

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН В
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКЕ, ВОЗМУЩЕННЫХ СИЛОЙ,
ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА БЕРЕГУ ТРЕЩИНЫ ПРИ НАЛИЧИИ И
ОТСУТСТВИИ ЭЛЕКТРОДА

Мелкумян А. С.

Ա. Ս. Մելքումյան

Պիեզոէլեկտրիկում ճարի ափին ազդող ուժի գրգռած ոչ ստացիոնար ալիքների դիֆրակցիան
էլեկտրոդի առկայության և բացակայության դեպքերում

Դիտարկվում է կիսասանկեր ճար պարունակող ճոռ դասի պիեզոէլեկտրական տարածություն՝ ճարի հարթությունում հորակցված անկերք բարակ էլեկտրոդի առկայության և բացակայության դեպքերում: Գարի ափերից մեկի վրա ազդող ժամանակից կախված փոփոխական կենտրոնացված ուժի գրգռած սանքի ոչ ստացիոնար ալիքները հասնելով ճարի գագաթին ենթարկվում են դիֆրակցիայի: Խնդիրը դիտարկվում է պիեզոէլեկտրիկ տարածությունում քվազիհիպերբոլիկ դրվածքով, որի դեպքում ինչպես էլեկտրական այնպես էլ ակուստիկական ալիքները ունեն տարածման վերջավոր արագություն: Ուսումնասիրությունները կատարվել են Վիներ - Հոպֆի և Կանյար - դե Հուփի մեթոդների կիրառմամբ: Ինչպես էլեկտրոդի առկայության, այնպես էլ նրա բացակայության դեպքերում ուսումնասիրվում է ամրոզչական էլեկտրաստանդգական ալիքային դաշտի կառուցվածքը և նրա զարգացումը ժամանակի ընթացքում: Սանրամասնութամբ իտուագոտվում են ժամանակից կախված էլեկտրական դաշտի ինդուկցիայի և մեխանիկական խրտմների ինտենսիվությունների գործակիցները ճարի գագաթում: Բերվում են քվային հաշվարկներ:

A. S. Melkumyan

Diffraction of nonstationary waves generated by a force applied on a face of a crack in piezoelectric medium in the cases of presence and absence of an electrode

A piezoelectric medium of the class 6mm is considered, which contains a semi-infinite crack, in the cases of presence and absence of an infinitesimal thin grounded electrode in the plane of the crack. The shear waves, perturbed by the concentrated force, which is varying in time and is applied on one face of the crack, approaching the crack tip diffract. The problem is considered in the quasihyperbolic approximation, so that both electrical and acoustical waves have a finite speed of propagation. The investigation is carried out by the means of Wiener - Hopf and Cagniard - de Hoop methods. The structure of the coupled electroelastic wavefield and its development in time are investigated in the cases of presence and absence of the electrode. The dynamic stress intensity factor and dynamic electric displacement intensity factor are investigated in details. Numerical calculations are presented.

Рассматривается пьезоэлектрическое пространство класса 6mm, содержащее полубесконечную трещину в случаях наличия и отсутствия бесконечно тонкого заземленного электрода в плоскости трещины. Волны сдвига, возмущенные сосредоточенной силой, зависящей от времени и действующей на одном берегу трещины, достигая вершины трещины, дифрагируют. Задача рассмотрена в квазигиперболической постановке, при которой как электрические, так и акустические волны имеют конечную скорость распространения. Исследования проведены с применением методов Вивера-Хопфа и Капьяра-де Хупа. Исследована структура взаимосвязанного электроупругого волнового поля и ее развитие во времени как в случае наличия электрода, так и в случае его отсутствия. Детально изучены интенсивности электрической индукции и механических напряжений при вершине трещины в зависимости от времени. Приведены численные расчеты.

1. Задачи распространения и дифракции волн в сплошных средах с упругими, электроупругими и магнитоупругими свойствами представляют

особый интерес. Ряд таких исследований как в стационарной, так и в нестационарной постановках были проведены в работах [1]-[10].

Имеется пьезоэлектрическое пространство класса $6mm$ гексагональной симметрии, содержащее полубесконечную трещину. Введем декартовую координатную систему $OXYZ$ с осью OZ , совпадающей с осью симметрии кристалла и с полуплоскостью $y=0, x < 0, -\infty < z < \infty$, совпадающей с трещиной. Один берег трещины является свободным от напряжений, а на другой берег действует сосредоточенная сила, зависящая от времени:

$$\sigma_{yz}(x, y, t)|_{y=+0} = -P\delta(x+a)f(t), \quad \sigma_{yz}(x, y, t)|_{y=-0} = 0 \quad (1)$$

где $x < 0, P = \text{const}, a > 0$, а $f(t)$ является заданной функцией, такой, что $f(t) = 0$ при $t < 0$. До воздействия данной силы пьезоэлектрическое пространство находилось в состоянии покоя.

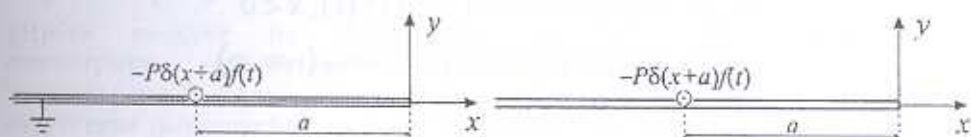
Рассмотрим задачу при двух вариантах электрического контакта на поверхности $y=0$ (фиг. 1):

а) имеется тонкий заземленный электрод в плоскости трещины, то есть

$$\varphi(x, +0, t) = \varphi(x, -0, t) = 0, \quad \forall x \in (-\infty, \infty) \quad (2)$$

