ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №2, 2005 Механика

УДК 539.3

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Агаловян Л. А., Азатян Г. Л.

Լ. Ա. Աղալովյան, Գ. Լ. Ազատյան

Օրթոտրոպ սալերի սեփական տատանումները մածուցիկ դիմադրության առկայության դեպքում

Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է օրթոտրոպ սալի սեփական տատանումների վերաբերյալ առաձգականության տեսության եռաչափ դինամիկական խնդիրը, երբ սալում առկա է մածուցիկ դիմադրություն: Սալի դիմային մակերևույթներից մեկը կոշտ ամրակցված է, իսկ մյուսը՝ ազատ է: Որոշված են լարումների թենզորի և տեղափոխության վեկտորի բաղադրիչների ասիմպտոտիկաները, սեփական տատանումների հաճախությունները ու տատանման ձևերը: Ապացուցված է, որ օրթոտրոպ սալում կարող են առաջանալ երեք տիպի սեփական տատանումներ՝ երկուսը սահքային և մեկը երկայնական: Որոշված են տատանումների՝ մածուցիկ դիմադրությունով պայմանավորված մարման բնութագրիչները:

L.A. Aghalovyan, G.L. Azatyan

The free vibrations of orthotropic plates at the presence of viscous resistance

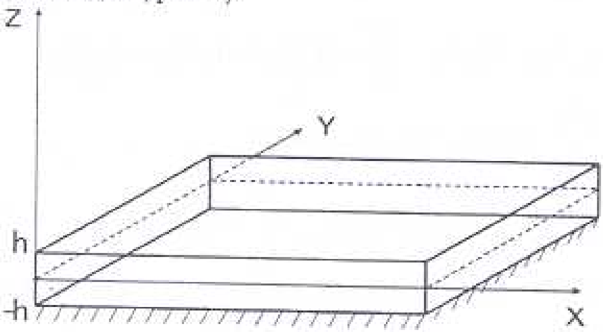
By means of asymptotic method a three-dimensional dynamic problem is solved for the elasticity theory related to free vibrations of orthotropic plates at presence of viscous resistance. The bottom side f a plate is rigidly fastened, and top one is free. Asymptotics for the components of the tensor of stress and vector of displacement are found. The kinds of free vibrations are established. Is proved, that in the orthotropic plate there can be free vibrations of three types: two shear and one longitudinal ones. The values of frequencies and form of free vibrations, and also parameters of vibrations damping, caused by viscous resistance are determined.

Асимптотическим методом решена трехмерная динамическая задача теории упругости о собственных колебаниях ортотропных пластин при наличии вязкого сопротивления. Нижняя грань пластинки жестко защемлена, а верхняя—свободна. Найдены асимптотики для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения. Установлены виды собственных колебаний. Доказано, что в ортотропной пластине могут возникнуть собственные колебания трех типов: два сдвиговых и одно продольное. Определены значения частот и формы собственных колебаний, а также обусловленные вязким сопротивлением параметры затухания колебаний.

1. Для определения и анализа напряженно-деформированных состояний тонких тел (балки, стержни, пластины, оболочки) в последние десятилетия широко используется асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Статические краевые задачи изотропных и анизотропных тонких тел асимптотическим методом рассмотрены в [1,2]. Метод оказался особенно эффективным для решения неклассических с точки зрения теории пластин и оболочек краевых задач. Была найдена принципиально новая асимптотика для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения, которая позволила найти решения новых классов статических и динамических краевых задач [2-8]. Некоторые классы задач о собственных и вынужденных колебаниях полос-балок и пластин рассмотрены в [9-11]. Обзор работ по использованию асимптотического метода для определения напряженно-деформированных состояний тонких тел при статических и динамических воздействиях содержится в [12].

В работе рассматривается задача о собственных колебаниях ортотропной пластинки $D=\{(x,y,z):\ (x,y)\in D_0,\ |z|\le h,\ h<<l\}$ при наличии вязкого сопротивления.

Предполагается, что нижняя грань пластинки жестко защемлена, а верхняя свободна (фиг. 1).



Фиг. 1.

D_0 – срединная поверхность пластинки, а l – ее характерный тангенциальный размер.

