

УДК 539.3

ХАРАКТЕР НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ВБЛИЗИ  
УГЛОВОЙ ТОЧКИ ЛИНИИ РАЗДЕЛА ОБЛАСТЕЙ ПОПЕРЕЧ-  
НОГО СЕЧЕНИЯ СОСТАВНОГО ПРЯМОЛИНЕЙНО-  
АНИЗОТРОПНОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО ТЕЛА

Տարցյան Ա.Մ.

Ա.Մ.Սարգսյան

Լարվածային վիճակի շնույրը ուղղաձային-անիզոտրոպ պրիզմաձև մարմնի ընդլայնական կտրվածքի տիրույթումների բաժանման գծի անկյունային կետի շրջակայքում

Ուսումնասիրված է լարումների վարքը երկայնական տանիքի պայանմաներում գտնվող բաղադրյալ ուղղաձային-անիզոտրոպ պրիզմաձև մարմնի միացման մակերևույթի անկյունային կետի շրջակայքում:

Ցույց է տրված, որ, ի տարբերություն բաղադրյալ իզոտրոպ պրիզմաձև մարմնի, բաղադրյալ անիզոտրոպ մարմնի միացման մակերևույթի անկյունային կետի շրջակայքը կայող է լինել նույն բերվարված:

A.M.Sargsyan

Character of Stresses to the Angular Point of the Separation Line of the Area of the Cross-section of a Compound Straight-forward Anisotropic Body

The behaviour of stresses in the vicinity of the angular point of the contact surface of the compound straight-forward anisotropic prismatic body in the state of a longitudinal shear

It is shown that unlike the compound isotropic prismatic body, in the compound straight-forward anisotropic body the vicinity of the angular point of the separation surface may also be low strained.

Исследуется поведение напряжений в окрестности угловой точки поверхности контакта составного прямолинейно-анизотропного призматического тела, находящегося в состоянии продольного сдвига. Показано, что, в отличие от составного изотропного призматического тела, в составном прямолинейно-анизотропном теле окрестность угловой точки поверхности раздела может быть также малодеформированной.

Поведение напряжений в окрестности края поверхности контакта составного изотропного или анизотропного (цилиндрического или прямолинейного) призматического тела, находящегося в состоянии кручения или продольного сдвига, изучено в работах [1-4].

Исследованы также особенности напряжений около угловой точки линии раздела (точка  $O$  на фиг.1) составного изотропного и цилиндрически анизотропного тела [1, 5]. В [1] установлено, что напряжения при  $r \rightarrow 0$  бесконечно возрастают (имеют особенность) при всех значениях угла  $\theta_1$ , ( $0 < \theta_1 < 2\pi$ ) кроме  $\theta_1 = \pi$ . А в [5] показано, что характеристики стационарных физических полей (в частности, напряжения при кручении или продольном сдвиге) вблизи угловой точки могут стремиться к нулю, иметь особенность или конечные значения.

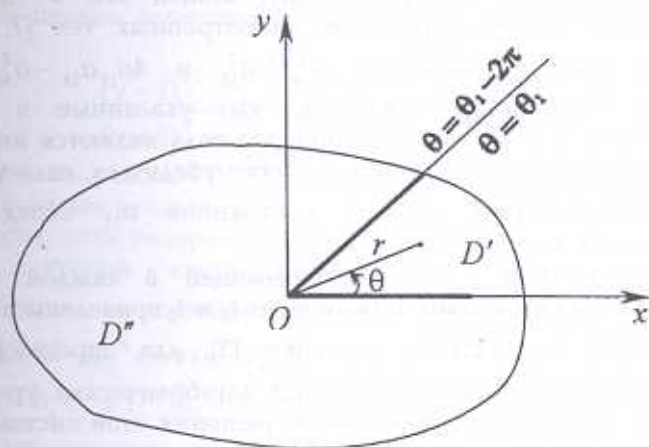
В данной работе эти вопросы изучены для кусочно-однородного прямолинейно-анизотропного призматического тела, находящегося в состоянии продольного сдвига.

Пусть  $D'$  и  $D''$  — два клина, жестко соединенных вдоль боковых поверхностей. Введем декартовы  $x, y$  и полярные  $r, \theta$  координаты, как показаны на фиг.1.