б) электрод отсутствует, то есть

$$\begin{cases} \varphi(x, +0, t) = \varphi(x, -0, t) \\ D_y(x, +0, t) = D_y(x, -0, t) \end{cases} \quad \forall x \in (-\infty, \infty) \quad (3)$$



Фиг. 1. Постановка задачи а) при наличии электрода (слева) и б) при отсутствии электрода (справа)

Волны, возмущенные сосредоточенной силой, будут сдвиговыми в обоих случаях, так что для векторов перемещения \mathbf{u} и напряженности электрического поля \mathbf{E} будем иметь

$$\mathbf{u} = (0, 0, w(x, y, t)), \quad \mathbf{E} = (-\varphi_x(x, y, t), -\varphi_y(x, y, t), 0) \quad (4)$$

Волновые процессы в пьезоэлектрике будем рассматривать в квазигиперболической постановке [9], [10], при которой имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

а также соотношения

$$\sigma_{xz} = \bar{c}_{44} w_{,x} + e_{15} \psi_{,x}, \quad \sigma_{yz} = \bar{c}_{44} w_{,y} + e_{15} \psi_{,y} \quad (6)$$

$$D_x = e_{15} (1 - C_f) w_{,x} - \varepsilon_{11} \psi_{,x}, \quad D_y = e_{15} (1 - C_f) w_{,y} - \varepsilon_{11} \psi_{,y} \quad (7)$$

где введена следующая функция:

$$\psi(x, y, t) = \varphi(x, y, t) - \frac{e_{15} C_f}{\varepsilon_{11}} w(x, y, t) \quad (8)$$

а также обозначено $\bar{c}_{44} = c_{44} + e_{15}^2 / \varepsilon_{11}$, $c_t = s_t^{-1} = 1 / \sqrt{\varepsilon_{11} \mu_0}$, $c_x = s_x^{-1} = \sqrt{c_{44} / \rho}$, $C_f = c_t^2 / (c_t^2 - c_x^2)$, $\tilde{c}_{44} = \bar{c}_{44} [1 - (1 - C_f)(e_{15}^2 / \bar{c}_{44} \varepsilon_{11})]$, $k_e^2 = e_{15}^2 C_f / (\varepsilon_{11} \tilde{c}_{44})$.

Введем также одностороннее преобразование Лапласа по времени и двухстороннее преобразование Лапласа по координате x согласно формулам

$$f^*(x, p) = \int_0^{\infty} f(x, t) e^{-pt} dt, \quad f(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} f^*(x, p) e^{pt} dp \quad (9)$$

$$\hat{f}^*(\zeta, p) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x, p) e^{-p\zeta x} dx, \quad f^*(x, p) = \frac{p}{2\pi i} \int_{\zeta_0 - i\infty}^{\zeta_0 + i\infty} \hat{f}^*(\zeta, p) e^{p\zeta x} d\zeta$$

Решение задачи при обоих вариантах электрического контакта будем искать в виде суммы симметричного и антисимметричного задач. В результате будем иметь 4 граничные задачи, при которых решается система (5) со следующими четырьмя разными условиями на плоскости $y = 0$:

1) симметричная задача варианта а:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(x, \pm 0, t) &= \mp 0.5P\delta(x+a)f(t), \quad x < 0 \\ \varphi(x, +0, t) &= \varphi(x, -0, t) = 0, \quad \forall x \in (-\infty, \infty) \end{aligned} \quad (10)$$

2) антисимметричная задача варианта а:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(x, \pm 0, t) &= -0.5P\delta(x+a)f(t), \quad x < 0 \\ \varphi(x, +0, t) &= \varphi(x, -0, t) = 0, \quad \forall x \in (-\infty, \infty) \end{aligned} \quad (11)$$

3) симметричная задача варианта б:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(x, \pm 0, t) &= \mp 0.5P\delta(x+a)f(t), \quad x < 0 \\ \varphi(x, +0, t) &= \varphi(x, -0, t), \quad \forall x \in (-\infty, \infty) \end{aligned} \quad (12)$$

$$D_y(x, +0, t) = D_y(x, -0, t), \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

4) антисимметричная задача варианта б:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(x, \pm 0, t) &= -0.5P\delta(x+a)f(t), \quad x < 0 \\ \varphi(x, +0, t) &= \varphi(x, -0, t), \quad \forall x \in (-\infty, \infty) \end{aligned} \quad (13)$$

$$D_y(x, +0, t) = D_y(x, -0, t), \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

Отметим, что во всех случаях 1)-4) условие

$$\begin{cases} \sigma_{yz}(x, +0, t) = \sigma_{yz}(x, -0, t) \\ w(x, +0, t) = w(x, -0, t) \end{cases} \quad \forall x > 0 \quad (14)$$

также должно быть удовлетворено.

2. Перейдем к решению задач 1)-4), сформулированных в предыдущем пункте. Симметричные задачи 1) и 3) решаются с использованием преобразований Лапласа (9) без применения метода Винера-Хопфа.

Решение симметричной задачи в случае наличия электрода (вариант а) имеет вид

$$w_{xy(a)}^*(x, y, p) = \frac{P}{2\bar{c}_{44}} \frac{f^*(p)}{2\pi i} \int_{\zeta_0-i\infty}^{\zeta_0+i\infty} \frac{e^{-p[a(\zeta)|y|-\zeta(x+a)]}}{a(\zeta) - k_e^2 e(\zeta)} d\zeta \quad (15)$$

$$\psi_{xy(a)}^*(x, y, p) = -\frac{e_{15} C_f}{\varepsilon_{11}} \frac{P}{2\bar{c}_{44}} \frac{f^*(p)}{2\pi i} \int_{\zeta_0-i\infty}^{\zeta_0+i\infty} \frac{e^{-p[a(\zeta)|y|-\zeta(x+a)]}}{a(\zeta) - k_e^2 e(\zeta)} d\zeta \quad (16)$$

