

УДК 593.3

МИКРОПОЛЯРНАЯ ТЕОРИЯ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ,
ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Տարգսյան Ս. Օ.

Ս. Օ. Տարգսյան

Բարակ ձողերի, սաղերի և բաղաձյունների միկրոպոլյար տեսություն

Աշխատանքում, որն ակնարկային բնույթի է, արվում է միկրոպոլյար (մոմենտային, ոչ սիմետրիկ) ասիմետրիկ տեսության ներկա ձեռքբերումների նկարագրելը, հստակացնել ասիմետրիկ հանգամանորեն կանգ առնելով միկրոպոլյար բարակ ձողերի, սաղերի և բաղաձյունների կիրառական միաչափի և երկչափ տեսությունների կառուցման և այս խնդիրներում ասիմետրիկ մեթոդի զարգացման հարցերի վրա: Ակնարկի ամփոփումով հեղինակի տեսանկյունից նշվում են միկրոպոլյար բարակ ձողերի, սաղերի և բաղաձյունների տեսությունների հետագա զարգացման որոշ ուղղություններ:

S. H. Sargsyan

Micropolar Theory of Thin Bars, Plates and Shells

This paper, which is of a survey character, reflects the latest achievements in the Micropolar (Momental, Asymmetrical) Theory of elasticity, particularly, aiming at problems of constructing Applied One-dimensional and Two-dimensional Theories of Micropolar Thin Bars, Plates and Shells, and also at the development of the asymptotic method in these problems.

In the conclusion of the survey, there are brought out several directions of further development of the Micropolar Theory of Bars, Plates and Shells.

В работе обзорного характера дано описание достижений в микрополяриной (моментной, несимметричной) теории упругости, более обстоятельно останавливаясь на вопросах построения прикладных одномерных и двумерных теорий микрополяриных тонких стержней, пластин и оболочек и развития асимптотического метода в этих задачах.

В заключении обзора, с точки зрения автора, констатируются некоторые направления дальнейшего развития микрополяриных теорий стержней, пластин и оболочек.

1. Введение. Важной гипотезой, служащей для механического описания действия внутренних сил в деформируемом твердом теле, является принцип напряжений Коши, устанавливающий эквивалентность действия всех внутренних сил, приложенных к элементарной площадке, действию только их главного вектора, приложенной к центру площадки, при этом, пренебрегая действиями их главного момента относительно указанной точки. Это предположение отвергнуто в разработанной в начале XX века братьями Коссера системе механики сплошной среды [96] (отметим, что идея учета главного момента внутренних сил возникла еще в работе [111]). Деформация такой среды описывается не только вектором перемещения \vec{u} , но также вектором поворота $\vec{\omega}$, при этом, в среде, между ее частицами, помимо обычного центрального воздействия осуществляется еще и вращательное, и следовательно, возникают не только силовые напряжения, но и моментные напряжения, образующие несимметричные тензоры. Твердую среду, моделируемую таким образом, называют средой Коссера, а за теорией закрепились названия моментной, микрополяриной или несимметричной теории упругости.

Понятно, что в среде Коссера то, что называется бесконечно малым объемом, представляет собой не как материальную точку, а как более сложный объект (имеющий микроструктуру), обладающий помимо поступательных, также ротационными степенями свободы, содержащий весьма большое число элементарных частиц, а передаваемое через площадку усилие следует трактовать как суммарный эффект взаимодействия этих частиц. Таким образом, при структурно-феноменологическом подходе несимметричная теория упругости является

математической моделью для описания напряженно-деформированного состояния (НДС) тел с микроструктурой.

Наиболее остро интерес к всестороннему изучению континуума Коссера проявился в 50-х, 60-х и 70-х годах прошлого века. Он обусловлен, в первую очередь, применением поликристаллических структур, зернистых металлов, высокомолекулярных полимеров и широким внедрением композиционных материалов.

Современный вывод уравнений этой теории и ее обоснование приведены в работах [17,50,61,62,64,69,72,74,94,97,104 и др.].

Как отмечается в монографии [57], нет ничего логически недопустимого в том, что, по крайней мере, в местах резкой изменчивости напряженного состояния (в окрестности вершин трещин, отверстий и выточек) влияние моментов может оказаться сравнимым с влиянием сил.

Несимметричная теория упругости является базовой моделью при изучении волновых процессов в твердых телах с микроструктурой [40].

Однако большинство точных решений [27,47,50,61,62,66,74,75 и др.] получено с использованием упрощения, часто называемого «стесненным вращением» или псевдоупругой средой Коссера, при котором постулируется зависимость вектора вращения от вектора перемещения

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \bar{u}$$

Этот вариант моментной теории упругости как-то понижает ее полноту, так как [69,74] число физических констант для изотропного упругого тела сокращается с шести до четырех.

