

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ С
УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Багдасарян З.Р.

Ջ.Ռ.Բաղդասարյան

Սալի գլանային ծածան խնդիրը ընդլայնական սահեքրի հաշվառմամբ

Կենտրոնացված ուժերի ազդեցության տակ հեծանի, կան սալի ծածան խնդիրներում կարևոր նշանակություն ունի ընդլայնական սահեքրի հաշվառումը :

Համարումնայանի ճշգրտված տեսության հիման վրա դիտարկվում է սալի գլանային ծածան խնդիրը, երբ այն հարվածաբորեն ամրակցված է երկու հանդիպակաց եզրերով և երբ սալի մի եզրը ազատ է, իսկ մյուսը՝ կշռ ամրակցված: Երկու դեպքերում էլ սալի վրա ազդում են հավասարաչափ բաշխված նորմալ բեռնեք:

Սահմանային անցման շնորհիվ, երբ ընդհանուր բեռնավորվածությունը մնում է հաստատուն, իսկ բեռի կիրառման տիրույթը ձգտում է զրոյի՝ ստացվում է կենտրոնացված բեռի խնդրի լուծումը:

Հաշված է սալի ճկվածքի մեծագույն արժեքը և ցույց է տրված, որ ընդլայնական սահեքրի հաշվառումը բերում է ճկվածքի մեծացմանը:

Z.R.Baghdasaryan

On the Problem of Cylindrical Bending of Plate with the Regard of Transversal Shear

The accounting of transversal shear is of very important in the problems where plate or beam is bending under action of concentric forces.

In the paper the cylindrical bending of a plate is considered by means both of specified theory of high range- the theory of Ambartsunyan S. [1] and specified theory of first range- the theory of Raisner- Hanky- Mindlin [2].

The two boundary problems are considered, when the normal distributed transversal loads are applied.

Passing to the limit, when general load is stayed constant, and loading domain is vanished, the solution of for concentrated force is attained.

The plate maximal displacement is calculated and it is shown that transversal shear accounting brings to increase of displacement.

Учет поперечных сдвигов имеет важное значение в тех задачах, в которых пластинка или балка изгибается под действием сосредоточенных сил.

В настоящей работе на основе уточненной теории высокого порядка-теории Амбарцумяна (А) [1] и на основе уточненной теории первого порядка-теории Рейснера-Генки-Миндлина по варианту Васильева (В) [2] рассматривается цилиндрический изгиб изотропной пластинки в случае, когда пластинка шарнирно закреплена по двум противоположным краям и в случае, когда один край пластинки жестко зацеилен, а другой свободен. В обоих случаях на пластинку действуют нормально распределенные поперечные нагрузки.

С помощью предельного перехода, когда общая нагрузка остаётся постоянной, а область нагружения стремится к нулю, получается решение задачи сосредоточенной силы.

Вычислен максимальный прогиб пластинки и показан, что учет поперечных сдвигов приводит к увеличению прогиба.

1. Рассматривается пластинка толщиной $2h$ и длиной a , которая шарнирно закреплена по двум краям.

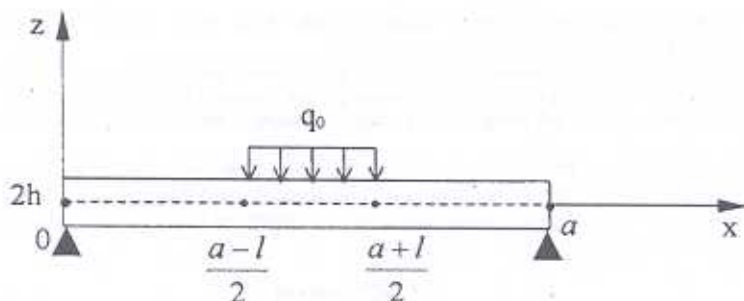
Прямоугольная система координат выбирается так, как показано на (фиг.1) и предполагается, что на поверхности пластинки по следующему закону:

$$q(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x < \frac{a-l}{2} \\ q_0 & \text{при } \frac{a-l}{2} \leq x \leq \frac{a+l}{2} \\ 0 & \text{при } \frac{a+l}{2} < x \leq a \end{cases} \quad (0 < l < a)$$

$$(q_0 = \text{const})$$

действует равномерно распределенная поперечная нагрузка (фиг. 1).

Считается, что перемещения точек пластинки не зависят от координаты y , то есть рассматривается одномерная задача.



Фиг. 1

Сначала поставленная задача решается по теории (А).

Перемещения точек пластинки имеют вид [3]

$$u_1 = u - z \frac{dw}{dx} + \frac{1}{G} g(z) \varphi, \quad u_3 = w \quad (1.1)$$

где

$$g(z) = z \left(1 - \frac{z^2}{3h^2} \right) \quad (1.2)$$

u — перемещение по направлению оси абсцисс, w — прогиб пластинки, G — модуль сдвига, а функции φ и w не зависят от координаты z .