а решение симметричной задачи в случае отсутствия электрода (вариант б) имеет вид

$$w_{xy(b)}^*(x, y, p) = \frac{P}{2\bar{c}_{44}} \frac{C_f}{C_f + k_e^2(1-C_f)} \frac{f^*(p)}{2\pi i} \int_{\zeta_0-i\infty}^{\zeta_0+i\infty} \frac{e^{-p[a(\zeta)|y|-\zeta(x+a)]}}{a(\zeta)} d\zeta \quad (17)$$

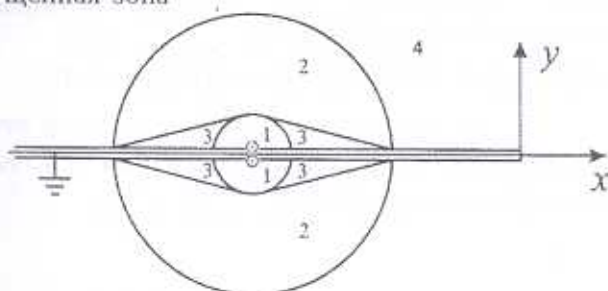
$$\psi_{xy(b)}^*(x, y, p) = \frac{C_f(1-C_f)}{C_f + k_e^2(1-C_f)} \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{P}{2\bar{c}_{44}} \frac{f^*(p)}{2\pi i} \int_{\zeta_0-i\infty}^{\zeta_0+i\infty} \frac{e^{-p[a(\zeta)|y|-\zeta(x+a)]}}{a(\zeta)} d\zeta \quad (18)$$

Здесь и далее введены следующие обозначения: $a(\zeta) = \sqrt{s_x^2 - \zeta^2}$, $a(0) = s_x$, с разрезами $\{\text{Im } \zeta = 0, |\text{Re } \zeta| \geq s_x\}$, $e(\zeta) = \sqrt{s_t^2 - \zeta^2}$, $a(0) = s_t$, с разрезами $\{\text{Im } \zeta = 0, |\text{Re } \zeta| \geq s_t\}$.

Как следует из выражений (15)-(18), волны, возмущенные симметрично действующими силами, не дифрагируют от вершины трещины как в случае наличия электрода (вариант а), так и в случае его отсутствия (вариант б).

Применяя метод Каньяра-де Хупа [11], [12] к выражениям (15)-(18), получаем волновые фронты. В случае наличия электрода (вариант а) получаются следующие 4 волновые зоны, показанные на фиг. 2 (отметим, что среди них нет зон дифрагированных волн):

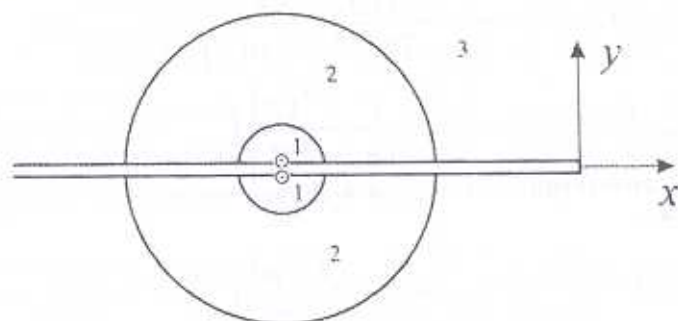
1. Зона возмущенной акустической волны
2. Зона возмущенной электрической волны
3. Зона головной волны
4. Невозмущенная зона



Фиг. 2. Волновые фронты симметричной задачи варианта а)

В случае отсутствия электрода (вариант б) получаются следующие 3 волновые зоны, показанные на фиг. 3 (отметим, что среди них нет зон дифрагированных волн):

1. Зона возмущенной акустической волны
2. Зона возмущенной электрической волны
3. Невозмущенная зона



Фиг. 3. Волновые фронты симметричной задачи варианта б)

Заметим, что в случае отсутствия электрода в отличие от случая его наличия в волновом поле отсутствует головная волна. Заметим также, что при $c_t/c_l \rightarrow 0$ имеем $C_f \rightarrow 1$, так что согласно (18) $\psi_{xy(b)}^*(x, y, p) \rightarrow 0$. Следовательно, в квазистатическом приближении в симметричной части варианта б) возмущенная электрическая волна отсутствует.

Перейдем теперь к решению антисимметричных задач 2) и 4). Как будет показано ниже, решения антисимметричных задач для случаев наличия заземленного электрода (вариант а) и его отсутствия (вариант б) совпадают. Это обстоятельство объясняется тем, что антисимметричные силы, действующие на берегах трещины, даже в случае отсутствия заземленного электрода создают такое волновое поле, что удовлетворяется условие $\varphi(x, +0, t) = \varphi(x, -0, t) = 0, \forall x \in (-\infty, \infty)$.

Решение антисимметричной задачи, общей для вариантов а) и б)

Рассмотрим антисимметричную задачу в случае отсутствия электрода, то есть задачу 4). Имеем пьезоэлектрическое пространство с полубесконечной трещиной, на берегах которого действуют антисимметрично расположенные силы:

$$\sigma_{yz}(x, +0, t) = \sigma_{yz}(x, -0, t) = -Q\delta(x+a)f(t), \quad x < 0,$$

где $Q = P/2$.

Задача заключается в решении уравнений (5) со следующими условиями на поверхности $y = 0$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{yz}(x, +0, t) &= \sigma_{yz}(x, -0, t) = -Q\delta(x+a)f(t) + \sigma_+(x, t) \\
w(x, +0, t) - w(x, -0, t) &= h_-(x, t) \\
\varphi(x, +0, t) &= \varphi(x, -0, t) \\
D_y(x, +0, t) &= D_y(x, -0, t)
\end{aligned} \tag{19}$$

где $h_-(x, t) = 0$ при $x > 0$, $\sigma_+(x, t) = 0$ при $x < 0$.

