ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №2, 2005 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ

Григорян Э.Х., Саркисян К.С.

Է.Խ. Գրիգորյան, Կ.Ս. Սարգսյան
Կոնտակտային խնդիր երկու զուգահեռ, կիսաանվերջ ստրինգերներով ուժեղացված առաձգական սալի համար

Աշխատանքում դիտարկվում է անվերջ համասեռ սալի խնդիրը, որը ուժեղացված է երկու զուգահեռ կիսաանվերջ առաձգական ստրինգերներով: Սալը դեֆորմացվում է ստրինգերների ծայրերին ազդող ուժերի ազդեցության տակ, որոնք ուղղված են ստրինգերներով: Ֆուրիեի ձևափոխության օգնությամբ խնդիրը հանգեցվում է անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության Ռիմանի եզրային խնդրի լուծմանը: Ստացված են կոնտակտային տանգենցիալ լարումները և ստրինգերներում նորմալ լարումները: Այդ լարումների համար ստացված են ասիմպտոտական բանաձևեր, որոնք բնութագրում են լարումների վարքը ուժերի ազդման կետերի շրջակայքում և նրանցից հեռու կետերում:

E.Kh. Grigoryan, K.S. Sargsyan
The Contact problem for Elastic Plate Strengthened by Two Parallel Half-infinite Stringers

In this work a problem for infinite homogeneous plate strengthened by two parallel half-infinite elastic stringers is considered. The plate is deformed by the forces applied to the ends of stringers and directed along the stringers. By means of Fourie's transformation the problem is reduced to the solution of Reimann's problem of analytic functions theory. Contact tangential stresses and normal stresses are defined. For these stresses asymptotic formulas characterizing the behavior of these stresses around and far from the points of the strength application are obtained.

В работе рассматривается задача для бесконечной однородной пластины, усиленной двумя параллельными полубесконечными стрингерами. Пластина деформируется под действием сил, приложенных к концам стрингеров и направленных вдоль стрингеров. С помощью преобразования Фурье задача сводится к решению задачи Римана теории аналитических функций. Определены контактные тангенциальные напряжения и нормальные напряжения, действующие в стрингерах. Для этих напряжений получены асимптотические формулы, характеризующие поведение этих напряжений вблизи и вдалеке от точек приложений сил.

1. Пусть бесконечная однородная пластина малой постоянной толщины H усилена двумя параллельными полубесконечными стрингерами, находящимися на расстоянии $2a$ и деформируется под действием сосредоточенных сил, приложенных к концам стрингеров и направленных вдоль стрингеров.

В исследуемой задаче относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, т.е. предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка, а для упругой однородной пластины справедлива модель обобщенного плоского напряженного состояния. Задача заключается в определении контактных тангенциальных напряжений и нормальных напряжений в стрингерах.

В силу вышесказанного дифференциальное уравнение равновесия стрингера при $y = a$ запишется в виде

$$\frac{d^2 u_s(x,a)}{dx^2} - \frac{P(x,a)}{E_s F_s} = 0 \quad (-\infty < x < 0) \tag{1.1}$$

при условии

$$\left.\frac{du_s}{dx}\right|_{x=0}=\frac{R}{E_s F_s} \tag{1.2}$$

где F_s – площадь поперечного сечения стрингера, E_s – модуль упругости стрингера, $P(x,a)$ – контактные тангенциальные усилия, $u_s(x,a)$ – перемещения точек стрингера при. $y=a$

Чтобы написать уравнение (1.1) с условием (1.2) одним уравнением для всех x $(-\infty<x<\infty)$, введем функцию

$$U_s^-(x)=\theta(-x)u_s(x,a) \tag{1.3}$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

Тогда, учитывая уравнение (1.1) и условие (1.2), для $U_s^-(x)$ будем иметь

$$\frac{d^2U_s^-(x)}{dx^2}=\frac{1}{E_sF_s}P^-(x)-\frac{R}{E_sF_s}\delta(x)-u_s(0,a)\delta'(x) \tag{1.4}$$

где $P^-(x)=\theta(-x)P(x,a)$, $\delta(x)$ – функция Дирака, $\delta'(x)$ – производная функции $\delta(x)$.

Применив к уравнению (1.4) интегральное преобразование Фурье в смысле теории обобщенных функций, получим:

$$-\sigma^2\overline{U}_s^-(\sigma)=\frac{\overline{P}^-(\sigma)}{E_sF_s}-\frac{R}{E_sF_s}+i\sigma u_s(0,a) \tag{1.5}$$

где

$$\overline{\Phi}^-(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)e^{i\sigma x}dx$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\Phi}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

Далее отдельно рассмотрим четную задачу, когда силы, действующие на концах стрингеров, одинаковы по направлению и величине ($R=R_1$, $P(x,a)=P(x,-a)=P_1(x)$) и нечетную задачу, когда действующие на концах стрингеров силы имеют одинаковую величину, но противоположны по направлению ($R=R_2$, $P(x,a)=-P(x,-a)=P_2(x)$).