Ряд авторов [17,64,69,70,94,97,104 и др.] посвятил свои работы отысканию точных решений задач в полной постановке моментной теории, несмотря на значительные трудности при разрешении получающихся дифференциальных уравнений. Найдена концентрация напряжений вблизи кругового отверстия [55,70], задача о равновесии полупространства [104], о сдвиге бесконечного плоского слоя [54,104], кручении кольца [51] и др. Получен ряд новых аналитических и численных решений несимметричной теории упругости [51,54] и из этих решений выделены и проанализированы параметры (моменты, силы, перемещения, повороты), откликающиеся на моментные эффекты. С целью расширения круга решаемых задач разработана также алгоритм метода конечных элементов для решения двумерных задач несимметричной теории упругости.

Отметим, что наиболее эффективные приложения моментной теории упругости относятся к задачам расчета упругонапряженного состояния вблизи острых вершин трещин [37,64 и др.].

Как известно, на пути практических приложений моментной теории упругости встречаются определенные трудности, связанные с экспериментальным определением для конкретных материалов традиционных и дополнительных упругих постоянных. Скудность информации о материальных констант сред с микроструктурой является одним из основных факторов, сдерживающих изучение модели несимметричной теории упругости. Если до недавнего времени отсутствовали достаточно убедительные экспериментальные исследования по определению упругих характеристик, входящих в основные соотношения теории упругости с несимметричным тензором напряжений, то в настоящее время имеется значительное продвижение в этой области.

Измерения констант упругости на основе статических экспериментов производились в работах [50,51 и др.]. В работе [51] в качестве экспериментально реализуемой схемы по деформированию материала была выбрана задача Кирша о растяжении бесконечной пластины, ослабленной круговым отверстием, аналитическое решение которой в рамках несимметричной теории упругости приведено в работе [55]. Анализ аналитического решения позволил определить

макропараметры, которые откликаются на моментные свойства материала и которые конструктивно экспериментально измеряемы.

Необходимо отметить, что более точными все-таки являются динамические эксперименты, особенно ультразвуковые. Наблюдаемая экспериментально дисперсия ультразвука позволяет вычислить модули упругости континуума Коссера [40,99]. Заметим, что для успешного развития акустических методов измерения необходимо изучение особенностей распространения упругих волн в средах сложной структуры, которым посвящены работы [99 и др.].

Интерес к изучению механического поведения твердых тел с микроструктурой в настоящее время очень велик. Проблема состоит в определении макроскопических свойств конструкционных материалов, в том числе и поликристаллических металлов с микроскопических позиций, умение воспроизводить заданные макроскопические свойства методами регулирования микроструктуры. В этой проблематике научно-технического прогресса определенное место имеют задачи несимметричной теории упругости.

Отметим, что в настоящее время установлена принципиальная возможность конструктивного моделирования и технологической воспроизводимости твердых деформируемых сред коссеровского типа [23].

Можно сказать, что содержание монографии братьев Коссера теснейшим образом связано с развитием современной механики сплошной среды, его роль значительно глубже, чем это считалось почти до недавнего времени. Как отмечается в работе [45], содержание монографии Е. и Ф. Коссера представляет собой, по существу, обширную программу новых направлений развития теории деформации в твердых телах.

Вопрос о построении несимметричной теории упругости остро ставится также в задачах, где учитываются не только массовые силы, но и массовые пары сил. С такого рода объемным распределением моментов приходится сталкиваться, как указывается в работе [41], при решении задач для некоторых классов материалов, обладающих электромагнитными свойствами. Это, главным образом, ферромагнетики [19,36].

Теория среды Коссера занимает промежуточное положение между классической теорией упругости и физикой твердого тела. Прогресс в микро- и нанотехнологии при создании новых материалов (нанокомпозитов) и изучении напряженно-деформированного состояния в телах из этих материалов, в свою очередь, способствовали актуальности исследований и прогресса несимметричной теории упругости [44,53].

Как отмечается в работе [7], естественно, приобретает актуальность и проблема построения теорий микрополярных упругих тонких стержней, пластин и оболочек.

На основе теории несимметричной упругости со стесненным вращением, методом гипотез, в работах [31,92 и др.] построены математические модели тонких стержней, пластин и оболочек (см. также обзор [49]). В работах [42,48] на основе концепции поверхностей Коссера построены прикладные-двумерные теории пластин и оболочек.

В монографии [7], методом гипотез, при реализации некоего симбиоза общей несимметричной теории упругости и основных положений общезвестной уточненной теории оболочек и пластин [6,7] построена прикладная-двумерная теория микрополярных пластин и оболочек, которая открывала пути к эффективному решению конкретных задач прочности, колебания и устойчивости пластин и оболочек с учетом моментных напряжений.