Имеем следующие граничные условия:

$$\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=\sigma_{zz}=0 \text{ при } z = h \tag{1.1}$$

$$u=v=w=0 \text{ при } z = -h \tag{1.2}$$

Условия на боковой поверхности конкретизировать не будем, поскольку, как показано в [13], они для этого класса задач непосредственно не влияют на значения частот собственных колебаний. Ими обусловлены собственные колебания в зоне пограничного слоя.

Требуется определить частоты собственных колебаний пластинки и собственные функции, соответствующие граничным условиям (1.1),(1.2). Для этого необходимо найти ненулевые решения системы динамических уравнений пространственной задачи теории упругости для ортотропного тела:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}-k_1\frac{\partial u}{\partial t}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ \ (x,y,z;u,v,w) \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a_{11}\sigma_{xx}+a_{12}\sigma_{yy}+a_{13}\sigma_{zz},\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=a_{66}\sigma_{xy}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=a_{12}\sigma_{xx}+a_{22}\sigma_{yy}+a_{23}\sigma_{zz},\quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=a_{55}\sigma_{xz}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=a_{13}\sigma_{xx}+a_{23}\sigma_{yy}+a_{33}\sigma_{zz},\quad \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=a_{44}\sigma_{yz}$$

при граничных условиях (1.1),(1.2), где $\vec{R}=-k_1\vec{V}$ – вязкое сопротивление.

Решение системы уравнений (1.3) будем искать в виде:

$$\sigma_{\alpha\beta}(x,y,z,t)=\sigma_{jk}(x,y,z)\exp(\omega t)$$

$$(u,v,w)=(\bar{u},\bar{v},\bar{w})\exp(\omega t)\quad \alpha,\beta=x,y,z;\ \ j,k=1,2,3 \tag{1.4}$$

где ω — искомая частота собственных колебаний.

Подставив (1.4) в уравнения (1.3), получим:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial z}-k_1\bar{u}\omega-\rho\omega^2\bar{u}=0 \quad (\bar{u},\bar{v},\bar{w};x,y,z;1,2,3)$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}=a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22}+a_{13}\sigma_{33},\quad \frac{\partial\bar{v}}{\partial x}=a_{12}\sigma_{11}+a_{22}\sigma_{22}+a_{13}\sigma_{33}$$

$$\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}=a_{13}\sigma_{11}+a_{23}\sigma_{22}+a_{33}\sigma_{33}$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}=a_{66}\sigma_{12},\quad \frac{\partial\bar{w}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}=a_{55}\sigma_{13},\quad \frac{\partial\bar{w}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}=a_{44}\sigma_{23} \tag{1.5}$$

Перейдем к безразмерным координатам и безразмерным компонентам вектора перемещения:

$$\begin{aligned}&\xi=x/l,\qquad \eta=y/l,\qquad \zeta=z/h\\&U=\bar{u}/l,\quad V=\bar{v}/l,\quad W=\bar{w}/l\end{aligned} \tag{1.6}$$

В результате получим следующую сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon=\dfrac{h}{l}$ систему:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\zeta}-2K\varepsilon^{-2}\omega_* U-\varepsilon^{-2}\omega_*^2 U=0 \quad (U,V,W;\xi,\eta,\zeta;1,2,3)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22}+a_{13}\sigma_{33}, &&\frac{\partial U}{\partial\eta}+\frac{\partial V}{\partial\xi}=a_{66}\sigma_{12}\\&\frac{\partial V}{\partial\eta}=a_{12}\sigma_{11}+a_{22}\sigma_{22}+a_{23}\sigma_{33}, &&\frac{\partial W}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta}=a_{55}\sigma_{13}\\&\varepsilon^{-1}\frac{\partial W}{\partial\zeta}=a_{13}\sigma_{11}+a_{23}\sigma_{22}+a_{33}\sigma_{33}, &&\frac{\partial W}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta}=a_{44}\sigma_{23}\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\omega_*^2=\rho h^2\omega^2;\quad 2K=\frac{k_1 h}{\sqrt{\rho}}$$

Эту сингулярно возмущенную систему будем решать асимптотическим методом. Решение будем искать в виде:

$$\begin{aligned}&\sigma_{jk}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{jk}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\\&(U,V,W)=\varepsilon^{s}(U^{(s)},V^{(s)},W^{(s)}),\\&\omega_*=\varepsilon^{s}\omega_{*s}, \qquad\qquad s=\overline{0,S}:\end{aligned} \tag{1.8}$$

где обозначение $s=\overline{0,S}$ означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование в пределах $[0,\ S]$.