Рассмотрим четную задачу. В этом случае имеем [1]

$$\overline{U}_1(\sigma,a)=\overline{U}_1^-(\sigma,a)+\overline{U}_1^+(\sigma,a)= \tag{1.6}$$

$$=\left\{\left[\frac{(\lambda^*+3\mu)}{4\mu(\lambda^*+2\mu)H|\sigma|}-\frac{(\lambda^*+\mu)}{2\mu(\lambda^*+2\mu)H}a\right]e^{-2|\sigma|a}+\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu(\lambda^*+2\mu)H|\sigma|}\right\}\overline{P}_1^-(\sigma)$$

где

$$U_1^+(x,a)=\theta(x)u_1(x,a)$$
$$U_1^-(x,a)=\theta(-x)u_1(x,a) \tag{1.7}$$

$\lambda^* = \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu}$, λ и μ – постоянные Ламе, $u_1(x,a)$ – перемещения точек пластины при $y = a$.

Имеет место условие контакта

$$\overline{U}_s^-(\sigma) = \overline{U}_1^-(\sigma, a), \quad (-\infty < \sigma < \infty) \tag{1.8}$$

Сопоставлением формул (1.5), (1.6), (1.8), для определения $\overline{P}_1^-(\sigma)$, $\overline{U}_1^+(\sigma)$ получим следующее функциональное уравнение:

$$\overline{K}_1(\sigma)\overline{P}_1^-(\sigma) = \overline{G}_1^+(\sigma), \quad (-\infty < \sigma < \infty) \tag{1.9}$$

где

$$\overline{G}_1^+(\sigma) = TR_1 + \sigma^2 TE_s F_s \overline{U}_1^+(\sigma, a) - i\sigma TE_s F_s u_s(0) \tag{1.10}$$

$$\overline{K}_1(\sigma) = T + 2|\sigma| e^{-|\sigma|a} \operatorname{ch}|\sigma|a - ka\sigma^2 e^{-2|\sigma|a}$$

$$T = \frac{4\mu(\lambda^* + 2\mu)}{\lambda^* + 3\mu}\frac{H}{E_s F_s}, \qquad k = \frac{2(\lambda^* + \mu)}{\lambda^* + 3\mu} \tag{1.11}$$

Задача свелась к решению задачи Римана в теории аналитических функций [2]. Для решения функционального уравнения (1.9) факторизируем $\overline{K}_1(\sigma)$, представив ее в виде

$$\overline{K}_1(\sigma) = \overline{K}_1^+(\sigma)\overline{K}_1^-(\sigma) \tag{1.12}$$

где $\overline{K}_1^+(\sigma)$ регулярна, не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha > 0$, а $\overline{K}_1^-(\sigma)$ регулярна, не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha < 0$ $\quad (\alpha = \sigma + i\tau)$.

Функции $\overline{K}_1^{\pm}(\sigma)$ стремятся к единице при $|\alpha| \to \infty$ в своих областях регулярности.

Здесь

$$\begin{gathered} \overline{K}_1^+(\sigma) = (\sigma + i0)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\bar{f}^+(\sigma) + \overline{F}_1^+(\sigma)\right] \\ \overline{K}_1^-(\sigma) = (\sigma - i0)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\bar{f}^-(\sigma) + \overline{F}_1^-(\sigma)\right] \end{gathered} \tag{1.13}$$

где

$$\bar{f}^+(\sigma) = \int_0^\infty f(x) e^{i(\sigma + i0)x} dx, \quad \bar{f}^-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 f(x) e^{i(\sigma - i0)x} dx \tag{1.14}$$

$$\overline{F}_1^+(\sigma) = \int_0^\infty F_1(x) e^{i(\sigma + i0)x} dx, \quad \overline{F}_1^-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 F_1(x) e^{i(\sigma - i0)x} dx$$

а функции $f(x)$ и $F_1(x)$ равны

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \ln\left(1 + \frac{T}{|\sigma|}\right) e^{-i\sigma x} d\sigma$$

$$F_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \ln\left(1 + \frac{|\sigma| - ka\sigma^2}{T + |\sigma|} e^{-2|\sigma|a}\right) e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad (-\infty < x < \infty) \tag{1.15}$$

Имея в виду (1.12), функциональное уравнение (1.9) можно записать в виде

$$\bar{L}_1^-(\sigma)=\bar{L}_1^+(\sigma) \tag{1.16}$$

где

$$\bar{L}_1^-(\sigma)=\bar{K}_1^-(\sigma)\bar{P}_1^-(\sigma)$$

$$\bar{L}_1^+(\sigma)=\frac{\bar{G}_1^+(\sigma)}{\bar{K}_1^+(\sigma)} \tag{1.17}$$