В работе [63] на основе метода гипотез построена теория микрополярных упругих тонких цилиндрических оболочек.

В силу того, что если в соответствующих уравнениях классической теории упругости или несимметричной теории упругости для тонких трехмерных тел

перейти к безразмерным координатам (и безразмерному времени в случае динамических задач), то система преобразованных уравнений будет содержать малый параметр и для решения подобных систем естественно использовать асимптотические методы. Так как системы получаемых уравнений являются сингулярно-возмущенными, следовательно, указанная проблематика относится к категории проблем с пограничным слоем.

Отметим, что регулярные асимптотические методы в теории упругих тонких анизотропных пластин и оболочек развиты в работе [76].

В задачах, принадлежащих к типу задач пограничного слоя, решение может быть разбито на части, соответствующие разным областям. В результате, трудности, возникающие при построении решения в каждой отдельной области, будут обычно намного меньше, чем при получении строгого решения, пригодного во всей области (если последнее возможно). С другой стороны, если получено точное решение сингулярно-возмущенной граничной задачи, то трудно будет разобраться с таким решением, выраженным сложной математической формулой. Асимптотический метод может извлечь из такой формулы асимптотическую структуру этого решения.

Асимптотические методы в задачах с пограничным слоем в теории тонких пластин и оболочек по классической теории упругости развиты в работах [1-4, 21, 29, 30, 32-35, 88, 89, 98, 100, 102 и др.]; в электромагнитной механике теорий пластин и оболочек — в работах [10, 73, 77, 88]; в термоупругости тонких пластин и оболочек — в работах [43, 60]. Асимптотический метод оказался весьма эффективным также для решения неклассических краевых задач тонких стержней, пластин и оболочек [1-4].

В данной статье дается обзор работ автора и его учеников, посвященных построению асимптотической теории микрополярных стержней, пластин и оболочек на основе уравнений двух вариантов несимметричной теории упругости. В этих работах построен внутренний итерационный процесс, изучены микрополярные погранслои, изучена проблема их сращивания с внутренней задачей. На результатах внутреннего итерационного процесса построена общая прикладная теория микрополярных упругих тонких стержней, пластин и оболочек.

2. Микрополярная теория упругих тонких пластин, оболочек и стержней

Асимптотический метод в несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (НТУ с НППВ) для тонких пластин впервые был применен в работе [38] для получения двумерных уравнений в перемещениях и независимых вращениях.

Проблема состоит в том, чтобы использовать асимптотический метод и построить общую теорию микрополярных стержней, пластин и оболочек на основе НТУ с НППВ, а также на основе НТУ с СВ (стесненным вращением).

В работах [78-81, 107] разработан асимптотический подход и, в результате, в случае статической задачи построена общая асимптотическая теория микрополярных пластин на основе НТУ с НППВ. Построен внутренний итерационный процесс, введены осредненные по толщине пластинки усилия, моменты и гипермоменты по НТУ с НППВ. Получены двумерные уравнения в области срединной плоскости пластинки для любого асимптотического приближения. На основе исходного приближения внутреннего итерационного процесса построена общая прикладная-двумерная теория (для задачи изгиба и обобщенного плоского напряженного состояния) микрополярных упругих тонких пластин на основе НТУ с НППВ. Построена теория погранслоя пластинки. Доказано существование четырех типов погранслоев (силовой-плоский и антиплоский, моментный-плоский и антиплоский). Доказываются некоторые важные свойства погранслоевых решений, играющих важную роль при сращивании асимптотических разложений внутренней задачи (прикладной-двумерной теории) и погранслоевых задач. Строятся функции типа

погранслоев и доказывается их обобщенная ортогональность [83]. В виде рядов (с неопределенными коэффициентами) представляются общие решения каждого из указанных типов погранслоев. Получены те трансцендентные уравнения, с корнями которых связываются погранслойные функции. При большом наборе граничных условий НТУ с НППВ на боковой поверхности пластинки изучается задача сращивания внутреннего итерационного процесса и погранслоев. В результате этого исследования получены граничные условия на контуре области срединной плоскости пластинки для общей прикладной-двумерной теории микрополярных пластин. Таким образом, общая прикладная-двумерная теория микрополярных пластин на основе НТУ с НППВ отделяется как самостоятельная граничная задача. На основе вариационного принципа НТУ с НППВ получен вариационный принцип для общей прикладной-двумерной теории микрополярных пластин. Отдельные граничные условия получены также для указанных выше погранслойных задач. На основе вариационного подхода для определения произволов погранслойных задач получены алгебраические линейные системы уравнений.