Подставив (1.8) в (1.7), применив правило Коши умножения рядов, для определения коэффициентов разложения (1.8) получим систему:

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{13}^{(s)}}{\partial\zeta}-2K\omega_{*m}U^{(s-m)}-C_mU^{(s-m)}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{23}^{(s)}}{\partial\zeta}-2K\omega_{*m}V^{(s-m)}-C_mV^{(s-m)}=0 \qquad m=\overline{0,s}$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{33}^{(s)}}{\partial\zeta}-2K\omega_{*m}W^{(s-m)}-C_mW^{(s-m)}=0$$

$$C_m=\omega_{*m-n}\omega_n,\quad n=\overline{0,m}$$

$$\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11}^{(s)}+a_{12}\sigma_{22}^{(s)}+a_{13}\sigma_{33}^{(s)},\quad \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta}=a_{12}\sigma_{11}^{(s)}+a_{22}\sigma_{22}^{(s)}+a_{23}\sigma_{33}^{(s)}$$

$$\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{13}\sigma_{11}^{(s)}+a_{23}\sigma_{22}^{(s)}+a_{33}\sigma_{33}^{(s)} \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}=a_{66}\sigma_{12}^{(s)},\quad \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{55}\sigma_{13}^{(s)},\quad \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{44}\sigma_{23}^{(s)}$$

$$Q^{(s)}\equiv 0 \text{ при } s<0.$$

В (1.9) все величины можно выразить через $U^{(s)},V^{(s)},W^{(s)}$ по формулам:

$$\sigma_{11}^{(s)}=-A_{23}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}+A_{22}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}-A_{12}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta}$$

$$\sigma_{22}^{(s)}=-A_{13}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}-A_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}+A_{33}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta}$$

$$\sigma_{33}^{(s)}=A_{11}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}-A_{23}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}-A_{13}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta} \tag{1.10}$$

$$\sigma_{12}^{(s)}=\frac{1}{a_{66}}\left[\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right],\qquad \sigma_{13}^{(s)}=\frac{1}{a_{55}}\left[\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\xi}\right]$$

$$\sigma_{23}^{(s)}=\frac{1}{a_{44}}\left[\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

где

$$A_{11}=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{\Delta},\qquad A_{22}=\frac{a_{22}a_{33}-a_{23}^2}{\Delta},\qquad A_{33}=\frac{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}{\Delta}$$

$$A_{12}=\frac{a_{33}a_{12}-a_{13}a_{23}}{\Delta},\quad A_{13}=\frac{a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}}{\Delta},\quad A_{23}=\frac{a_{22}a_{13}-a_{12}a_{23}}{\Delta} \tag{1.11}$$

$$\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{12}a_{13}a_{23}-a_{22}a_{13}^2-a_{11}a_{23}^2-a_{33}a_{12}^2$$

Для определения же $U^{(s)},V^{(s)},W^{(s)}$, подставив значения $\sigma_{jk}^{(s)}$ в первые три уравнения (1.9), получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2} - a_{55}(2K\omega_{*m} + C_m)U^{(s-m)} = R_U^{(s)},$$

$$\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial\zeta^2} - a_{44}(2K\omega_{*m} + C_m)V^{(s-m)} = R_V^{(s)}, \qquad m = \overline{0,s}$$

$$A_{11}\frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial\zeta^2} - (2K\omega_{*m} + C_m)W^{(s-m)} = R_W^{(s)}, \tag{1.12}$$

где

$$R_U^{(s)} = -\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta} - a_{55}\left[\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$$R_V^{(s)} = -\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta} - a_{44}\left[\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right] \tag{1.13}$$

$$R_W^{(s)} = A_{23}\frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta} + A_{13}\frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta} - \left[\frac{\partial\sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

Очевидно, что $R_U^{(0)} = R_V^{(0)} = R_W^{(0)} = 0$.