При отсутствии массовых сил компоненты напряжений  $\tau_{xz}^{(j)}$  и  $\tau_{yz}^{(j)}$  выражаются через функции напряжений  $\psi_j(x, y)$  формулами [3]

$$\tau_{xz}^{(j)} = \frac{\partial \psi_j(x, y)}{\partial y}, \quad \tau_{yz}^{(j)} = \frac{\partial \psi_j(x, y)}{\partial x} \quad (1)$$

Функция напряжений в соответствующих областях поперечного



Фиг. 1

сечения удовлетворяет уравнению [3]

$$a_{44}^{(j)} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2} - 2a_{45}^{(j)} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x \partial y} + a_{55}^{(j)} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

$j=1, 0 < \theta < \theta_1$ ;  $j=2, -(2\pi - \theta_1) < \theta < 0$ ;  $\theta_1 + \theta_2 \leq 2\pi$ ,  $\theta_1 \leq 2\pi$   
и условиям сопряжения на линии разрыва свойств материалов ( $y=0$  и  $x=r \cos \theta_1$ ,  $y=r \sin \theta_1$ )

$$\Psi_1 = \Psi_2, \quad u_z^{(1)} = u_z^{(2)} \quad (3)$$

В уравнении (2)  $a_{44}^{(j)}$ ,  $a_{45}^{(j)}$ ,  $a_{55}^{(j)}$  — упругие постоянные, отнесенные к выбранной системе координат.

Представляя решение уравнения (2) в виде [3,4]

$$\psi_j(x, y) = A_j(x + \mu_j y)^\lambda + B_j(x + \bar{\mu}_j y)^\lambda \quad (4)$$

где  $A_j, B_j$  — неизвестные постоянные,  $\lambda$  — произвольный параметр,

$$\mu_j = \sigma_j + i\tau_j = a_{45}^{(j)} / a_{55}^{(j)} + i\sqrt{a_{44}^{(j)} a_{55}^{(j)} - a_{45}^{(j)} a_{45}^{(j)}} / a_{55}^{(j)} \quad (5)$$

$$\bar{\mu}_j = \sigma_j - i\tau_j, \quad \tau_j > 0, \quad (j=1, 2)$$

и используя уравнения состояний, а также условие совместности деформаций, для перемещения  $u_z^{(j)}$  получим

$$u_z^{(j)} = A_j m_j (x + \mu_j y)^\lambda + B_j \bar{m}_j (x + \bar{\mu}_j y)^\lambda + C_j \quad (6)$$

$$m_j = a_{55}^{(j)} \mu_j - a_{45}^{(j)}, \quad \bar{m}_j = a_{55}^{(j)} \bar{\mu}_j - a_{45}^{(j)}$$



Как и в работе [9], числа  $\mu_j$  будем называть комплексными параметрами данной проблемы.

В связи с этим, заметим, что величина  $a_{44}a_{55} - a_{45}^2$ , входящая в мнимую часть комплексного параметра  $\mu_1$  или  $\mu_2$ , является инвариантой для тел с общей анизотропией, т.е. эта величина не меняется при повороте координатной системы вокруг общей оси  $z$ . В известных монографиях по теории упругости анизотропных тел [7, 8, 9] этот инвариант, а также инварианты  $a_{34}^2 + a_{35}^2$  и  $4a_{13}a_{23} - a_{36}^2$  нигде не фигурируют. Более того, оказалось, что указанные в работе [9] инварианты  $I_1, I_2, I_3$  и  $I_4$  для ортотропного тела являются инвариантами для тел с общей анизотропией. В этом легко убедиться, если учесть, что в формуле преобразования упругой постоянной  $a_{12}$  перед последним членом стоит знак минус [7, 9].

Для анизотропной пластинки, имеющей в каждой точке одну плоскость упругой симметрии, инварианты  $I_1$  и  $I_2$  приведены в [7, 9].