Как в уравнениях (5), так и в условиях (19), производя одностороннее преобразование Лапласа по времени и двухстороннее преобразование Лапласа по координате x , будем иметь

$$\frac{\partial^2 \hat{w}^*}{\partial y^2} - p^2 a^2(\zeta) \hat{w}^* = 0, \quad \frac{\partial^2 \hat{\psi}^*}{\partial y^2} - p^2 e^2(\zeta) \hat{\psi}^* = 0 \tag{20}$$

и

$$\begin{aligned}
\hat{w}_{,y}^*(\zeta, +0, p) &= \hat{w}_{,y}^*(\zeta, -0, p) \\
\hat{\psi}_{,y}^*(\zeta, -0, p) &= \hat{\psi}_{,y}^*(\zeta, +0, p) \\
\bar{c}_{44} \hat{w}_{,y}^*(\zeta, +0, p) + e_{15} \hat{\psi}_{,y}^*(\zeta, +0, p) &= -Qf^*(p)e^{p\zeta a} + \hat{\sigma}_+^*(\zeta, p) \\
\hat{w}^*(\zeta, +0, p) - \hat{w}^*(\zeta, -0, p) &= \hat{h}_-^*(\zeta, p) \\
\hat{\psi}^*(\zeta, +0, p) - \hat{\psi}^*(\zeta, -0, p) &= -C_f \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \hat{h}_-^*(\zeta, p)
\end{aligned}$$

Решая уравнение (20) и удовлетворяя условиям контакта, получим следующие выражения для \hat{w}^* и $\hat{\psi}^*$:

$$\hat{w}^*(\zeta, y, p) = \operatorname{sgn}(y) \frac{\hat{h}_-^*(\zeta, p)}{2} e^{-pa(\zeta)|y|} \tag{21}$$

$$\hat{\psi}^*(\zeta, y, p) = -\operatorname{sgn}(y) C_f \frac{e_{15}}{2\varepsilon_{11}} \hat{h}_-^*(\zeta, p) e^{-pe(\zeta)|y|} \tag{22}$$

а также уравнение Винера-Хопфа [13]:

$$-\bar{c}_{44}(1-k_e^2)R(\zeta)a(\zeta) \frac{\hat{h}_-^*(\zeta, p)}{2} p = -Qf^*(p)e^{p\zeta a} + \hat{\sigma}_+^*(\zeta, p) \tag{23}$$

где обозначено

$$R(\zeta) = \frac{1}{1-k_e^2} \frac{a(\zeta) - k_e^2 e(\zeta)}{a(\zeta)} \tag{24}$$

Факторизируя функцию $R(\zeta)$ с применением интегралов типа Коши [14], получим

$$R(\zeta) = R_+(\zeta)R_-(\zeta) \tag{25}$$

где

$$R_{\pm}(\zeta) = \frac{s_{bge} \pm \zeta}{s_e \pm \zeta} I_{\pm}(\zeta) \tag{26}$$

$$I_{\pm}(\zeta) = \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_{s_1/s_2}^1 \arctan \left[k_e^2 \frac{\sqrt{\sigma^2 - s_t^2 s_s^{-2}}}{\sqrt{1 - \sigma^2}} \right] \frac{d\sigma}{\sigma \pm s_s^{-1} \zeta} \right) \quad (27)$$

$$s_{\text{огс}} = \sqrt{\frac{s_s^2 - k_e^4 s_t^2}{1 - k_e^4}} > s_s \quad (28)$$

После подстановки (25) в (23) получим функциональное уравнение

$$-\bar{c}_{44}(1 - k_e^2) R_-(\zeta) \sqrt{s_s - \zeta} \frac{\hat{h}_-(\zeta, p)}{2} p = - \frac{Q f^*(p) e^{p\zeta a}}{R_+(\zeta) \sqrt{s_s + \zeta}} + \frac{\hat{\sigma}_-(\zeta, p)}{R_-(\zeta) \sqrt{s_s + \zeta}} \quad (29)$$

для решения которого функция $D(\zeta, p) = e^{p\zeta a} / (R_+(\zeta) \sqrt{s_s + \zeta})$ должна быть представлена в виде суммы плюс и минус функций:

$$D(\zeta, p) = e^{p\zeta a} / (R_+(\zeta) \sqrt{s_s + \zeta}) = D_+(\zeta, p) + D_-(\zeta, p) \quad (30)$$

Пользуясь интегралами типа Коши [14], получаем следующие выражения для $D_+(\zeta, p)$ и $D_-(\zeta, p)$:

$$D_+(\zeta, p) = \frac{1}{\pi} \int_{s_1}^{\infty} \text{Im} \left[\frac{1}{R_+(u + i0) \sqrt{s_s - u - i0}} \right] \frac{e^{-pu a} du}{u + \zeta} \quad (31)$$

$$D_-(\zeta, p) = \frac{e^{p\zeta a}}{R_+(\zeta) \sqrt{s_s + \zeta}} - D_+(\zeta, p) \quad (32)$$

Используя (24)-(28), (30)-(32) и решая уравнение (23) методом Винера-Хопфа [13], получим

$$\frac{\hat{h}_-(\zeta, p)}{2} = \frac{Q}{\bar{c}_{44}(1 - k_e^2)} \frac{f^*(p)}{p} \frac{D_-(\zeta, p)}{R_+(\zeta) \sqrt{s_s - \zeta}} \quad (33)$$

$$\hat{\sigma}_-(\zeta, p) = Q f^*(p) D_+(\zeta, p) R_+(\zeta) \sqrt{s_s + \zeta} \quad (34)$$