Дальнейший ход рассуждений проводится, как в работе [3]. Применив к (1.16) обратное преобразование Фурье, получим

$$L_1^+(x)=L_1^-(x) \tag{1.18}$$

В таком случае [4,5] будем иметь

$$L_1^+(x)=L_1^-(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k\delta^{(k)}(x) \tag{1.19}$$

где $\delta^{(0)}=\delta(x)$; $\delta^{(k)}(x)$ $(k=1,2,\ldots)$ – производные функции $\delta(x)$.

Далее, применив к (1.19) преобразование Фурье, будем иметь

$$\bar{L}_1^+(\sigma)=\bar{L}_1^-(\sigma)=\sum_{k=0}^{n} a_k(-i)^k\sigma^k \tag{1.20}$$

Имея в виду, что подынтегральное выражение при экспоненте имеет порядок $|\sigma|^{-1}$ при $|\sigma|\to\infty$, то функция $f_1(x)=O(\ln|x|)$ при $|x|\to 0$. Тогда

$$\bar{f}^+(\sigma)=O\left[(\sigma+i0)^{-1}\ln(\sigma+i0)\right]$$

$$\bar{f}^-(\sigma)=O\left[(\sigma-i0)^{-1}\ln(\sigma-i0)\right] \quad \text{при } |\sigma|\to\infty \tag{1.21}$$

Так как подынтегральное выражение при $F_1(x)$ абсолютно интегрируема, то функция $F_1(x)$ – непрерывная функция, следовательно, она в точке $x=0$ принимает конечное значение. Следовательно,

$$\bar{F}_1^+(\sigma)=O\left[(\sigma+i0)^{-1}\right],\quad \bar{F}_1^-(\sigma)=O\left[(\sigma-i0)^{-1}\right] \quad \text{при } |\sigma|\to\infty \tag{1.22}$$

Из вышесказанного следует, что

$$\bar{K}_1^+(\sigma)=O\left[(\sigma+i0)^{\frac{1}{2}}\right],\quad \bar{K}_1^-(\sigma)=O\left[(\sigma-i0)^{\frac{1}{2}}\right] \quad \text{при } |\sigma|\to\infty \tag{1.23}$$

Далее, как известно [6,7]

$$P_1^-(x)=O\left((-x)^{-\frac{1}{2}}\right) \quad \text{при } x\to -0 \tag{1.24}$$

то отсюда следует

$$\bar{P}_1^-(\sigma)=O\left[(\sigma-i0)^{-\frac{1}{2}}\right] \quad \text{при } |\sigma|\to\infty \tag{1.25}$$

Так как $u_1(0,a)=u_x(0)$, то $\bar{U}_1^+(\sigma,a)$ при $|\sigma|\to\infty$ имеет порядок $iu_x(0)(\sigma+i0)^{-1}$. Следовательно, $\bar{L}_1^-(\sigma)=O(1)$ при $|\sigma|\to\infty$. Тогда из (1.20) следует, что $a_k=0$ $(k=1,2,\ldots)$. Таким образом, для искомой величины $\bar{P}_1^-(\sigma)$ получим

$$\overline{P}_1^-(\sigma)=\frac{a_0}{(\sigma-i0)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\bar{f}^-(\sigma)-\overline{F}_1^-(\sigma)\right] \tag{1.26}$$

Таким образом, для искомых контактных напряжений получим:

$$P_1^-(x)=\frac{a_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-\bar{f}^-(\sigma)-\overline{F}_1^-(\sigma)\right]}{(\sigma-i0)^{1/2}}e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{1.27}$$

Постоянная a_0 в дальнейшем будем определять из условия

$$\int_{-\infty}^{0}P_1(s)ds=\overline{P}_1^-(0)=R_1 \tag{1.28}$$

В дальнейшем будет показано, что

$$a_0=R_1\sqrt{T}e^{-i\frac{\pi}{4}} \tag{1.29}$$

Интересно отметить, что при $a\to 0$ для $P_1(x)$ получается решение задачи одного стрингера с двойной жесткостью, так как при $a\to 0$ получается

$$\overline{P}_1^-(\sigma)=R_1\sqrt{\frac{T}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\exp\left[-\bar{f}_0^-(\sigma)\right]$$

где

$$\bar{f}_0^-(\sigma)=\int_{-\infty}^{0}f_0(x)e^{i(\sigma-i0)x}dx,\quad f_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(1+\frac{T}{2|\sigma|}\right)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

Это говорит о том, что при приближении стрингеров их жесткость как бы увеличивается.