Уравнения изгиба пластинки имеют вид

$$\frac{4h}{3} \frac{d\varphi}{dx} = -q(x)$$

$$D \frac{d^3 w}{dx^3} - \frac{16h^3}{15(1-\nu)} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{4h}{3} \varphi = 0 \quad (1.3)$$

где

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \quad (1.4)$$

Граничные условия шарнирного закрепления следующие [3]:

$$w=0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{4}{5G} \frac{d\varphi}{dx} = 0 \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=a \quad (1.5)$$

Решив систему (1.3) при граничных условиях (1.5), для прогиба пластинки получим

$$w(x) = \frac{1}{6D} \left[\int_0^x (x-t)^3 q(t) dt - \frac{x^3}{a} \int_0^a (a-t) q(t) dt - \right. \\ \left. - \frac{x}{a} \int_0^a (a-t)^3 q(t) dt + ax \int_0^a (a-t) q(t) dt - \right. \\ \left. - \frac{12\gamma h^2}{1-\nu} \int_0^x (x-t) q(t) dt + \frac{12\gamma h^2 x}{(1-\nu)a} \int_0^a (a-t) q(t) dt \right] \quad (1.6)$$

где $\gamma = 2/5$.

Если же эту задачу исследовать на основе теории (В), то в выражении прогиба (1.6) следует поставить $\gamma = 1/3$.

Если учесть, что прогиб пластинки достигает своего максимального значения при $x = a/2$, получится

$$\max w = \frac{q_0 a^3 l}{48D} \left[1 + \frac{l^3}{8a^3} - \frac{l^2}{2a^2} + \frac{24\gamma h^2}{(1-\nu)a^2} \left(1 - \frac{l}{2a} \right) \right] \quad (1.7)$$

При $l \rightarrow 0$ и $q_0 l \rightarrow P$ ($P = \text{const}$) получится случай сосредоточенной силы и из формулы (1.7) для максимального прогиба получится

$$\max w = \frac{Pa^3}{48D} \left[1 + \frac{24\gamma h^2}{(1-\nu)a^2} \right] \quad (1.8)$$

В случае $l = a$ $\max w$ имеет вид

$$\max w = \frac{5q_0 a^4}{384} \left[1 + \frac{96\gamma h^2}{5(1-\nu)a^2} \right] \quad (1.9)$$

что совпадает с решением, приведенным в [1] при $\gamma = 2/5$.

Если в формулах (1.7)–(1.9) пренебречь отношением h^2/a^2 , получатся соответствующие значения прогиба, полученные по теории Кирхгофа [4].

Вычислив значения напряжений σ_{11} при $x = \frac{a}{2}$ и $x = \frac{a-l}{2}$ ($z = h$), получается

$$\sigma_{11} \Big|_{x=\frac{a}{2}} = \frac{3q_0 a l}{8h^2} \left[1 - \frac{l}{2a} + \frac{8h^2}{15(1-\nu)al} \right] \quad (1.10)$$

$$\sigma_{11} \Big|_{x=\frac{a-l}{2}} = \frac{3q_0 a l}{8h^2} \left[1 - \frac{l}{a} + \frac{8h^2}{15(1-\nu)al} \right] \quad (1.11)$$

Из формул (1.10) и (1.11) видно, что в случае сосредоточенной силы ($l \rightarrow 0$ и $q_0 l \rightarrow P$) напряжение σ_{11} неограниченно возрастает, т.е.

напряжение σ_{11} существенно зависит от l , если учитывается поперечный сдвиг.

По теории (В) для напряжения σ_{11} имеется

$$\sigma_{11}\Big|_{x=\frac{a}{2}} = \frac{3q_0al}{8h^2} \left(1 - \frac{l}{2a}\right), \quad \sigma_{11}\Big|_{x=\frac{a-l}{2}} = \frac{3q_0al}{8h^2} \left(1 - \frac{l}{a}\right) \quad (1.12)$$

откуда видно, что по этой теории напряжение σ_{11} не зависит от поперечного сдвига.

Далее, по обеим теориям, как при $x = \frac{a}{2}$, так и при $x = \frac{a-l}{2}$ для момента M_1 получаются одинаковые выражения

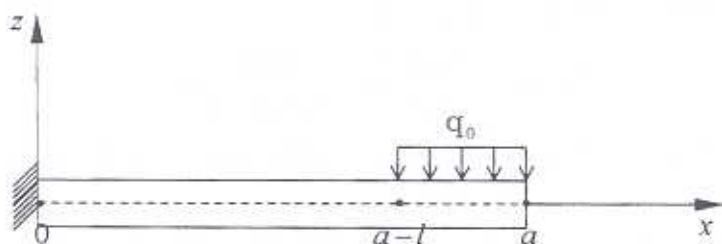
$$M_1\Big|_{x=\frac{a}{2}} = \frac{q_0al}{4} \left(1 - \frac{l}{2a}\right), \quad M_1\Big|_{x=\frac{a-l}{2}} = \frac{q_0al}{4} \left(1 - \frac{l}{a}\right) \quad (1.13)$$

Очевидно, момент M_1 не зависит от учета поперечного сдвига.