Подставляя (33) в (21)-(22), обращая двухстороннее преобразование Лапласа по координате x и используя выражения (31)-(32), получим

$$w_{\text{ан}}^*(x, y, p) = \frac{Q \text{sgn } y}{\bar{c}_{44}(1 - k_e^2)} \frac{f^*(p)}{2\pi i} \int_{\zeta_0 - i\infty}^{\zeta_0 + i\infty} \frac{e^{-p[\alpha(\zeta)y - \zeta(x+a)]}}{R(\zeta)a(\zeta)} d\zeta - \frac{Q \text{sgn } y}{\bar{c}_{44}(1 - k_e^2)} \frac{f^*(p)}{2\pi i} \int_{\zeta_0 - i\infty}^{\zeta_0 + i\infty} \frac{D_+(\zeta, p) e^{-p[\alpha(\zeta)y - \zeta x]}}{R_+(\zeta) \sqrt{s_s - \zeta}} d\zeta \quad (35)$$

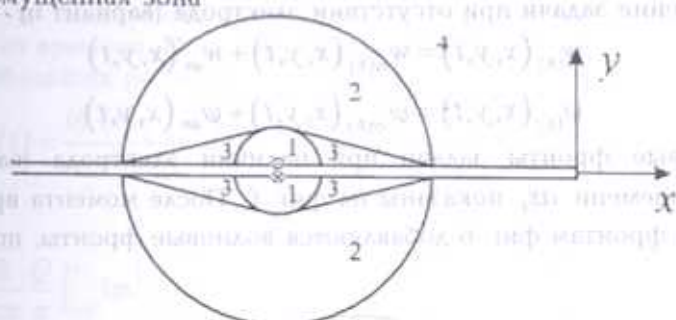
$$\psi_{\text{ан}}^*(x, y, p) = - \frac{\varepsilon_{15} C_f}{\varepsilon_{11} \bar{c}_{44}(1 - k_e^2)} \frac{Q \text{sgn } y}{2\pi i} \frac{f^*(p)}{\int_{\zeta_0 - i\infty}^{\zeta_0 + i\infty} \frac{e^{-p[\alpha(\zeta)y - \zeta(x+a)]}}{R(\zeta)a(\zeta)} d\zeta} + \frac{\varepsilon_{15} C_f}{\varepsilon_{11} \bar{c}_{44}(1 - k_e^2)} \frac{Q \text{sgn } y}{2\pi i} \frac{f^*(p)}{\int_{\zeta_0 - i\infty}^{\zeta_0 + i\infty} \frac{D_+(\zeta, p) e^{-p[\alpha(\zeta)y - \zeta x]}}{R_+(\zeta) \sqrt{s_s - \zeta}} d\zeta} \quad (36)$$

где добавлен индекс "an" для того, чтобы подчеркнуть, что полученные решения соответствуют антисимметричной задаче.

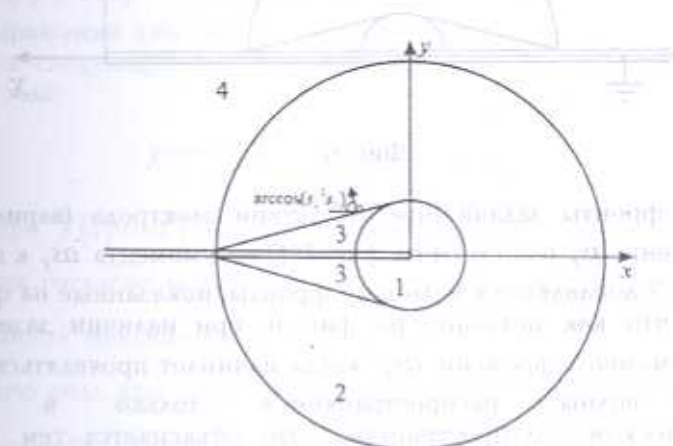
Первое слагаемое как выражения (35), так и выражения (36), представляет волны, возмущенные сосредоточенными силами, и не содержит явления дифракции. Второе слагаемое как в (35), так и в (36), представляет дифрагированные волны и проявляется через время as_1 после начала действия сил, то есть начиная с того момента, когда электрическая волна возмущенная силами доходит до края трещины.

Применяя метод Каняра-де Хупа [11], [12] к выражениям (35)-(36), получаем волновые фронты. Первые слагаемые выражений (35) и (36) определяют следующие волновые зоны (фиг. 4):

1. Зона возмущенной акустической волны
2. Зона возмущенной электрической волны
3. Зона головной волны
4. Невозмущенная зона



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Вторые слагаемые выражений (35) и (36) определяют дифрагированные волны. Соответствующие волновые зоны показаны на фиг. 5:

1. Зона возмущенной акустической волны
2. Зона возмущенной электрической волны
3. Зона головной волны

4. Невозмущенная зона

Из (35)-(36) и из условий контакта (19) следует, что выражения (35)-(36) удовлетворяют не только условиям (13), но и условиям (11). Следовательно, (35)-(36) является решением антисимметричной задачи не только в случае отсутствия, но и в случае наличия заземленного электрода (вариант а). Тем самым доказано, что антисимметричные задачи вариантов а) и б) совпадают.