Асимптотический подход развивается также для построения общей асимптотической теории микрополярных пластин на основе НТУ с СВ. Построена прикладная-двумерная теория микрополярных пластин на основе НТУ с СВ. Показано, что при определенных характеристиках новых упругих констант материала пластинки эти же результаты можно получить, исходя из НТУ с НППВ. Построены и изучены погранслойные задачи по НТУ с СВ. Изучена задача сращивания и получены граничные условия прикладной-двумерной теории и погранслойных задач. Обосновывается прикладная-двумерная теория микрополярных пластин [31,92], построенной на основе метода гипотез.

В работе [108] развивается асимптотический подход работ [78-81,107] для изучения динамических задач микрополярных пластин на основе НТУ с НППВ. В работах [12,15], продолжая исследования в этом направлении, построена общая прикладная-двумерная динамическая теория микрополярных пластин. Построены и изучены квазистатические погранслои. На основе сращивания асимптотических разложений получены граничные и начальные условия для общей прикладной-двумерной динамической теории микрополярных пластин. Получен принцип Гамильтона для общей прикладной-двумерной теории микрополярных пластин.

Построена общая прикладная-двумерная динамическая теория микрополярных пластин на основе НТУ с СВ.

В работах [13,16] изучаются изгибные собственные колебания прямоугольных и круглых микрополярных пластин.

В работах [109] построена асимптотическая теория термоупругости микрополярных тонких пластин.

В работах [67,103] асимптотическим методом изучена статическая граничная задача НТУ с НППВ в тонкой трехмерной области оболочки. Построен внутренний итерационный процесс и теория погранслоя для тонких оболочек на основе НТУ с НППВ. Построена общая прикладная-двумерная теория микрополярных оболочек. Изучены структура и свойства погранслоя по НТУ с НППВ для тонкой оболочки. Изучена задача сращивания и получены отдельные граничные условия прикладной-двумерной теории и погранслойных задач микрополярных оболочек.

В работе [68] построена общая прикладная-двумерная теория микрополярных тонких оболочек на основе НТУ с СВ. Изучены погранслои по НТУ с СВ. Изучена задача сращивания внутренней задачи и погранслойных задач, в результате которого получены граничные условия прикладной-двумерной теории микрополярных оболочек и погранслойных задач.

На основе результатов работ [67,68] построена общая теория микрополярных круговых цилиндрических оболочек.

В работах [65,82] асимптотический подход развивается для изучения краевых задач микрополярного упругого прямоугольника как на основе НТУ с НППВ, так и на основе НТУ с СВ. Построена прикладная-одномерная теория микрополярных стержней. Построен вариационный принцип прикладной-одномерной теории микрополярных стержней. Построена теория микрополярных погранслоев для тонкого прямоугольника, изучены структура и свойства погранслоевых задач. Построены функции типа погранслоя. Доказаны свойства их обобщенной ортогональности. Построены общие решения погранслоевых задач в виде рядов. Вариационным способом определение произволов погранслоев сведено к решению систем алгебраических линейных уравнений. Изучена задача срашивания прикладной одномерной теории и погранслоевых задач, определены соответствующие граничные условия.

В работе [16] построена прикладная-одномерная динамическая теория микрополярных стержней как на основе НТУ с НППВ, так и на основе НТУ с СВ. В работе [14] изучена задача о распространении волн в бесконечной микрополярной полосе по НТУ с НППВ в точной постановке и доказана, что в случае длинных волн результаты по точной и прикладной теориям совпадают. В работах [13,15] изучается задача о свободных изгибных колебаниях микрополярных стержней. Численные результаты обнаруживают эффекты микрополярности на частоты собственных колебаний стержней.

В работе [26] асимптотическим методом изучается термоупругая задача микрополярного упругого тонкого прямоугольника.

3. Заключение. В заключение обзора попытаемся систематизировать затронутые выше проблемы, разработка которых на наш взгляд, имеет существенное значение.

-Построена общая прикладная-двумерная теория микрополярных пластин и оболочек и прикладная-одномерная теория микрополярных стержней на основе НТУ с НППВ и НТУ с СВ.

-Построена общая прикладная-двумерная динамическая теория микрополярных пластин и прикладная-одномерная динамическая теория микрополярных стержней на основе НТУ с НППВ и НТУ с СВ.

-Построена общая прикладная-двумерная теория термоупругости микрополярных пластин и прикладная-одномерная теория термоупругости микрополярных стержней.

-Изучена задача погранслоя для микрополярных пластин, оболочек и стержней, изучены структура и свойства микрополярных погранслоев, построены их общие решения.

-Изучена задача срашивания внутреннего итерационного процесса (прикладной теории) и погранслоевых задач по НТУ с НППВ и НТУ с СВ, выявлены граничные условия прикладной теории в случае микрополярных пластин, оболочек и стержней.

