ю. К. Асимптотика продольных и поперечных волн деформации в полупространстве // Тезисы докл. II Всес. Конф. по нелинейной теории упругости. Фрунзе. ИЛИМ. 1985. С. 203-204.
3. Багдоев А. Г., Даноян Э. Н. Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке // Журнал вычис. матем. и матем. физики. 1972. Т. 12. №6. С. 1512-1529.
4. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках М.: Мир. 1966.
5. Фридлиндер Ф. Звуковые импульсы. М.: Изд. Иностран. Литературы. 1962. 232 с.
6. Бабаев Д. А. Численное решение задачи обтекания верхней поверхности треугольного крыла сверхзвуковым потоком // Журнал вычис. матем. и матем. физики. 1962. Т. 2. №2. С. 278-289.
7. Булах Б. М. Нелинейные конические течения газа. М.: Наука. 1970. 343с.
8. Zahalak G. Y, Myers M. K. Conical flow near Singular rays // Journ. Fluid Mechanics. 1974. Vol.64. N3. P. 537-561.
9. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука. 1966. 520с.
10. Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике. М.: Физматгиз. 1963. 847с.
11. Багдоев А. Г., Машурян Г. М., Сафарян Ю. С. К расчету ударных волн в дифракционных задачах газодинамики и нелинейной динамической теории упругости // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т. 56. №1. С.37-42.

Институт механики НАН Армении  
Горисский ф-л Армянского государственного  
архитектурного университета

Поступила в редакцию  
16.12.2004