Суммируя решения симметричных задач обоих вариантов а) и б), данные выражениями (15)-(16) и (17)-(18), вместе с решением общей антисимметричной задачи (35)-(36), получаем

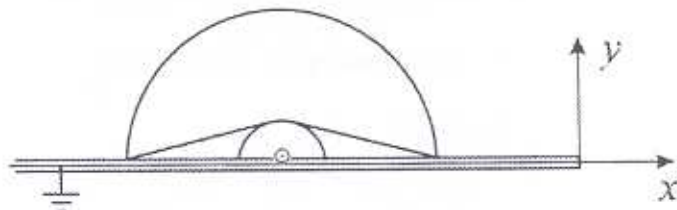
решение задачи при наличии электрода (вариант а)

$$\begin{aligned} w_{(a)}(x, y, t) &= w_{sp(a)}(x, y, t) + w_{an}(x, y, t) \\ \psi_{(a)}(x, y, t) &= \psi_{sp(a)}(x, y, t) + \psi_{an}(x, y, t) \end{aligned} \quad (37)$$

и решение задачи при отсутствии электрода (вариант б)

$$\begin{aligned} w_{(b)}(x, y, t) &= w_{sp(b)}(x, y, t) + w_{an}(x, y, t) \\ \psi_{(b)}(x, y, t) &= \psi_{sp(b)}(x, y, t) + \psi_{an}(x, y, t) \end{aligned} \quad (38)$$

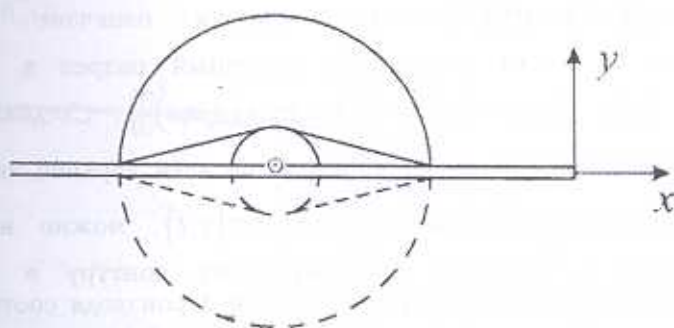
Волновые фронты задачи при наличии электрода (вариант а) до момента времени as_1 показаны на фиг. 6. После момента времени as_1 к волновым фронтам фиг. 6 добавляются волновые фронты, показанные на фиг. 5.



Фиг. 6.

Волновые фронты задачи при отсутствии электрода (вариант б) до момента времени as_1 показаны на фиг. 7. После момента as_1 к волновым фронтам фиг. 7 добавляются волновые фронты, показанные на фиг. 5.

Заметим, что как показано на фиг. 6, при наличии заземленного электрода до момента времени as_1 , когда начинает проявляться явление дифракции, волны распространяются только в верхнем пьезоэлектрическом полупространстве. Это объясняется тем, что сила действует только на одном берегу трещины, а заземленный электрод не дает электрическим волнам пройти через трещину. В случае же отсутствия электрода (фиг. 7) несмотря на то, что сила действует только на верхнем берегу трещины, возмущенные там электрические волны, беспрепятственно проходят через трещину и в силу пьезоэффекта возмущают в нижнем полупространстве как электрические, так и акустические волны.



Фиг. 7.

3. Перейдем теперь к изучению интенсивностей механических напряжений и электрической индукции при вершине трещины в зависимости от времени. Пользуясь выражениями (15)-(18), (35)-(36) и (37)-(38), после небольших расчетов получаем

$$K_{\sigma}(t) = \frac{df(t)}{dt} * K_{\sigma}^H(t), \quad K_D(t) = \frac{e_{15}}{\bar{c}_{44}(1-k_e^2)} K_{\sigma}(t) \quad (39)$$

где

$$K_{\sigma}^H(t) = -\sqrt{\frac{2}{a\pi}} \frac{Q}{\pi} \int_{s_0}^t \operatorname{Im} \left[\frac{\sqrt{(\tau+i0) - s_1 a} H(t-s_1 a)}{[(\tau+i0) - a s_{bgv}] I_-(\tau+i0) a^{-1}] \sqrt{(\tau+i0) - t}} \right] d\tau \quad (40)$$

представляет интенсивность механических напряжений в случае $f(t) = H(t)$ ($H(t)$ — функция Хевисайда), а знак * означает свертку.

Из выражений (39)-(40), полученных для электроупругого тела, легко получается следующее выражение механических напряжений для чисто упругого тела:

$$K_{\sigma}^{elastic}(t) = Q \sqrt{\frac{2}{a\pi}} f(t - s_1 a) \quad (41)$$

которое при $f(t) = H(t)$ было получено ранее в работе [8].

Так как согласно выражениям (39) функция $K_{\sigma}^H(t)$, представляющая интенсивность механических напряжений в случае $f(t) = H(t)$, играет важнейшую роль при определении $K_{\sigma}(t)$ и $K_D(t)$ при любом $f(t)$, то возникает необходимость в подробном изучении функции $K_{\sigma}^H(t)$.

Заметим, что функция

$$g(z, t) = \frac{1}{(z - s_{bgv} a) I_-(z a^{-1})} \frac{\sqrt{z - s_1 a}}{\sqrt{z - t}} \quad (42)$$

присутствующая в подынтегральном выражении (40) удовлетворяет

условию $\overline{g(z,t)} = g(\bar{z},t)$, где черточка означает комплексное сопряжение, и имеет следующий конечный разрез в комплексной плоскости (z): $\{\text{Im } z = 0, \text{Re } z \in [s_t a, \max(s_s a, t)]\}$. Следовательно, при $t > s_s a$ интегрирование в (40) проходит по всей верхней части разреза, так что, пользуясь условием $\overline{g(z,t)} = g(\bar{z},t)$, можно интеграл (40) преобразовать в интеграл по замкнутому контуру в комплексной плоскости и пользоваться теорией вычетов. Производя соответствующие расчеты, получаем следующее выражение для $K_\sigma^H(t)$:

$$K_\sigma^H(t) = K_\sigma^H \left(\frac{t}{s_s a}, \frac{Q}{\sqrt{a}}, s_t/s_s, k_e \right) = \quad (43)$$

$$= \frac{Q}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{k_e^2}{1+k_e^2} \frac{1}{\pi} \int_{s_t a}^{s_s^{-1} a^{-1}} \frac{\sqrt{\tau^2 - s_t^2 s_s^{-2}}}{\sqrt{1+\tau} \sqrt{t s_s^{-1} a^{-1} - \tau}} \frac{I_+(s, \tau)}{\tau - s_{bg} s_s^{-1}} d\tau [H(t-s_t a) - H(t-s_s a)] + \right.$$

$$\left. + H(t-s_s a) - \frac{\sqrt{s_{bg} s_s^{-1}} - 1}{I_-(s_{bg} s_s^{-1}) \sqrt{s_{bg} s_s^{-1} - t s_s^{-1} a^{-1}}} [H(t-s_t a) - H(t-s_{bg} a)] \right\}$$