Актуальными задачами в данной области, на наш взгляд, являются:

-построение прикладной-двумерной динамической теории и теории термоупругости для микрополярных тонких оболочек;

-построение прикладной-двумерной теории магнитоупругости и магнитотермоупругости микрополярных тонких оболочек и пластин;

-решение класса задач о концентрации напряжений вокруг отверстий в микрополярных пластинах и оболочках;

-решение класса задач о свободных и вынужденных колебаниях и другие динамические задачи для микрополярных пластин и оболочек;

-изучение задач устойчивости микрополярных пластин и оболочек;

-развитие численных и вариационных методов решения задач прочности, колебания и устойчивости микрополярных пластин и оболочек;

-и, главное, найти приложения разработанной микрополярной теории пластин, оболочек и стержней в современной области микро- и наномеханики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек М: Наука. 1997, 414 с.
2. Агаловян Л. А. О некоторых результатах по асимптотической теории балок, пластин и оболочек. // В сб.: " Проблемы механики деформируемого твердого тела". Ереван: Изд – во НАН Армении. 1997. С. 31 – 50.
3. Агаловян Л. А. Об асимптотическом методе в теории пластин и оболочек // Механика оболочек и пластин в XXI веке. Саратов. Изд – во Саратовск гос. тех. ун – та. 1999. С. 129 – 151.
4. Агаловян Л. А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел // ПМ. 2002. Т. 38, №7. С. 3 – 24.
5. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1967. 266с.
6. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974. 446с.
7. Амбарцумян С. А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении. 1999. 214с.
8. Амбарцумян С. А. Теория трансверсально-изотропной пластинки с учетом моментных напряжений // Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т. 54, №1. С. 5-11.
9. Амбарцумян С. А. Задача несимметричной термоупругости весьма пологой оболочки // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т. 55. №3. С. 20-33.
10. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272с.
11. Атоян А.А. Асимптотические решения краевых задач колебаний тонких пластин по несимметричной теории упругости. Кандидатская диссертация. Институт Механики НАН Армении. 2004. 122с.
12. Атоян А.А., Саркисян С.О. Динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин // Экологический Вестник Научных Центров Черноморского Экономического Сотрудничества. 2004. №1. С. 18-29.
13. Атоян А.А., Саркисян С.О. Свободные колебания пластин-полос, прямоугольных и круглых пластин по несимметричной теории упругости // Тезисы докладов Международной конференции «Четвертые Окуневские чтения» и симпозиума «Пуанкаре и проблемы нелинейной механики». Санкт-Петербург, 22-25 июня 2004 г. С. 25-26.
14. Атоян А.А., Саркисян С.О. К задаче о распространении плоской волны в микрополярной упругой бесконечной полосе. // Прикладная механика и технологии машиностроения: Сб. научн. тр. / Под редакцией В. И. Ерофеева, С. И. Смирнова, Г. К. Сорокина.-Нижний Новгород: Изд-во «Интелсервис». 2004. Вып. 1(7). С. 67-74.
15. Атоян А.А., Саркисян С.О. Задача динамики тонкой пластинки на основе несимметричной теории упругости // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57, №2. С.18-33.
16. Атоян А.А., Саркисян С.О. Изучение свободных колебаний микрополярных упругих тонких пластин. // Докл. НАН Армении. 2004. Т. 104. № 4. С. 287-294.
17. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // ФТТ. 1960. Т. 2. Вып. 7. С. 1399-1409.
18. Бабич Д. В. О влиянии моментных напряжений на частоты собственных колебаний цилиндрической оболочки // ПМ. 1967. Т. 3. Вып. 4. С. 39-44.
19. Багдасарян Г.Е., Асаян Д.Д. Основные уравнения и соотношения теории несимметричной магнитоупругости ферромагнитного тела // В сб.: Проблемы