Удовлетворяя контактными условиям (3), для определения  $A_j, B_j$  получим однородную систему линейных алгебраических уравнений. Из условия существования нетривиального решения этой системы вытекает следующее уравнение относительно  $\lambda$ :

$$\frac{4\chi}{(1+\chi)^2} \operatorname{sh}^2\left(\frac{\lambda}{2} \ln \frac{r_2}{r_1}\right) + \sin^2\left(\lambda \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) - \frac{(\chi-1)^2}{(\chi+1)^2} \sin^2\left(\lambda \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) = 0 \quad (7)$$

где

$$\chi = \frac{\sqrt{a_{44}^{(2)}a_{55}^{(2)} - a_{45}^{(2)2}}}{\sqrt{a_{44}^{(1)}a_{55}^{(1)} - a_{45}^{(1)2}}}, \quad r_j = \sqrt{(\cos\theta_1 + \sigma_j \sin\theta_1)^2 + (\tau_j \sin\theta_1)^2} \quad (8)$$

$$\varphi_1 = \arg(\cos\theta_1 + \mu_1 \sin\theta_1), \quad \varphi_2 = \arg(\cos\theta_1 + \bar{\mu}_2 \sin\theta_1) \quad 0 < \varphi_j < 2\pi$$

Из представления (1) и (4) видно, что напряжения  $\tau_{xz}^{(j)}$  и  $\tau_{yz}^{(j)}$  неограниченно возрастают при приближении к угловой точке линии раздела, если положительная действительная часть первого корня уравнения (8) меньше единицы ( $0 < \operatorname{Re}\lambda_1 < 1$ ). Если  $\operatorname{Re}\lambda_1 > 1$ , то напряжения убывают до нуля при  $r \rightarrow 0$ . В случае  $\operatorname{Re}\lambda_1 = 1$  напряжения в угловой точке конечны и вообще отличны от нуля.

Отметим прежде всего, что из (7) легко получить соответствующее уравнение для кусочно-однородного изотропного клина [1], полагая  $a_{44}^{(j)} = a_{55}^{(j)}, a_{45}^{(j)} = 0$ .

Не накладывая ограничения на упругие деформативные характеристики материалов соединенных тел, рассмотрим частный случай  $\theta_1 = \pi$ . Из обозначений (8) следует  $r_j = 1, \varphi_j = \pi$ , и из (7) получим  $\lambda_1 = 1$ , т.е. на гладких внутренних частях поверхности контакта составного анизотропного тела напряжения не могут иметь особенности.

В случае  $\theta_1 = \pi/2$  имеем  $\varphi_1 = \arg\mu_1$  ( $0 < \arg\mu_1 < \pi$ ),  $\varphi_2 = \arg\bar{\mu}_2$

$(\pi < \arg \bar{\mu}_2 < 2\pi)$ ,  $r_j = \sqrt{\sigma_j^2 + \tau_j^2}$ . Если  $r_1 = r_2$ , т.е.  $a_{44}^{(2)}/a_{55}^{(2)} = a_{44}^{(1)}/a_{55}^{(1)}$ , из (7) будем иметь

$$\sin^2\left(\lambda \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) = \frac{(\chi - 1)^2}{(\chi + 1)^2} \sin^2\left(\lambda \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \quad (9)$$

Построив графики обеих частей уравнения (9) в зависимости от  $\lambda$ , замечаем, что первое пересечение этих кривых происходит при  $\lambda > 1$ , если

$$\frac{(\chi - 1)^2}{(\chi + 1)^2} < \sin^2\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) / \sin^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) = a_0 \quad (10)$$

Следовательно, условие (10) обеспечивает малонапряженность вблизи угловой точки линии раздела.

В частности, если материал одного из соединенных клиньев является изотропным, а второй - стеклопластиком Б [6], вырезанным под углом  $\alpha = \pi/4$  по отношению к направлению армировки ( $a_{44} = a_{55} = 25.05 \cdot 10^{-6}$  см<sup>2</sup>/кг,  $a_{45} = -3.75 \cdot 10^{-6}$  см<sup>2</sup>/кг), из (5) и (8) имеем  $\varphi_1 = \pi/2$ ,  $\sigma_1 = 0$ ,  $\tau_1 = 1$ ,  $\varphi_2 = 1.45\pi$ ,  $r_2 = 1$ ,  $\sigma_2 = -0.1497$ ,  $\tau_2 = 0.9887$ . Тогда из (10) следует, что при условии  $(\chi - 1)^2/(\chi + 1)^2 < 0.0062$  напряжения всегда стремятся к нулю при приближении к угловой точке  $O$ . Например, первый корень уравнения (9) при  $a_0 = 0.002$  находится в интервале  $1.011 < \lambda_1 < 1.012$ .