2. Чтобы определить значения частот, рассмотрим уравнения (1.12) при $s = 0$:

$$\frac{\partial^2 U^{(0)}}{\partial\zeta^2} - a_{55}(2K\omega_{*0} + \omega_{*0}^2)U^{(0)} = 0,\ \ \frac{\partial^2 V^{(0)}}{\partial\zeta^2} - a_{44}(2K\omega_{*0} + \omega_{*0}^2)V^{(0)} = 0$$

$$A_{11}\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial\zeta^2} - (2K\omega_{*0} + \omega_{*0}^2)W^{(0)} = 0 \tag{2.1}$$

Решениями уравнений (2.1) являются:

$$U^{(0)} = A_u^{(0)}(\xi,\eta)\,\mathrm{ch}\sqrt{a_{55}(2K\omega_{*0} + \omega_{*0}^2)}\,\zeta + B_u^{(0)}(\xi,\eta)\,\mathrm{sh}\sqrt{a_{55}(2K\omega_{*0} + \omega_{*0}^2)}\,\zeta \tag{2.2}$$

$$V^{(0)} = A_v^{(0)}(\xi,\eta)\,\mathrm{ch}\sqrt{a_{44}(2K\omega_{*0} + \omega_{*0}^2)}\,\zeta + B_v^{(0)}(\xi,\eta)\,\mathrm{sh}\sqrt{a_{44}(2K\omega_{*0} + \omega_{*0}^2)}\,\zeta \tag{2.3}$$

$$W^{(0)} = A_w^{(0)}(\xi,\eta)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{2K\omega_{*0} + \omega_{*0}^2}{A_{11}}}\,\zeta + B_w^{(0)}(\xi,\eta)\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{2K\omega_{*0} + \omega_{*0}^2}{A_{11}}}\,\zeta \tag{2.4}$$

Используя (2.2), удовлетворив условиям (1.1),(1.2) относительно σ_{xz}, u и учитывая, что $\sigma_{13}^{(0)} = \dfrac{1}{a_{55}}\dfrac{\partial U^{(0)}}{\partial\zeta}$, получим систему однородных алгебраических уравнений относительно функций $A_U^{(0)}$, $B_U^{(0)}$. Из условия существования ненулевого решения этой системы вытекает

$$\mathrm{ch}\,2\sqrt{a_{55}(2K\omega_{*0} + \omega_{*0}^2)} = 0 \ \text{ или } \sqrt{a_{55}(2K\omega_{*0} + \omega_{*0}^2)} = \frac{\pi}{4}(2n+1)i\ ,\ n \in N \tag{2.5}$$

откуда следует: $\omega_{*0n} = -K \pm \sqrt{K^2 - \dfrac{\pi^2}{16a_{55}}(2n+1)^2}\ ,\ n \in N$ (2.6)

Рассмотрим следующие возможные варианты:

I. $K > \frac{\pi}{4\sqrt{a_{55}}}(2n+1)$

имеем

$$\text{а)}\ \omega_{0n1} = -\frac{K}{h\sqrt{\rho}}\theta_1, \quad \text{где } 0<\theta_1<1 \tag{2.7}$$

$$\text{б)}\ \omega_{0n2} = -\frac{K}{h\sqrt{\rho}}\theta_2, \quad \text{где } 1<\theta_2<2$$

Из (1.4), (2.7) следует, что собственные колебания затухают без явного колебания, как

$$\exp(-\frac{K}{h\sqrt{\rho}}\theta_1 t), \qquad \exp(-\frac{K}{h\sqrt{\rho}}\theta_2 t)$$

II. $K < \frac{\pi}{4\sqrt{a_{55}}}(2n+1)$

будем иметь

$$\omega_{*0n} = K\left[-1 \pm i\sqrt{\left(\frac{\pi}{4\sqrt{a_{55}}K}(2n+1)\right)^2 - 1}\right] \tag{2.8}$$

Затухание собственных колебаний будет колебательным.

Учитывая, что $\frac{1}{a_{55}} = G_{13}$ достаточно большое число, на практике вариант II будет встречаться часто. Поэтому этот случай рассмотрим более подробно.