- механики тонких деформируемых тел. Ереван, Изд. НАН Армении, 2002, С. 37-47.
20. Багдоев А.Г., Петросян Л. Г. Распространение волн в микрополярированной электропроводящей жидкости // Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1983. Т. 36, №5. С. 3-16.
 21. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 446с.
 22. Болотин В. В. Основные уравнения теории армированных сред // Мех. Полимеров. 1965. №2. С. 27-37.
 23. Бровка Г. Л. Об одной конструкционной модели среды Коссера // МТТ, 2002. №1. С. 75-91.
 24. Ваини Г. А. Градиентная теория упругости // МТТ, 1999. №1. С. 46-53.
 25. Варданян С. А. Применение асимптотического метода к расчету термоупругих пластин по несимметричной термоупругости // В сб.: Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем. Ереван, 2002. С. 138-142.
 26. Варданян С.А. Внутренняя задача термоупругого прямоугольника по несимметричной теории упругости // Механика. Материалы XII Республиканской конференции молодых ученых. Агавназор. 25-29 августа 2001. С. 42-47.
 27. Введение в микромеханику. Под редакцией М. Онами. М.: Металлургия, 1987. 271с.
 28. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН, 1957. Т. 12, №5. С. 3-122.
 29. Ворович И. И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. II Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике. Вып. 3. М.: Наука, 1966. С. 116-136.
 30. Ворович И. И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек // В сб.: Материалы I Всесоюз. Школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси: Изд. Тбилисск. Унта, 1975. С. 51-149.
 31. Геворкян Г. А. Об изгибе пластин с учетом моментных напряжений // ПМ, 1966. Т. 2, Вып. 10. С. 36-43.
 32. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668-686.
 33. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 593-608.
 34. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510с.
 35. Гольденвейзер А. Л., Каплунов Ю. Д., Нольде Е. В. Асимптотический анализ и уточнение теории пластин и оболочек типа Тимошенко-Рейснера // Изв. АН СССР МТТ. 1990. №6. С. 124-138.
 36. Грекова Е. Ф., Жилин П. А. Среда Кельвина и ферромагнетики: определяющие уравнения и волновые процессы // Нелинейная акустика твердого тела / Сб. трудов 8 сессии Росс. акустич. общества. - Н. Новгород: Изд-во «Интелсервис», 1998. С.87-90.
 37. Дудников В. А., Морозов Н. Ф. Определение напряженно-деформированного состояния плоских, ослабленных вырезами с угловыми точками областей, на основе линейной моментной теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. №1. С. 95-100.
 38. Дудников В. А., Назаров С. А. Асимптотически точные уравнения тонких пластин на основе теории Коссера // ДАН СССР, 1982. Т. 262. №2. С. 306-309.

39. Еремеев В. А., Зубов Л. М. Об устойчивости упругих тел с моментными напряжениями // МТТ. 1994. №3. С. 181-190.
40. Ерофеев В. И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ. 1999. 327с.
41. Жермен П. Механика сплошных сред. М.: Изд-во «Мир», 1965. 480с.
42. Жилин П. А. Основные уравнения неклассических теорий упругих оболочек // Динамика и прочность машин / Тр. ЛПИ. №386. Л.: Изд-во ЛПИ. 1982. С. 29-42.
43. Зино И.Е., Тропп Э.А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности. Л.: Изд-во ЛГУ. 1978. 224с.
44. Иванова Е. А., Кривцов А. М., Морозов Н. Ф., Фирсова А. Д. Учет моментного взаимодействия при расчете изгибной жесткости наноструктур // Доклады АН России. 2003. Т. 391. № 6. С.764-768.
45. Ильюшин А. А. Несимметрия тензоров деформаций и напряжений в механике сплошных сред // Вестник Моск. ун-та. Сер.1, Математика. Механика. 1996. № 5. С.6-14.
46. Ильюшин А. А., Ломакин В. А. Моментные теории в механике твердых деформируемых тел // В сб.: Прочность и пластичность. М.: Наука. 1971. С. 54-59.
47. Каландия А. И. Математические методы двумерной теории упругости. М.: Наука. 1973. 304с.
48. Каюк Я. Ф., Жуковский А. П. К теории пластин и оболочек на основе концепции поверхностей Коссера // ПМ. 1981. Т. XVII. № 10. С. 80-85.
49. Кириллов Ю.В., Постников А.А., Тюленев А. И. Исследования по теории пластин и оболочек моментной теории упругости // В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во. Казанск. Ун-та 1990. Вып.20, С. 18-43.
50. Койтер В. Т. Моментные напряжения в теории упругости // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1965. №3. С. 89-112.
51. Корепанов В.В., Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Аналитические, численные и экспериментальные исследования моментных эффектов при деформировании упругих тел // Тр. III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием. Ростов-на-Дону-Азов, 13-16 октября 2003. Ростов-на-Дону. Изд-во «Новая книга», 2004. С. 230-231.
52. Короткина М. Р. О моментных напряжениях // Вестник Московск. Университета, 1968. №6. С. 53-61.
53. Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. О механических характеристиках наноразмерных объектов // Физика твердого тела. 2002. Т.44. Вып. 12. С.2158-2163.
54. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение аналитических решений некоторых двумерных задач моментной теории упругости // МТТ. 2002. № 5. С. 69-82.
55. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение и анализ точного аналитического решения задачи Кирша в рамках континуума и псевдоконтинуума Коссера // ПМТФ. 2001. № 4. С. 145-154.
56. Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука. 1975. 416с.
57. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука. 1970. 940с.
58. Лялин А.Е., Пирожков В.А., Степанов Р.Д. О распространении поверхностных волн в среде Коссера // Акуст. Журнал, 1982. Т. 28 № 6. С 838-840.
59. Манукян В. Ф. О существовании поверхностных сдвиговых волн в микрополярных средах // Изв. НАН Армении. Механика. 1997. Т. 50. №2. С. 75-79.
60. Маслов Н. М. Асимптотическая теория термоупругости тонких оболочек. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1993. 152с.