График безразмерной величины $\sqrt{a} Q^{-1} K_\sigma^H(t)$ в зависимости от $t s_s^{-1} a^{-1}$ при разных значениях электромеханической связи k_e приведен на фиг. 8:

Из (39) следует, что при $f(t) = H(t)$ для интенсивности электрической индукции при вершине трещины будем иметь выражение

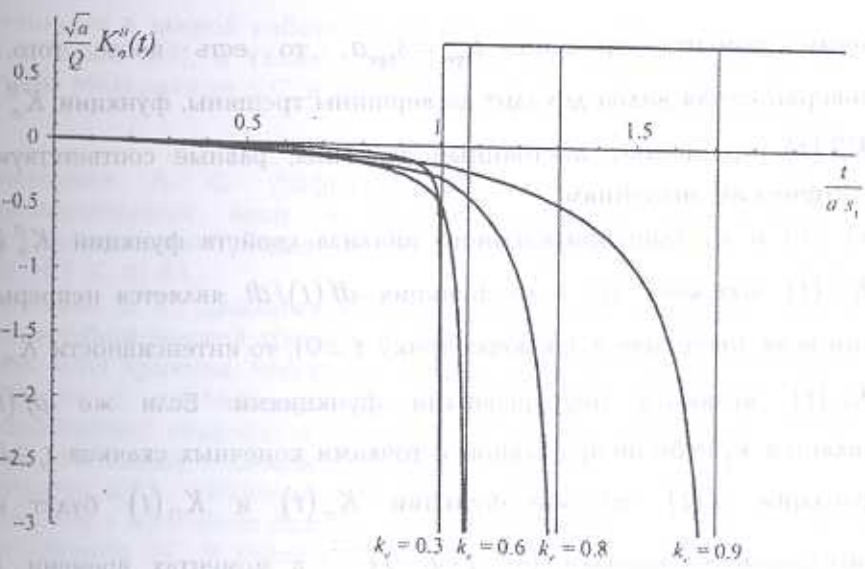
$$K_D^H(t) = \frac{\epsilon_{15}}{\tilde{c}_{44} (1-k_e^2)} K_\sigma^H(t) \quad (44)$$

График безразмерной величины $\sqrt{a} Q^{-1} \epsilon_{15} \epsilon_{11}^{-1} K_D^H(t)$ в зависимости от $t s_s^{-1} a^{-1}$ при разных значениях k_e приведен на фиг. 9:

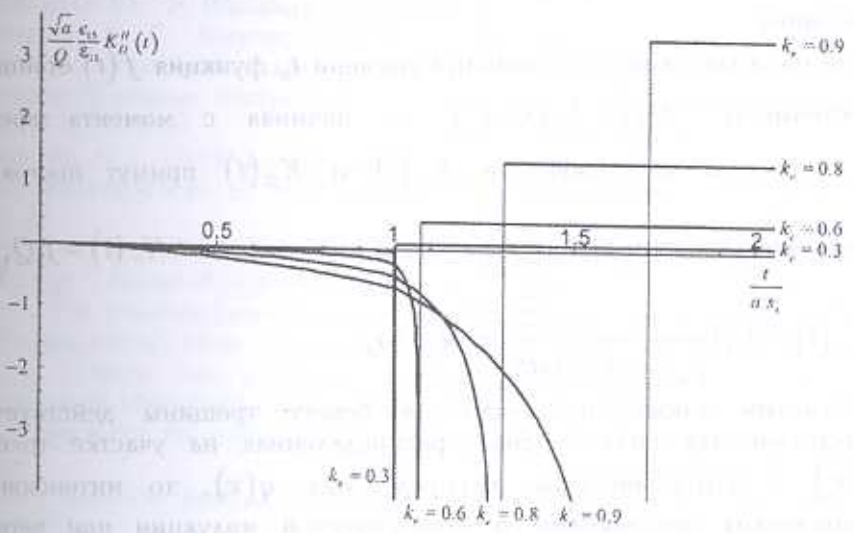
При расчетах, следуя Ли [9], принималось $s_t/s_s = 10^{-4}$.

Исходя из выражений (39)-(40), (43) и из графиков на фиг. 8 и 9, можно сделать следующие выводы:

- $K_\sigma^H(t) = 0$, $K_D^H(t) = 0$ до момента времени $t_t = s_t a$, когда электрическая волна, возмущенная сосредоточенной силой, доходит до вершины трещины
- начиная с момента времени $t_t = s_t a$ и до момента $t_s = s_s a$, когда до вершины доходит акустическая волна, возмущенная сосредоточенной силой, кривые функций $K_\sigma^H(t)$ и $K_D^H(t)$ медленно идут вниз (момента времени $t_s = s_s a$ соответствует линия $t/(a s_s) = 1$ на фиг. 8 и 9)



Фиг. 8.



Фиг. 9.