Когда соединенные материалы таковы, что  $\chi = 1$ , т.е.

$$a_{44}^{(2)} a_{55}^{(2)} - a_{45}^{(2)2} = a_{44}^{(1)} a_{55}^{(1)} - a_{45}^{(1)2} \quad (11)$$

уравнение (7) упрощается, и для определения  $\lambda_1$  получим простую формулу

$$\lambda_1 = \frac{2\pi(\varphi_1 + \varphi_2)}{(\varphi_1 + \varphi_2)^2 + (\ln r_2/r_1)^2} + i \frac{2\pi \ln r_2/r_1}{(\varphi_1 + \varphi_2)^2 + (\ln r_2/r_1)^2} \quad (12)$$

Условию (11) легко удовлетворить, когда анизотропный материал соединен с соответствующим изотропным материалом.

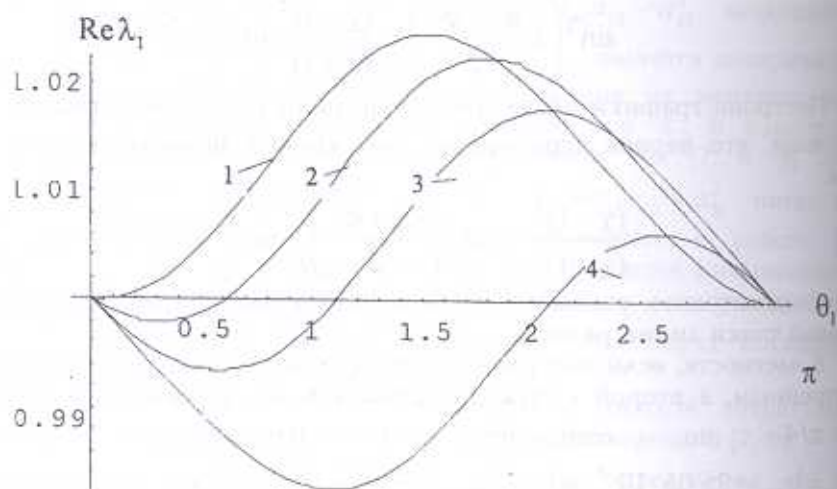
Особенно простой частный случай условия (11) имеет место, когда составляющие кусочно-однородного клина получены из одного и того же анизотропного тела, вырезанного под разными углами по отношению к заданному направлению. Для таких материалов величина  $a_{44} a_{55} - a_{45}^2$  инвариантна по отношению к преобразованию координат. Здесь приведен не претендующий на полноту перечень соединенных пар, указывающий лишь на практическую возможность допущений (11).

Из (12) непосредственно следует, что окрестность угловой точки  $O$  может быть малонапряженной, если

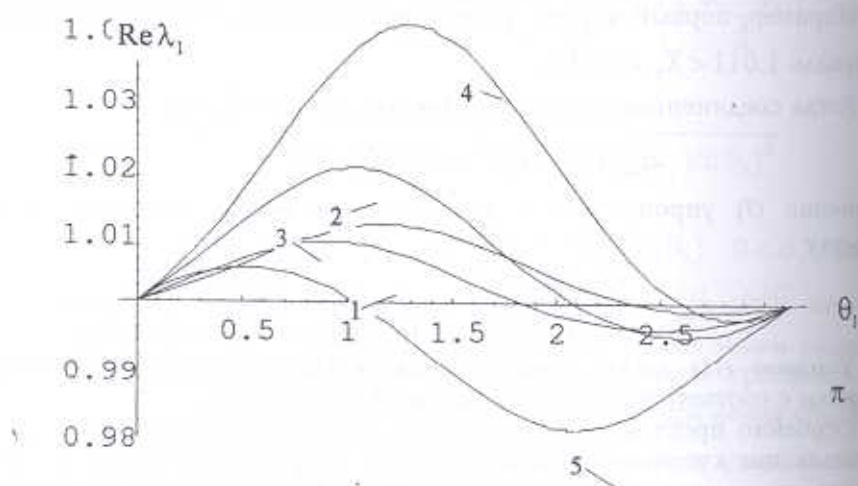
$$\pi - \sqrt{\pi^2 - (\ln r_2/r_1)^2} < (\varphi_1 + \varphi_2) < \pi + \sqrt{\pi^2 - (\ln r_2/r_1)^2}$$

т.е. когда  $0.0432 < r_2/r_1 < 23.141$  и  $\varphi_1 + \varphi_2 < 2\pi$ . Последнее условие имеет место, в частности, когда  $\arg \mu_1 < \arg \mu_2$  и  $\arg \bar{\mu}_2 < \varphi_2 < \arg \bar{\mu}_1$ .