61. Миидлин Р. Д. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений // Механика. Период. сб. Перев. Иностр. Статей. 1964. №4. С. 115-128.
62. Миидлин Р. Д., Тирстен Г. Ф. Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика. Период. сб. Перев. Иностр. Статей. 1964. №4. С. 80-114.
63. Мовсисян Л. А. К моментной теории упругости для тонких пластин // Докл. НАН Армении. 1999. Т. 99. №2. С. 148-152.
64. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука. 1984. 256с.
65. Муцафян М. Н., Саркисян С. О. Асимптотические решения краевых задач тонкого прямоугольника по несимметричной теории упругости // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 57. №1. С. 41-58
66. Назаров С. А., Семенов Б. Н. О связи коэффициентов интенсивности для плоской задачи теории упругости в классической и моментной постановке // В сб.: "Исследования по упругости и пластичности". Вып. 13. Л.: Изд-во ЛГУ. 1980. С. 148-154.
67. Никогосян Г.С., Саркисян С.О. Микрополярная теория упругих тонких оболочек // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. №1. С. 15-37.
68. Никогосян Г.С., Саркисян С.О. Упругие тонкие оболочки по несимметричной теории упругости со стесненным вращением // Доклады НАН Армении. 2005.
69. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 862с.
70. Пальмов В.А. Плоская задача теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1117-1120.
71. Пальмов В.А. Простейшая непротиворечивая система уравнений теории тонких упругих оболочек // Сб.: Механика деформируемого твердого тела. Изд-во «Наука», 1986. С.106-112.
72. Пальмов В. А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401-408.
73. Рогачева Н.Н. Пьезокерамические оболочки, поляризованные вдоль одного семейства координатных линий срединной поверхности // Препринт №204. Институт Проблем Механики АН СССР. М., 1982. 60с.
74. Савин Г.Н. Основы плоской моментной теории упругости. Киев: Изд-во Киевск. ун-та. 1965. 162с.
75. Савин Г.Н., Немиш Ю. Н. Исследования по концентрации напряжений в моментной теории упругости // ПМ. 1968. Т. 4. Вып. 12. С. 1-17.
76. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд-во ЕГУ. 1976. 534с.
77. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во АН Армении. 1992. 260с.
78. Саркисян С. О. Асимптотическая теория и вариационное уравнение плоской задачи упругой тонкой пластинки по моментной теории упругости // Докл. НАН Армении. 1999. Т. 99. №2 С. 138-147.
79. Саркисян С. О. Асимптотическая теория и вариационное уравнение плоской задачи изгиба упругой тонкой пластинки по моментной теории упругости // Докл. НАН Армении. 1999. Т. 99. №3. С. 216-225.
80. Саркисян С. О. Теория тонких пластин по несимметричной теории упругости // Сб. Научных трудов конференции, посвященной 90-летию со дня рождения профессоров Т. Т. Хачатряна и О. М. Сапонджяна, состоявшейся 23-24 октября 1998. Ереван. 1999. С. 185-189.
81. Саркисян С. О. О некоторых результатах внутреннего и краевого расчетов тонких пластин по несимметричной теории упругости // Сб. научных трудов, посвященных 80-летию академика НАН РА С. А. Амбарцумяна. Ереван: Изд-во НАН РА. 2002. С. 285-296.