2. Теперь предполагается, что один край пластинки жестко защемлен, а другой свободен. Координатная система остается без изменения и предполагается, что на поверхности пластинки по следующему закону:

$$q(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x < a-l \\ q_0 & \text{при } a-l \leq x \leq a \end{cases}$$

действует равномерно распределенная поперечная нагрузка (фиг. 2)



Фиг. 2

Согласно постановке задачи нужно решить систему (1.3) при граничных условиях

$$w=0, \quad \frac{dw}{dx} - \frac{4}{5G} \varphi = 0 \quad \text{при } x=0$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{4}{5G} \frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{при } x=a \quad (2.1)$$

Сделав вышесказанное, для прогиба пластинки получим

$$w(x) = \frac{1}{6D} \left[\int_0^x (x-t)^3 q(t) dt - x^3 q_0 l + 3x^2 a q_0 l \left(1 - \frac{l}{2a} \right) + \frac{6\gamma h^2}{1-\gamma} \left(2x q_0 l - \int_0^x (x-t) q(t) dt \right) \right] \quad (2.2)$$

где, как и прежде, $\gamma = 2/5$ по теории (А) и $\gamma = 1/3$ по теории (В).

Если учесть, что в рассмотренном случае прогиб пластинки достигает своего максимума при $x=a$, то получится

$$\max w = \frac{q_0 a^3 l}{3D} \left[1 - \frac{3l}{4a} + \frac{l^3}{8a^3} + \frac{6\gamma h^2}{(1-\nu)a^2} \left(1 - \frac{l}{2a} \right) \right] \quad (2.3)$$

При $l \rightarrow 0$ и $q_0 l \rightarrow P$ ($P = \text{const}$) получится случай сосредоточенной силы и из формулы (2.3) для максимального прогиба получится

$$\max w = \frac{Pa^3}{3D} \left[1 + \frac{6\gamma h^2}{(1-\nu)a^2} \right] \quad (2.4)$$

В случае $l = a$ для максимального прогиба получится

$$\max w = \frac{q_0 a^4}{8D} \left[1 + \frac{8\gamma h^2}{(1-\nu)a^2} \right] \quad (2.5)$$

что также совпадает с результатом, приведенным в [1] при $\gamma = 2/5$.

Если в формулах (2.3)–(2.5) пренебречь отношением h^2/a^2 , получатся соответствующие значения прогиба, полученные по теории Кирхгофа [4].

Вычислив значения напряжений σ_{11} при $x=0$ и $x=a-l$ ($z=h$), получается

$$\sigma_{11}|_{x=0} = \frac{3q_0 a l}{2h^2} \left(1 - \frac{l}{2a} \right), \quad \sigma_{11}|_{x=a-l} = \frac{3q_0 l^2}{4h^2} \left[\frac{4h^2}{15(1-\nu)l^2} - 1 \right] \quad (2.6)$$

Здесь, как и выше, если принять $\gamma = 1/3$, то получим значение прогиба по теории (В).

По теории (В) для напряжения σ_{11} получается

$$\sigma_{11}|_{x=0} = \frac{3q_0 a l}{2h^2} \left(1 - \frac{l}{2a} \right), \quad \sigma_{11}|_{x=a-l} = \frac{3q_0 l^2}{4h^2} \quad (2.7)$$

Далее, по теориям (А) и (В) для момента M_1 при $x=0$ и $x=a-l$ получается

$$M_1|_{x=0} = -\frac{q_0 l}{2} (2a-l), \quad M_1|_{x=a-l} = -\frac{q_0 l^2}{2} \quad (2.8)$$

Как видно, и в рассмотренном случае момент M_1 не зависит от учета поперечного сдвига.

По обеим теориям для перерезывающей силы на краю защемления пластинки получаются одинаковые выражения

$$N_1|_{x=0} = q_0 l \quad (2.9)$$

3. Рассматривается трансверсально-изотропная пластинка толщиной $2h$ и длиной a , которая шарнирно закреплена по двум краям.

Нагрузив пластинку, как и в первой задаче (фиг.1), для перемещений ее точек по теории (А) будем иметь

$$u_1 = u - z \frac{dw}{dx} + \frac{1}{G'} g(z) \varphi, \quad u_3 = w \quad (3.1)$$

где G' – модуль сдвига для плоскостей, нормальных к плоскости изотропии.

В результате, для искомым величин получаются те же формулы, что в пункте 1, заменив в этих формулах $\gamma = 2G/5G'$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
2. Васильев В.В. Классическая теория пластин. История и современный анализ. //Изв. РАН. МТТ. 1998. N3. С.110-115.
3. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. /В сб.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел». Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2002. С. 67-88.
4. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1962. 456с.

Ереванский Государственный Университет

Поступила в редакцию

19.11.2004