На фиг. 2а и 2б приведены кривые зависимости  $\text{Re}\lambda_1$  от угла  $\theta_1$  (в рад.) для девяти различных комбинаций соединенных пар.



Фиг. 2а



Фиг. 2б

Кривые 1, 2 и 3 на фиг. 2а построены для случая, когда одна составляющая кусочно-однородного тела является изотропным материалом ( $\mu_1 = i$ ), а вторая — стеклопластиком Б [6], соответственно вырезанным под углами  $\alpha = \pi/4$ ,  $\alpha = \pi/6$ ,  $\alpha = \pi/12$  и имеющим, следовательно, комплексные параметры  $\mu_2 = 0.1497 + i0.9882$ ,  $\mu_2 = -0.1206 + i0.9199$  и  $\mu_2 = -0.0656 + i0.8753$ . Для четвертой кривой  $\mu_2 = 0.0656 + i0.8753$ .

Приведенные на фиг. 2б кривые 1, 2 и 3 соответствуют случаю, когда обе части составного клина изготовлены из стеклопластика Б,



вырезанного под разными углами по отношению к армировке (для кривой 1-  $\alpha = \pi/4$  и  $\alpha = \pi/6$ ; для кривой 2-  $\alpha = \pi/4$  и  $\alpha = \pi/12$ ; для кривой 3-  $\alpha = \pi/6$  и  $\alpha = \pi/12$ ). Кривые 4 и 5 построены для составного клина из анизотропного материала ( $\mu_2 = 0.0656 + i0.8753$ ) и стеклопластика Б, вырезанного под углами  $\alpha = \pi/4$  и  $\alpha = \pi/6$  соответственно.

Вышеприведенный анализ и численные расчеты (кривые на фиг. 2а и 2б) показывают, что в отличие от кусочно-однородного изотропного клина, в составном прямолинейно-анизотропном клине окрестность угловой точки линии раздела может быть малонапряженной.

Отметим, что двумерные краевые задачи теории упругости для клиновидных прямолинейно-анизотропных тел (однородных или кусочно-однородных) при различных ненулевых граничных условиях можно успешно решить с помощью интегрального преобразования Меллина аналитической функции  $f(x+iy)$  [10].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд. АН АрмССР, 1987. 338с.
2. Саргсян А.М. Поведение плоских стационарных физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного цилиндрически анизотропного тела. // В сб.: Механика деформируемого твердого тела. Ереван: Изд. АН Армении. 1993. С. 157-162.
3. Алексанян Р.К., Чобанян К.С. Характер напряжений вблизи края поверхности контакта скручиваемого анизотропного составного стержня. // ПМ. 1977. Т. XIII. №6. С. 90-96.
4. Саргсян А.М. О влиянии граничных условий на малонапряженность антиплоской задачи кусочно-однородного прямолинейно-анизотропного клина. //Изв.НАН Армении. Механика. 2002. Т. 55. №1. С. 17-22.
5. Аликян Ж.Г., Саргсян А.М. Поведение стационарных физических полей в окрестности угловой точки линии раздела кусочно-однородного цилиндрически-анизотропного тела. //Изв.АН Армении. Механика. 1991. Т. 44. №6. С. 3-9.
6. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тейперс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572с.
7. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 416с.
8. Саркисян В.С., Айрапетян В.Ж. Новые классы задач теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд. Ереванского университета, 1997. 241с.
9. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416с.
10. Михайлов С.Е. Сингулярность напряжений в составном произвольно-анизотропном теле и приложения к композитам. //МТТ. 1979. №6. С. 33-41.

Институт Механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
14.07.2003