Итак, определили некоторый класс значений частот собственных колебаний пластинки, которые будем обозначать индексом " I ". С учетом (1.7) имеем:

$$\omega^I_{*0n} = \frac{K}{h\sqrt{\rho}}\left[-1 \pm i\sqrt{\left(\frac{\pi}{4\sqrt{a_{55}}K}(2n+1)\right)^2 - 1}\right], \ n \in N \tag{2.9}$$

Из (2.2), (2.5) (2.6) имеем

$$A^{(0)}_u = B^{(0)}_u \operatorname{th}\sqrt{a_{55}(2K\omega_{*0} + \omega^2_{*0})} \tag{2.10}$$

Подставив (2.10) в (2.2), получим

$$U^{(0)}_{uI} = B^{(0)}_{uIn}\left(\operatorname{th}\sqrt{a_{55}(2K\omega^I_{*0n} + \omega^{I^2}_{*0n})}\operatorname{ch}\sqrt{a_{55}(2K\omega^I_{*0n} + \omega^{I^2}_{*0n})}\zeta + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sh}\sqrt{a_{55}(2K\omega^I_{*0n} + \omega^{I^2}_{*0n})}\zeta\right) = B^{(0)}_{un}(\xi,\eta)\operatorname{sh}\left[(1+\zeta)\sqrt{a_{55}(2K\omega^I_{*0n} + \omega^{I^2}_{*0n})}\right]$$

или с учетом (2.5)

$$U^{(0)}_{uI} = D^{(0)}_{un}(\xi,\eta)\sin(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1), \text{ где } D^{(0)}_{un} = iB^{(0)}_{un}(\xi,\eta) \tag{2.11}$$

Точно так же удовлетворив остальным условиям (1.1),(1.2), получим новые значения частот: ω^{II}_{*0n}, ω^{III}_{*0n}.

Если $\omega_{*0} = \omega^{I}_{*0n}$, то оно не будет удовлетворять условиям разрешимости существования ненулевых решений систем алгебраических уравнений, соответствующих (1.1),(1.2),(2.3) и (2.4), откуда следует, что эти системы будут иметь нулевые решения:

$$V^{(0)}_{nI} = W^{(0)}_{nI} = 0 \tag{2.12}$$

Точно так же, если $\omega_{*0} = \omega^{II}_{*0n}$, то:

$$U^{(0)}_{nII} = W^{(0)}_{nII} = 0 \tag{2.13}$$

А при $\omega_{*0} = \omega^{III}_{*0n}$:

$$U^{(0)}_{nIII} = V^{(0)}_{nIII} = 0 \tag{2.14}$$

Итак, мы имеем три типа собственных колебаний:

1. Колебания с частотами $\omega^{I}_{0n} = \dfrac{K}{h\sqrt{\rho}}\left[-1 \pm i\sqrt{\left(\dfrac{\pi}{4\sqrt{a_{55}}K}(2n+1)\right)^2 - 1}\right]$

и следующими собственными функциями и компонентами тензора напряжений:

$$U^{(0)}_{nI} = D^{(0)}_{un}(\xi,\eta)\sin(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)$$

$$V^{(0)}_{nI} = 0,\quad W^{(0)}_{nI} = 0,\quad \sigma^{(0)}_{11\,I} = 0,\quad \sigma^{(0)}_{22\,I} = 0,\quad \sigma^{(0)}_{33\,I} = 0,\quad \sigma^{(0)}_{12\,I} = 0,\quad \sigma^{(0)}_{23\,I} = 0$$

$$\sigma^{(0)}_{13\,I} = D^{(0)}_{un}(\xi,\eta)\frac{\pi}{4a_{55}}(2n+1)\cos[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)] \tag{2.15}$$

2. Колебания с частотами $\omega^{II}_{0n} = \dfrac{K}{h\sqrt{\rho}}\left[-1 \pm i\sqrt{\left(\dfrac{\pi}{4\sqrt{a_{44}}K}(2n+1)\right)^2 - 1}\right]$

и следующими собственными функциями и компонентами тензора напряжений:

$$V^{(0)}_{nII} = D^{(0)}_{vn}(\xi,\eta)\sin[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)]$$

$$U^{(0)}_{nII} = 0,\quad W^{(0)}_{nII} = 0,\quad \sigma^{(0)}_{11\,II} = 0,\quad \sigma^{(0)}_{22\,II} = 0,\quad \sigma^{(0)}_{33\,II} = 0,\quad \sigma^{(0)}_{12\,II} = 0,\quad \sigma^{(0)}_{13\,II} = 0$$

$$\sigma^{(0)}_{23\,II} = D^{(0)}_{vn}(\xi,\eta)\frac{\pi}{4a_{44}}(2n+1)\cos[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)] \tag{2.16}$$