82. Саркисян С. О., Мутафян М. Н. Внутренняя задача изотропного упругого прямоугольника по несимметричной теории упругости // Изв. ВУЗ-ов. Северо-Кавказский регион. Естест. науки. 2000. №3. С. 141-142.
83. Саркисян С.О., Фарманян А.Ж. Обобщенная ортогональность в плоской задаче несимметричной теории упругости // Докл. НАН Армении. 2001. Т. 101. № 2.
84. Саркисян С.О., Фарманян А.Ж. Сращивание асимптотических разложений основного итерационного процесса и погранслоя в краевых задачах тонких пластин по несимметричной теории упругости // Изв. ВУЗ-ов. Северо-Кавказский регион. Естест. Науки. 2002. №2. С. 36-38.
85. Седов Л.И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред // Успехи математических наук, 1965. Т. Вып. 5. С. 121-180.
86. Товстик П. Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука, 1995. 320с.
87. Угодчиков А. Г. Моментная динамика линейно-упругого тела // Докл. АН России. 1995. Т. 340. №1. С. 56-58.
88. Устинов Ю. А. Однородные решения и проблема предельного перехода от трехмерных задач к двумерным для плит из электроупругих материалов с переменными свойствами по толщине // Тр. X-ой Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Т. 1. Тбилиси. Изд-во «Мишииереба». 1975. С. 286-295.
89. Устинов Ю.А., Шленев М.А. О некоторых направлениях развития асимптотического метода плит и оболочек // Межвузовский сборник «Расчет оболочек и пластин. Ростов-на-Дону. Изд-во Ростовского Инженерно-строительного ин-та. 1978. С. 3-27.
90. Фарманян А.Ж. Сращивание внутреннего напряженного состояния и погранслоя тонких пластин для одного варианта смешанных граничных условий по несимметричной теории упругости // Материалы XII республиканской конференции молодых ученых. Механика. 2003. С. 188-192.
91. Фарманян А.Ж. Асимптотические решения краевых задач тонких пластин по несимметричной теории упругости. Диссертация кандидата физ.-мат. наук. Институт Механики НАН Армении. Ереван. 2001. 146с.
92. Хоффмек О. Об изгибе тонких упругих пластинок при наличии моментных напряжений // Прикл. Механика. Тр. Америк. Об-ва инж.-механиков, Серия Е. 1964. Т. 31. №4. С. 149-150.
93. Шкутин Л.И. Механика деформаций гибких тел. Новосибирск. «Наука. Издательство Сибирского отделения АН СССР. 1988. 128 с.
94. Эринген А.К. Теория микрополярной упругости // В кн. «Разрушение. Т. 2. М.: Мир. 1975. С. 646-751.
95. Ambartsumian S. A. Nontraditional theories of shells and plates (Retrospective). //Appl. Mech. Rev. 2002. V.55. N5. P. 35-44.
96. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. Paris: Hermann efils, 1909. 226p.
97. Eringen A. Cemal. Microcontinuum Field Theories. 1. Foundations and Solids. Springer. 1998. P. 325.
98. Friedrichs K. O. and Dressler R. F. A. Boundary Layer Theory for Elastic Plates // Comm. Pure and Appl. Math. 1961. Vol. N1. P. 1-33.
99. Gauthier R.D. Jahsman W.E. A Quest for Micropolar Elastic Constants. Part 2 // Arch. Mech., 1981. V. 33, N 5. P. 717-737.
100. Green A. E. On the linear theory of thin elastic shells // Proc. R. Soc. 1962. V. A266. № 1326. P. 143-160.
101. Green A. E., Naghdi P. M. Wainwright W. L. A General Theory of a Cosserat Surface // Archive for Rational Mechanics and Analisis. 1965. V. 20. P. 287-308.

102. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. Academic Press. 1998. 225p.
103. Nikoghosyan G. S., Sargsyan S. H. Asymptotic Method of Construction of General Theory of Micropolar Elastic Thin Shells // XXXII Summer School –Conference “Advanced Problems in Mechanics” June 24-July 1, 2004, St. Petersburg (Repino), Russia APM 2004 Book of Abstracts P. 79-80.
104. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt. 1986. P. 383.
105. Palmov V.A., Altenbach H. Über eine Cosseratsche Theorie für elastische Platten // Techn. Mech. 1982. H. 3. S. 3-9.
106. Reissner E. On Generalized Two-dimensional Plate Theory-1 // IJSS. 1969. V. 5. P. 525-532.
107. Sargsyan S.H. On Some Interior and Boundary Effects in Thin Plates Based on the Asymmetric Theory of Elasticity // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Vol. 16. / Theories of Plates and Shells. Critical Review and New Applications. Springer. 2004. P. 201-210.
108. Sargsyan S.H. Asymptotic theory of dynamic of micropolar thin plates // Abstracts. Mathematical Modeling of Dynamic behavior of Thin Elastic Structures. Euromech Colloquium 439. July 24-27. 2002. Saratov, Russia. P. 31-32.
109. Sargsyan S. H., Vardanyan S. A. Asymptotic Theory of Thermoelastic Micropolar Thin Plates. Proceedings of the 5th International Congress on Thermal Stresses and Related Topics. 8-11 June 2003, Blacksburg. V. A. Vol. 1. MA5-3-1 - MA5-3-4.
110. Ostoja-Starzewski M., Jasiuk J. Stress invariance in planar Cosserat elasticity // Proc. Roy. Soc. London. A. 1995. 451. P. 453-470.
111. Voigt W. Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Kristalle. – Abh. Ges. Wiss. Göttingen, 1887. Bd. 34.

Гюмрийский государственный
педагогический институт
им. М. Налбандяна

Поступила в редакцию
11.02.2005