• начиная с момента времени $t_s = s_s a$ и до момента $t_{bge} = s_{bge} a$, когда до вершины доходит поверхностная волна, возмущенная сосредоточенной силой, функции $K_{\alpha}^H(t)$ и $K_D^H(t)$, быстро меняясь, стремятся к $-\infty$, имея сингулярность порядка $(s_{bge} a - t)^{-1/2}$ (моменту времени $t_{bge} = s_{bge} a$ соответствуют вертикальные асимптоты, показанные на фиг. 8 и 9)

- после момента времени $t_{bge} = s_{bge} a$, то есть после того, как поверхностная волна доходит до вершины трещины, функции $K_{\sigma}^H(t)$ и $K_D^H(t)$ принимают постоянные значения, равные соответствующим статическим значениям
- из (39) и из вышеприведенного анализа свойств функций $K_{\sigma}^H(t)$ и $K_D^H(t)$ вытекает, что если функция $df(t)/dt$ является непрерывной при всех значениях t (включая точку $t = 0$), то интенсивности $K_{\sigma}(t)$ и $K_D(t)$ являются непрерывными функциями. Если же $df(t)/dt$ является кусочно-непрерывной с точками конечных скачков $t_i \geq 0$ для функции $f(t)$, то обе функции $K_{\sigma}(t)$ и $K_D(t)$ будут иметь сингулярность порядка $(s_{bge} a + t_i - t)^{-1/2}$ в моментах времени, когда поверхностная волна, обусловленная скачком $f(t)$, дойдет до вершины трещины
- если начиная с какого-то момента времени t_0 функция $f(t)$ становится постоянной: $f(t) = f_0$ ($t > t_0$), то начиная с момента времени $t_k = t_0 + s_{bge} a$ интенсивности $K_{\sigma}(t)$ и $K_D(t)$ примут постоянные значения соответствующей статической задачи: $K_{\sigma}(t) = f_0 Q \sqrt{\frac{2}{a\pi}}$.

$$K_{\sigma}(t) = f_0 Q \frac{e_{15}}{c_{44}(1 - k_e^2)} \sqrt{\frac{2}{a\pi}} \text{ при } t > t_k$$

Отметим также, что если на берегу трещины действует не сосредоточенная сила, а сила, распределенная на участке трещины $[x_0, x_1]$ с интенсивностью распределения $q(x)$, то интенсивности механических напряжений и электрической индукции при вершине трещины примут следующий вид:

$$K_{\sigma}^q(t) = \int_{x_0}^{x_1} K_{\sigma}(t, x) q(x) dx, \quad K_D^q(t) = \int_{x_0}^{x_1} K_D(t, x) q(x) dx \quad (45)$$

следовательно, используя анализ функций интенсивностей при сосредоточенной силе, проведенной выше, можно сделать соответствующие выводы для случая распределенной силы.

Производя предельный переход, при котором скорость электрической волны стремится к бесконечности, из результатов данной работы можно получить соответствующие результаты для случая квазистатической постановки задачи. Частный антисимметричный случай этой задачи в квазистатическом приближении был рассмотрен Ингом и Вангом в работе [15]. Отметим, что результаты, опубликованные недавно в [15], находятся в строгих количественных и качественных противоречиях с результатами,

полученными в данной работе. Доказательство ошибочности результатов Инга и Ванга [15], а также соответствующие правильные результаты получены Мелкумян А.С. и приведены в работе [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелкумян А. С. Дифракция акустической и электрической нестационарных волн в пьезоэлектрическом пространстве на полубесконечной трещине. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. N 1. С. 51-63.
2. Григорян Э. Х., Джилаван С. А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. N 1. С. 38-50.
3. Grigoryan E. and Melkumyan A. On diffraction in a piezoelectric medium by parallel-situated electrodes. // Proceedings of The 4th Australasian Congress on Applied Mechanics, Melbourne 2005, pp. 593-598.
4. Grigoryan E.Kh., Melkumyan A.S. On wave diffraction in a piezoelectric medium containing a semi-infinite electrode. // Proceedings of the International Seminar "Day on Diffraction' 04", St. Petersburg 2004, pp. 100-109.
5. E. Grigoryan, S. Jilavyan, K. Agayan, Diffraction of waves in an elastic space with semi-infinite inclusion. // Proceedings of the International Seminar "Day on Diffraction' 04", St. Petersburg 2004, pp. 90-100.
6. Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н. Решение ряда нестационарных пространственных задач для сплошной среды при наличии сосредоточенных импульсов. // Изв. АН АрмССР. Механика. 1974. Т. 27. N 3. С. 10-20.
7. Багдоев А. Г. Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости. // Изв. АН АрмССР. Механика. 1974. Т. 27. N 2. С. 15-23.
8. Ma C.C., Hou Y.C. Transient analysis for antiplane crack subjected to dynamic loadings. // Journal of Applied Mechanics 58, 1991, 703-709
9. Li S. The Electromagneto-acoustic Surface Wave In A Piezoelectric Medium: The Bleustein-Gulyaev Mode. // Journal of Applied Physics 80(9), 1996, pp. 5264-5269.
10. Li S. Transient wave propagation in piezoelectric half space. // Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Physik (ZAMP) 51, 2000, 236-266.
11. Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. North-Holland Pub., 1984. pp. 425.
12. Miklowitz J. The theory of elastic waves and waveguides. North-Holland Pub., 1978. pp. 618.
13. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Изд. иностранной литературы, 1962. 280 с.
14. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963. 640 с.
15. Ing Y.S., Wang M.J. Explicit transient solutions for a mode III crack subjected to dynamic concentrated loading in a piezoelectric material. // International Journal of Solids and Structures, № 41, 2004, pp. 3849-3864.
16. Melkumyan A. Comments on "Explicit transient solutions for a mode III crack subjected to dynamic concentrated loading in a piezoelectric material" by Yi-Shyong Ing, Mau-Jung. // International Journal of Solids and Structures, 2005, In Press