2. Теперь приступим к определению асимптотических формул для $P_1^-(x)$ и $q_1^-(x)$ (нормальные напряжения в стрингерах) при $x\to -0$ и $x\to-\infty$. Сначала определим асимптотическую формулу при $x\to-\infty$.

Для этого заметим, что

$$\bar{f}^{-'}(\sigma)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sign} s\,ds}{(T+|\sigma|)(s-(\sigma-i0))}-\frac{1}{2(\sigma-i0)}=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\frac{T}{T^2-(\sigma-i0)^2}\ln\frac{\sigma-i0}{T}+\frac{1}{2(T+(\sigma-i0))}-\frac{1}{2(\sigma-i0)} \tag{2.1}$$

Рассмотрим разложение $\bar{f}^{-'}(\sigma)$ при $|\sigma|\to 0$.

$$\bar{f}^{-'}(\sigma)=-\frac{1}{\pi i T}\left[\ln\frac{\sigma-i0}{T}+\frac{\sigma^2}{T^2}\ln\frac{\sigma-i0}{T}+\frac{\sigma^4}{T^4}\ln\frac{\sigma-i0}{T}+\cdots\right]+$$

$$+\frac{1}{2T}\left[1-\frac{\sigma}{T}+\left(\frac{\sigma}{T}\right)^2-\left(\frac{\sigma}{T}\right)^3+\cdots\right]-\frac{1}{2}(\sigma-i0)^{-1} \tag{2.2}$$

Интегрируя (2.2), для $\bar{f}^-(\sigma)$ получим

$$\bar{f}^-(\sigma)=-\frac{1}{2}\ln\frac{\sigma-i0}{T}-\frac{i\pi}{4}+\tilde{f}^-(\sigma) \tag{2.3}$$

где

$$\tilde{f}^-(\sigma)=\frac{\sigma}{\pi iT}\left(\ln\frac{\sigma-i0}{T}-1\right)+\frac{\sigma^3}{3\pi iT^3}\left(\ln\frac{\sigma-i0}{T}-\frac{1}{3}\right)+$$

$$+\frac{\sigma}{2T}-\frac{\sigma^2}{4T^2}+\frac{\sigma^3}{6T^3}+O\left(\sigma^4\right),\qquad |\sigma|\to 0 \tag{2.4}$$

Здесь было использовано представление

$$\ln\frac{T}{|\sigma|}=\overline{M}^-(\sigma)+\overline{M}^+(\sigma)$$

где

$$\overline{M}^-(\sigma)=-\frac{1}{2}\ln\frac{\sigma-i0}{T}-\frac{i\pi}{4},\quad \overline{M}^+(\sigma)=-\frac{1}{2}\ln\frac{\sigma+i0}{T}+\frac{i\pi}{4} \tag{2.5}$$

Имея в виду (2.3), выражение для $\overline{P}_1^-(\sigma)$ можно записать в виде

$$\overline{P}_1^-(\sigma)=\frac{a_0e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{T}}\left[1-\left(\tilde{f}^-(\sigma)+\overline{F}_1^-(\sigma)\right)+\frac{1}{2}\left(\tilde{f}^-(\sigma)+\overline{F}_1^-(\sigma)\right)^2+\cdots\right] \tag{2.6}$$

После громоздких вычислений получено асимптотическое разложение $\overline{F}_1^-(\sigma)$ при $|\sigma|\to 0$

$$\overline{F}_1^-(\sigma)=\frac{\sigma}{\pi Ti}\left[\ln 2a(\sigma-i0)-\psi(1)+\frac{i\pi}{2}+A_1\right]+O\left(\sigma^2\right),\qquad |\sigma|\to 0 \tag{2.7}$$

где

$$A_1=\int_0^\infty\frac{se^{-2T^*s}-\ln\left(1+\dfrac{s-kT^*s^2}{1+s}e^{-2T^*s}\right)}{s^2}ds \tag{2.8}$$

$T^*=aT$; ψ – известная функция пси.

При получении разложения (2.7) были использованы формулы

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s^{2n}e^{-2|s|a}}{s-(\sigma-i0)}ds=-\frac{1}{2\pi i}\left[2\sum_{m=1}^{n}\int_0^\infty s^{2(n-m)}\sigma^{2m-1}e^{-2as}ds-\sigma^{2n}i\pi+2a\sigma^{2n}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\int_0^\infty\ln[s-(\sigma-i0)]e^{-2sa}ds-\int_0^\infty\ln[s+(\sigma-i0)]e^{-2sa}ds\right)\right],\qquad n=1,2,\ldots \tag{2.9}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|s|e^{-2|s|a}}{s-(\sigma-i0)}ds=\frac{\sigma}{\pi i}\left[\ln 2a(\sigma-i0)-\psi(1)+\frac{i\pi}{2}\right]-$$