3. Колебания с частотами $\omega_{0n}^{III} = \dfrac{K}{h\sqrt{\rho}}\left[-1 \pm i\sqrt{\left(\dfrac{\pi\sqrt{A_{11}}}{4K}(2n+1)\right)^2 - 1}\right]$ и

следующими собственными функциями и компонентами тензора напряжений:

$$W_{n\text{III}}^{(0)} = D_{wn}^{(0)}(\xi,\eta)\sin[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)], \quad U_{n\text{III}}^{(0)} = 0, \quad V_{n\text{III}}^{(0)} = 0$$

$$\sigma_{11\,\text{III}}^{(0)} = -D_{wn}^{(0)}(\xi,\eta)A_{23}\frac{\pi}{4}(2n+1)\cos[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)]$$

$$\sigma_{22\,\text{III}}^{(0)} = -D_{wn}^{(0)}(\xi,\eta)A_{13}\frac{\pi}{4}(2n+1)\cos[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)] \tag{2.17}$$

$$\sigma_{33\,\text{III}}^{(0)} = D_{wn}^{(0)}(\xi,\eta)A_{11}\frac{\pi}{4}(2n+1)\cos[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)]$$

$$\sigma_{12\,\text{III}}^{(0)} = 0, \qquad \sigma_{13\,\text{III}}^{(0)} = 0, \qquad \sigma_{23\,\text{III}}^{(0)} = 0$$

3.О **приближениях s ≥ 1.** Рассмотрим уравнения (1.12) при s = 1.

Сперва рассмотрим первое уравнение (1.12) при $\omega_{*0n} = \omega_{*0n}^{I}$:

$$\frac{\partial^2 U_{n1}^{(1)}}{\partial\zeta^2} - a_{55}(2K\omega_{*0n}^{I} + \omega_{*0n}^{I^2})U_{n1}^{(1)} - 2a_{55}\left(K\omega_{*1n}^{I} + \omega_{*0n}^{I}\omega_{*1n}^{I}\right)U_{n1}^{(0)} = R_{Un1}^{(1)} \tag{3.1}$$

Решение $U_{n1}^{(1)}$ представим в виде ряда по собственным функциям $U_{n1}^{(0)}$ нулевого приближения, которые составляют ортогональную систему на интервале $-1 \le \zeta \le 1$

$$U_{n1}^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm}U_{m1}^{(0)} \tag{3.2}$$

Это решение удовлетворяет граничным условиям (1.1), (1.2), соответствующим u и σ_{xz}. Подставив (3.2) в (3.1), с учетом (2.1) получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{55}b_{nm}\left[2K(\omega_{*0m}^{I} - \omega_{*0n}^{I}) + \omega_{*0m}^{I^2} - \omega_{*0n}^{I^2}\right]U_{m1}^{(0)} = 2a_{55}\left(K\omega_{*1n}^{I} + \omega_{*0n}^{I}\omega_{*1n}^{I}\right)U_{n1}^{(0)} + R_{Un1}^{(1)} \tag{3.3}$$

Умножив (3.3) на $U_{k1}^{(0)}$ и проинтегрировав по ζ на отрезке [-1, 1], учитывая ортогональность функций $\left\{U_{n1}^{(0)}\right\}$, получим:

$$a_{55}b_{nk}\left[2K(\omega_{*0k}^{I} - \omega_{*0n}^{I}) + \omega_{*0k}^{I^2} - \omega_{*0n}^{I^2}\right] = 2a_{55}\left(K\omega_{*1n}^{I} + \omega_{*0n}^{I}\omega_{*1n}^{I}\right)\delta_{nk} + R_{Unk1}^{(1)} \tag{3.4}$$

где δ_{nk} — символ Кронекера, а

$$R_{Unk1}^{(1)} = \frac{1}{\left(D_{Uk}^{(0)}\right)^2}\int_{-1}^{1} R_{Un1}^{(1)}U_{k1}^{(0)}d\zeta \tag{3.5}$$

При $k = n$ из (3.4) будем иметь:

$$\omega^{I}_{*1n} = -\frac{R^{(1)}_{Unn1}}{2a_{55}\left(K+\omega^{I}_{*0n}\right)} \tag{3.6}$$