$$-\frac{a\sigma}{\pi i}\int_0^\infty\frac{\ln\left[s^2-(\sigma-i0)^2\right]}{s^2}e^{-2as}ds$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|s|^{2n-1}e^{-2|s|a}}{s-(\sigma-i0)}ds=-\frac{1}{2\pi i}\left[2\sum_{m=2}^{n}\int_0^\infty s^{2(n-m)+1}\sigma^{2m-3}e^{-2as}ds-\right.$$

$$-2\sigma^{2n-1}\ln(\sigma-i0)-\sigma^{2n-1}i\pi+2a\sigma^{2n-1}\times$$

$$\times\left(\int_0^\infty \ln[s-(\sigma-i0)]e^{-2as}ds+\int_0^\infty \ln[s+(\sigma-i0)]e^{-2as}ds\right)\Bigg], \quad n=2,3,4,\ldots$$

Причем, при $n=1$ имеем

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|s|e^{-2|s|a}}{s-(\sigma-i0)}ds=\frac{\sigma}{\pi i}\left[\ln 2a(\sigma-i0)-\psi(1)+\frac{i\pi}{2}\right]-a\sigma^2+O\left[\sigma^3\ln(\sigma-i0)\right]$$

$$\text{при } |\sigma|\to 0 \tag{2.10}$$

Подставляя выражения $\bar{f}^-(\sigma)$, $\overline{F_1}^-(\sigma)$ из (2.4) и (2.7) в (2.6), получим

$$\overline{P_1}^-(\sigma)=\frac{a_0 e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{T}}\left[\bar{l}_1^-(\sigma)+\bar{l}_2^-(\sigma)\right]+O\left(\sigma^3\ln(\sigma-i0)\right), \quad |\sigma|\to 0 \tag{2.11}$$

где

$$\bar{l}_1^-(\sigma)=1-\frac{\sigma}{\pi iT}\ln(\sigma-i0)-\frac{\sigma}{\pi iT}B-\frac{\sigma^2}{2\pi^2T^2}\ln^2(\sigma-i0)-$$
$$-\frac{\sigma^2}{\pi^2T^2}B\ln(\sigma-i0)-\frac{\sigma^2}{2\pi^2T^2}B^2 \tag{2.12}$$

$$\bar{l}_2^-(\sigma)=-\frac{\sigma}{\pi iT}\ln(\sigma-i0)-\frac{\sigma}{\pi iT}\overline{A}_1-\frac{3}{2}\frac{\sigma^2}{\pi^2T^2}\ln^2(\sigma-i0)-$$
$$-\frac{\sigma^2}{\pi^2T^2}\left(2\overline{A}_1+B\right)\ln(\sigma-i0)-\left(\frac{\overline{A}_1^2}{2}+\overline{A}_1B\right)\frac{\sigma^2}{\pi^2T^2}$$

$$\overline{A}_1=\ln 2a-\psi(1)+\frac{i\pi}{2}+A_1; \quad B=-\ln T-1+\frac{i\pi}{2}$$

Учитывая условия (1.28) и (2.11), постоянная a_0 определяется в виде (1.29).

Применив к (2.11) обратное преобразование Фурье, с учетом свойств интеграла Фурье, будем иметь

$$P_1^-(x)=R_1\left[l_1^-(x)+l_2^-(x)\right]+O\left(|x|^{-4}\right), \quad x\to-\infty \tag{2.13}$$

где

$$l_1^-(x)=\frac{1}{\pi T}|x|^{-2}-\frac{1}{\pi^2T^2}|x|^{-3}\left[\Gamma'(3)-2-2\ln|x|T\right]$$

$$l_2^-(x)=\frac{1}{\pi T}|x|^{-2}-\frac{1}{\pi^2T^2}|x|^{-3}\left[3\Gamma'(3)-4\ln\frac{|x|}{2a}-2\ln|x|T-4\psi(1)+4A_1-2\right]$$

$$x\to-\infty \tag{2.14}$$

При определении $l_1^-(x)$ и $l_2^-(x)$ были использованы формулы

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma-i0)^\lambda e^{-i\sigma x}d\sigma=-\frac{e^{-\frac{i\pi}{2}\lambda}\sin\pi\lambda}{\pi}\Gamma(\lambda+1)x_-^{-1-\lambda} \tag{2.15}$$

$$\frac{d}{d\lambda}(\sigma-i0)^{\lambda}=(\sigma-i0)^{\lambda}\ln(\sigma-i0) \qquad (2.16)$$

где

$$x_{-}=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x>0\\ |x| & \text{при} \quad x\le 0\end{cases}$$

Пользуясь формулой

$$q_1(x)=\frac{1}{F_s}\int\limits_{-\infty}^{x}P_1(s)ds \qquad (2.17)$$

определим поведение нормальных напряжений в стрингерах при $x\to-\infty$, для которых получим

$$q_1(x)=\frac{R_1}{F_s}\left[\tilde{l}_1^{\,-}(x)+\tilde{l}_2^{\,-}(x)\right]+O\left(x^{-3}\ln|x|T\right) \qquad (2.18)$$

где

$$\tilde{l}_1^{\,-}(x)=-\frac{1}{\pi T}\frac{1}{x}-\frac{1}{\pi^2T^2}\left[\psi(1)-\ln|x|T\right]\frac{1}{x^2} \qquad (2.19)$$

$$\tilde{l}_2^{\,-}(x)=-\frac{1}{\pi T}\frac{1}{x}-\frac{1}{\pi^2T^2}\left[\psi(1)-2\ln\frac{|x|}{2a}-2\ln|x|T+2A_1+\frac{3}{2}\right]\frac{1}{x^2}$$

Приступим к получению асимптотической формулы для $P_1(x)$ при $x\to-0$. Для этого, как известно из свойств интегрального преобразования Фурье, надо определить асимптотическую формулу $\overline{P}_1^{\,-}(\sigma)$ при $|\sigma|\to\infty$. Для этого запишем $\overline{P}_1^{\,-}(\sigma)$ в виде

$$\overline{P}_1^{\,-}(\sigma)=\frac{R_1\sqrt{T}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{(\sigma-i0)^{1/2}}\left[1-\bar{f}^{\,-}(\sigma)+\frac{1}{2}\bar{f}^{\,-2}(\sigma)-\overline{F}_1^{\,-}(\sigma)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\overline{F}_1^{\,-2}(\sigma)+\bar{f}^{\,-}(\sigma)\overline{F}_1^{\,-}(\sigma)+\ldots\right] \qquad (2.20)$$

Используя формулу (2.1), для $\bar{f}^{\,-}(\sigma)$ будем иметь

$$\bar{f}^{\,-}(\sigma)=\frac{T}{\pi i}(\sigma-i0)^{-1}\left[\ln(\sigma-i0)-\ln T+1+\frac{i\pi}{2}\right]-\frac{T^2}{4}(\sigma-i0)^{-2}+$$
$$+O\left[(\sigma-i0)^{-3}\ln(\sigma-i0)\right], \qquad |\sigma|\to\infty \qquad (2.21)$$

Используя формулу (1.15), для $\overline{F}_1^{\,-}(\sigma)$ будем иметь

$$\overline{F}_1^{\,-}(\sigma)=\frac{D_1}{i}(\sigma-i0)^{-1}+O\left[(\sigma-i0)^{-3}\right] \qquad (2.22)$$

где

$$D_1=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \ln\left[1+\frac{\sigma-ka\sigma^2}{T+\sigma}e^{-2\sigma a}\right]d\sigma, \quad |\sigma|\to\infty \tag{2.23}$$

Подставляя выражения $\bar{f}^-(\sigma)$ и $\bar{F}_1^-(\sigma)$ из (2.21) и (2.22) в (2.20), получим

$$\bar{P}_1^-(\sigma)=R_1\sqrt{T}e^{-i\frac{\pi}{4}}\left[\overline{m_1^-}(\sigma)+\overline{m_2^-}(\sigma)\right]+O\left[(\sigma-i0)^{-\frac{7}{2}}\ln^2(\sigma-i0)\right] \tag{2.24}$$

где

$$\overline{m_1^-}(\sigma)=(\sigma-i0)^{-\frac{1}{2}}+\frac{T}{\pi i}(\sigma-i0)^{-\frac{3}{2}}\left[\ln(\sigma-i0)+N\right]+\frac{T^2}{4}(\sigma-i0)^{-\frac{5}{2}}-$$

$$-\frac{T^2}{2\pi^2}(\sigma-i0)^{-\frac{5}{2}}\left[\ln^2(\sigma-i0)+2N\ln(\sigma-i0)+N^2\right] \tag{2.25}$$

$$\overline{m_2^-}(\sigma)=-\frac{D_1}{i}(\sigma-i0)^{-\frac{3}{2}}-\frac{D_1^2}{2}(\sigma-i0)^{-\frac{5}{2}}-\frac{D_1T}{\pi}(\sigma-i0)^{-\frac{5}{2}}\left[\ln(\sigma-i0)+N\right]$$

$$N=1-\ln T+i\pi/2$$

Применив к (2.24) обратное преобразование Фурье, получим поведение $P_1^-(x)$ при $x\to-0$

$$P_1^-(x)=\frac{R_1\sqrt{T}}{\pi}\left[m_1^-(x)+m_2^-(x)\right]+O\left[|x|^{\frac{5}{2}}\right] \tag{2.26}$$