а при $k \neq n$:

$$b_{nk} = \frac{R^{(1)}_{Unk1}}{a_{55}\left[2K(\omega^{I}_{*0k}-\omega^{I}_{*0n})+\omega^{I^2}_{*0k}-\omega^{I^2}_{*0n}\right]} \tag{3.7}$$

Из(1.10), (1.13) и (2.12) следует:

$$R^{(1)}_{U1} = 0 \tag{3.8}$$

Следовательно,

$$b_{nk} = 0 \qquad\qquad k \neq n \tag{3.9}$$

$$\omega^{I}_{*1n} = 0 \qquad\qquad n \in N \tag{3.10}$$

Для определения b_{m} нормируем U_{n} [14,15]

$$\frac{1}{\left\|U^{(0)}_{n1}\right\|^2}\int_{-1}^{1}[U^{(0)}_{n1}+\varepsilon U^{(1)}_{n1}]^2 d\zeta = 1,\ \text{где}\ \left\|U^{(0)}_{n1}\right\|^2 = \int_{-1}^{1}\left[U^{(0)}_{n1}\right]^2 d\zeta \tag{3.11}$$

откуда получим:

$$\int_{-1}^{1} U^{(0)}_{n1} U^{(1)}_{n1} d\zeta = 0 \tag{3.12}$$

Подставив $U^{(1)}_{n}$ в (3.12), используя (3.2), будем иметь:

$$b_{nn} = 0 \tag{3.13}$$

Итак, имеем:

$$U^{(1)}_{n1} = 0,\ \omega^{I}_{*1n} = 0, \qquad n \in N \tag{3.14}$$

Теперь рассмотрим приближение s = 2. Первое уравнение (1.12) при $\omega_{*0n} = \omega^{I}_{*0n}$ имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U^{(2)}_{n1}}{\partial\zeta^2} - a_{55}(2K\omega^{I}_{*0n}+\omega^{I^2}_{*0n})U^{(2)}_{n1} - 2a_{55}\left(K\omega^{I}_{*2n}+\omega^{I}_{*0n}\omega^{I}_{*2n}\right)U^{(0)}_{n1} = R^{(2)}_{Un1} \tag{3.15}$$

Решение снова ищем в виде:

$$U^{(2)}_{n1} = \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} U^{(0)}_{m1} \tag{3.16}$$

Повторив те же действия, получим:

$$a_{55}c_{nk}\left[2K(\omega^{I}_{*0k}-\omega^{I}_{*0n})+\omega^{I^2}_{*0k}-\omega^{I^2}_{*0n}\right] = 2a_{55}\left(K\omega^{I}_{*2n}+\omega^{I}_{*0n}\omega^{I}_{*2n}\right)\delta_{nk} + R^{(2)}_{Unk1} \tag{3.17}$$

где

$$R^{(2)}_{Unk1} = \frac{1}{\left(D^{(0)}_{U}\right)^2}\int_{-1}^{1} R^{(2)}_{Un1} U^{(0)}_{k1} d\zeta \tag{3.18}$$

Из (3.17) следует:

$$\omega^{I}_{*2n} = -\frac{R^{(2)}_{Unn1}}{2a_{55}\left(K+\omega^{I}_{*0n}\right)} \quad \text{при} \quad k = n \tag{3.19}$$

$$c_{nk} = \frac{R^{(2)}_{Unk1}}{a_{55}\left[2K(\omega'_{*0k} - \omega'_{*0n}) + \omega'^2_{*0k} - \omega'^2_{*0n}\right]} \quad \text{при} \quad k \neq n \tag{3.20}$$

Из (1.13) имеем

$$R^{(2)}_{Un1} = -\frac{\partial^2 W^{(1)}_1}{\partial\xi\partial\zeta} - a_{55}\left[\frac{\partial\sigma^{(1)}_{111}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma^{(1)}_{121}}{\partial\eta}\right] \tag{3.21}$$

$W^{(1)}_1$ определяется из третьего уравнения (1.12) $\sigma^{(1)}_{111}$, $\sigma^{(1)}_{121}$ определяются из (1.10) при $s = 1$ и $\omega_{*0n} = \omega^{\mathrm{I}}_{*0n}$, удовлетворив соответствующим граничным условиям (1.1), (1.2) относительно σ_{zz}, W. Определитель вытекающей алгебраической системы будет отличным от нуля, следовательно, $W^{(1)}_1$ определится однозначно.