где

$$m_1^-(x)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)|x|^{-\frac{1}{2}}+\frac{T}{\pi}\left[\left(1-\ln|x|T\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)+\Gamma'\left(-\frac{1}{2}\right)\right]|x|^{\frac{1}{2}}+ \tag{2.27}$$

$$+\frac{T^2}{4\pi^2}\left[\left(-3\pi^2+2\left(1-\ln|x|T\right)^2\right)\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)+4\left(1-\ln|x|T\right)\Gamma'\left(-\frac{3}{2}\right)+\Gamma''\left(-\frac{3}{2}\right)\right]|x|^{\frac{3}{2}}$$

$$m_2^-(x)=D_1\left\{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)|x|^{\frac{1}{2}}+\left[\left(D_1+\frac{T}{\pi}\left(1-\ln|x|T\right)\right)\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)+\Gamma'\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{T}{\pi}\right]|x|^{\frac{3}{2}}\right\}$$

При определении формул (2.27) были использованы формулы (2.15) и (2.16). Пользуясь формулой

$$q_1(x)=\frac{1}{F_s}\int_0^x P_1(s)ds+\frac{R_1}{F_s} \tag{2.28}$$

определим асимптотическую формулу для интенсивности нормальных напряжений стрингера при $x\to-0$

$$q_1(x)=\frac{R_1\sqrt{T}}{\pi}\left[\tilde{m}_1^-(x)+\tilde{m}_2^-(x)\right]+O\left(|x|^{\frac{7}{2}}\right), \qquad x\to-0 \tag{2.29}$$

где

$$\widetilde{m}_1^-(x)=-2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)|x|^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\frac{T}{\pi}|x|^{\frac{3}{2}}\left[\frac{5}{3}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)+\Gamma'\left(-\frac{1}{2}\right)-\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\ln|x|T\right]-$$

$$-\frac{T^2}{10\pi^2}\left\{\left(\frac{106}{25}-3\pi^2\right)\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{28}{5}\Gamma'\left(-\frac{3}{2}\right)+2\Gamma''\left(-\frac{3}{2}\right)-4\ln|x|T\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{7}{5}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)+\Gamma'\left(-\frac{3}{2}\right)\right]+2\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)\ln^2|x|T\right\}|x|^{\frac{5}{2}} \tag{2.30}$$

$$\widetilde{m}_2^-(x)=D_1\left\{-\frac{2}{3}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)|x|^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}|x|^{\frac{5}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\left(D_1+\frac{7}{5}\frac{T}{\pi}\right)\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{T}{\pi}\Gamma'\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{T}{\pi}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)\ln|x|T\right]\right\}$$

В формулах (2.19) и (2.30) функции $\widetilde{l}_1^-(x)$ и $\widetilde{m}_1^-(x)$ соответствуют асимптотическим формулам для интенсивности нормальных напряжений одного стрингера при $x\to-\infty$ и $x\to-0$ соответственно полученных в работе [7].

3. Рассмотрим нечетную задачу

$$R=R_2;\ P(x,a)=-P(x,-a)=P_2(x);\ q(x,a)=q_2(x,a)$$

В этом случае имеем [1]

$$\overline{U}_2(\sigma,a)=\overline{U}_2^-(\sigma,a)+\overline{U}_2^+(\sigma,a)=$$

$$=\overline{P}_2^-(\sigma)\left[\frac{\lambda^*+3\mu}{2\mu(\lambda^*+2\mu)H|\sigma|}e^{-a|\sigma|}\operatorname{sh}a|\sigma|+\frac{\lambda^*+\mu}{2\mu(\lambda^*+2\mu)H}ae^{-2a|\sigma|}\right] \tag{3.1}$$

Поступая аналогично, как и в четной задаче, для определения $\overline{P}_2^-(\sigma)$ получим следующее функциональное уравнение:

$$\overline{K}_2(\sigma)\overline{P}_2^-(\sigma)=\overline{G}_2^+(\sigma) \tag{3.2}$$

где

$$\overline{G}_2^+(\sigma)=TR_2+\sigma^2TE_sF_s\overline{U}_2^+(\sigma,a)-i\sigma TE_sF_su_s(0) \tag{3.3}$$

$$\overline{K}_2(\sigma)=T+2|\sigma|\operatorname{sh}a|\sigma|e^{-a|\sigma|}+ka\sigma^2e^{-2a|\sigma|} \tag{3.4}$$

Поступая аналогично, как и в четной задаче, разрешив уравнение (3.2) для искомых контактных напряжений, получим:

$$P_2^-(x)=\frac{R_2e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{T}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-\bar{f}^-(\sigma)-\overline{F}_2^-(\sigma)\right]}{(\sigma-i0)^{\frac{1}{2}}}e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{3.5}$$

где

$$F_2^-(\sigma)=\ln\left[1-\frac{|\sigma|-ka\sigma^2}{T+|\sigma|}e^{-2|\sigma|a}\right] \tag{3.6}$$

а $\bar{f}^-(\sigma)$ определяется из формул (1.14), (1.15). Нетрудно заметить, что при $a\to 0$ $P_2^-(x)=R_2\delta(x)$, которое говорит о том, что при приближении стрингеров напряжения как бы сосредоточиваются в окрестности точки $x=0$, иначе говоря, при приближении стрингеров их жесткость как бы уменьшается. Для получения асимптотической формулы для $P_2^-(x)$ при $x\to-\infty$, определим $\overline{P_2^-}(\sigma)$ при $|\sigma|\to 0$.

Будем иметь

$$\overline{P_2^-}(\sigma)=R_2\left[1+B_1\sigma+B_2\sigma^2+B_3\sigma^3+B_4\sigma^3\ln 2a(\sigma-i0)+B_5\sigma^4\ln 2a(\sigma-i0)\right]+ \\ +O\left[\sigma^4\right] \tag{3.7}$$

где

$$B_4=-\frac{2a^2(k+1)}{T\pi i}$$

$$B_5=\frac{4a^2(k+1)}{T^2\pi^2}\left[\psi(1)-\ln 2aT-\frac{k+2}{2T}+\frac{3(k-2)}{16aT^2}+\frac{85}{432a^2T^3}+A_2\right] \tag{3.8}$$

$$A_2=\int_0^\infty\frac{se^{-2T^*s}+\ln\left(1+\dfrac{kT^*s^2-s}{1+s}e^{-2T^*s}\right)}{s^2}ds \tag{3.9}$$

коэффициенты B_i $(i=1,2,3)$ – постоянные величины, зависящие от упругих характеристик пластины и расстояния стрингеров a.

Тогда для $P_2^-(x)$ при $x\to-\infty$ получим:

$$P_2^-(x)=R_2\frac{12a^2(k+1)}{T\pi}\times$$

$$\times\left\{|x|^{-4}-\frac{4}{T\pi}\left[\psi(1)+A_2-\ln 2aT-\frac{k+2}{2T}+\frac{3(k-2)}{16aT^2}+\frac{85}{432a^2T^3}\right]|x|^{-5}\right\}+O\left(|x|^{-6}\right),$$

$$x\to-\infty \tag{3.10}$$

Используя формулу (2.18), для $q_2(x)$ получим

$$q_2(x)=-\frac{4a^2(k+1)}{\pi TF_s}R_2\times$$

$$\times\left\{|x|^{-3}-\frac{3}{\pi T}\left[\psi(1)+A_2-\ln 2aT-\frac{k+2}{2T}+\frac{3(k-2)}{16aT^2}+\frac{85}{432a^2T^3}\right]|x|^{-4}\right\}+$$

$$+O\left(|x|^{-5}\right) \tag{3.11}$$

Асимптотические формулы для $P_2^-(x)$ и $q_2(x)$ при $x \to -0$ идентичны асимптотическим формулам для четной задачи при $x \to -0$ с одной лишь разницей, что вместо D_1 в формулах (2.29) и (2.30) фигурирует коэффициент D_2, который равен

$$D_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \ln\left[1 - \frac{\sigma - ka\sigma^2}{T+\sigma} e^{-2\sigma a}\right] d\sigma \tag{3.12}$$

Из полученных результатов можно получить решение задачи, когда при $y = a$ по направлению x действует сила $P\delta(x)$, а при $y = -a$ – сила $Q\delta(x)$. В этом случае контактные напряжения равны

$$P^-(x,a) = P_1^-(x) + P_2^-(x), \quad R_1 + R_2 = P,$$
$$P^-(x,-a) = P_1^-(x) - P_2^-(x), \quad R_1 - R_2 = Q.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э.Х., Саркисян К.С. Контактная задача для упругой пластины, усиленной двумя бесконечными стрингерами. // Изв. НАН РА. Механика. 2004. Т. 57. №2. С.3-10.
2. Гахов В.Д. Краевые задачи. М.: Госиздат. 1963.
3. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Уч. записки ЕГУ, естеств. науки. 1979. № 3. С.29-34.
4. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука. 1965.
5. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ М.: Наука. 1972. 544 с.
6. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. // ПММ. 1968. Т.32. №4. С. 632-646.
7. Koiter W.T., On the Diffusion of load form a Stiffener into a sheet.//The Quarterly Journal of Mechanics and Applied mathematicas. 1955. V. 8. №2. P.164-178.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
28.12.2004