В итоге по формулам (3.19), (3.20) определятся $\omega^{\mathrm{I}}_{*2n}$ и c_{nk}. Для определения c_{nn} поступим так же, как в случае b_{nn}, в результате получим:

$$c_{nn} = 0 \tag{3.22}$$

Значения $U^{(2)}_{n1}$ и $\omega^{\mathrm{I}}_{*2n}$ отличны от нуля.

Следовательно, имеем:

$$\begin{cases} \omega^{\mathrm{I}}_{*n} = \omega^{\mathrm{I}}_{*0n} + \varepsilon^2\omega^{\mathrm{I}}_{*2n} \\ U_{n1} = U^{(0)}_{n1} + \varepsilon^2 U^{(2)}_{n1} \end{cases} \tag{3.23}$$

Аналогичным образом рассматриваются случаи $\omega_{*0n} = \omega^{\mathrm{II}}_{*0n}$ и $\omega_{*0n} = \omega^{\mathrm{III}}_{*0n}$. В итоге будем иметь:

$$V^{(1)}_{n\mathrm{II}} = 0,\ \omega^{\mathrm{II}}_{*1n} = 0,\quad V^{(2)}_{n\mathrm{II}} \neq 0,\ \omega^{\mathrm{II}}_{*2n} \neq 0 \tag{3.24}$$

$$W^{(1)}_{n\mathrm{III}} = 0,\ \omega^{\mathrm{III}}_{*1n} = 0,\quad W^{(2)}_{n\mathrm{III}} \neq 0,\ \omega^{\mathrm{III}}_{*2n} \neq 0 \tag{3.25}$$

Из полученных результатов следует, что начальное приближение дает достаточно точные значения для частот и форм собственных колебаний. Поэтому, значения частот для исходного приближения назовем главными и в практических приложениях можно ограничиться этими значениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510 с.
2. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука.Физматлит. 1997. 414 с.
3. Агаловян Л. А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела. // Межвуз. сб.: Механика. Изд-во ЕГУ. 1982. Вып. 2. С. 7-12.
4. Агаловян Л А. К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы

Винклера. // В сб.: XIII Всесоюзн. конф. по теории пластин и оболочек. Часть первая. Таллин. 1983 С. 13-18.
5. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией// В сб.: Тр. IV симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука. 1984. С. 105-110.
6. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении неклассических краевых задач для двухслойных анизотропных термоупругих оболочек // Изв. АН Арм ССР. Механика. 1989. Т. 42. №3. С. 28-36.
7. Агаловян М. Л. Об одной задаче на собственные значения, возникающей в сейсмологии. //Докл. НАН Армении. 1996. Т. 96. №2-4. С. 23-24.
8. Агаловян Л. А., Сарксян Л. С. О собственных колебаниях двухслойной ортотропной полосы //Тр. XVIII международной конференции по теории оболочек и пластин. Р. Ф. Саратов 1997. Том 1. С. 30-38.
9. Агаловян Л. А., Халатян Л. М. Асимптотика вынужденных колебаний ортотропной полосы при смешанных граничных условиях // Докл. НАН Армении. 1999. Т. 99. №4. С.315-321.
10. Агаловян Л. А., Агаловян М. Л. Неклассические краевые задачи о собственных и вынужденных колебаниях анизотропных пластин. // Сб. докладов XIX международной конференции по теории оболочек и пластин. Нижний Новгород. 1999. С.16-20.
11. Агаловян Л. А., Агаловян М. Л. К определению частот и форм собственных колебаний ортотропной полосы. // Докл. НАН РА. 2003. Т. 103. №4. С. 296-301.
12. Агаловян Л. А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел// Международный научный журнал. Прикладная механика. 2002. Т. 38. № 7. С. 3-24.
13. Агаловян М. Л. О решении пограничного слоя в задаче на собственные колебания полосы // В сб. конф.: Современные вопросы оптимального управления колебания и устойчивости систем. Ереван. Изд-во ЕГУ. 1997. С. 132-135.
14. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука. 1981. 398 с.
15. Найфэ А. Х. Методы возмущений. М.: Изд-во Мир. 1976. 455 с.

Институт механики,
НАН Армении

Поступила в редакцию
8.11.2004