ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №2, 2005 Механика

УДК 393.3

СИММЕТРИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ ЧГА

Минасян М.М.

Մ.Մ. Մինասյան

ՉԳԼ մոտավորությամբ բախումներից զուրկ պլազմայի հավասարումների համակարգի բերումը սիմետրիկ տեսքի

Աշխատանքում երկադիաբատ մոտավորությամբ (Չու-Գոլդբերգեր-Լոուի տեսություն) իդեալական, բախումներից զուրկ պլազմայի հավասարումների համակարգը բերվել է սիմետրիկ տեսքի: Օգտագործվել է Ֆրիդրիխ-Լաքսի մեթոդը: Արտածվել են այդ համակարգի հիպերբոլիկության պայմանները: Քննարկվել է ձևափոխությունների երկակիության հարցերը՝ կապված Լեժանդրի ձևափոխության հետ: Որոշվել են համապատասխան լագրանժիանները և արտածվել դրանց ուռուցիկության բավարար պայմանները: Քննարկվել են վիճակի հավասարումները և էնտրոպիայի պահպանման օրենքը:

M.M. Minassian

The symmetrization of the ChGL system for a collisionless plasma

The system of equations in doubly adiabatic approximation (theory of Chew-Goldberger-Low) is brought to symmetrical appearance. The method of symmetrization of Fridrics-Lax is applied. The conditions of system hyperbolicity are received. Duality of transformations in the theory of Legendre transformations are discussed.The responding lagrangians are constructed and sufficient conditions of their camber are deduced. Adiabatic equations of condition and entropy conservation law are discussed.

В работе система уравнений бесстолкновительной идеальной плазмы в двояноадиабатическом приближении (теория Чу-Гольдбергера-Лоу) приведена к симметрическому виду. Применен метод симметризации Фридрихса-Лакса. Получены условия гиперболичности системы. Обсуждена двойственность преобразований в свете теории преобразований Лежандра. Построены соответствующие лагранжианы и выведены достаточные условия их выпуклости. Обсуждены адиабатические уравнения состояний и закон сохранения энтропии.

1. Одножидкостные МГД уравнения правильно описывают свойства невязкой идеально проводящей квазинейтральной плазмы в магнитном поле, если столкновения в плазме достаточно часты, чтобы поддерживать ее изотропность. Если же магнитное поле достаточно сильно, а столкновения достаточно редки, предположение об изотропности не выполняется и свойства плазмы вдоль и поперек магнитного поля оказываются различными. Чу, Гольдбергер и Лоу [1] вывели полную систему для описания бесстолкновительной плазмы путем разложения уравнения Власова по степеням $1/H$. Эта система уравнений, обычно называемая теорией ЧГА (или дважды адиабатической теорией), имеет вид [2]

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla.\vec{v}=0\,,\quad \frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}.\nabla$$

$$\frac{D\vec{H}}{Dt}-\left(\vec{H}.\nabla\right)\vec{v}+\vec{H}\nabla.\vec{v}=0$$

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}-\mu_e\left(\nabla\times\vec{H}\right)\times\vec{H}+\nabla;\hat{P}=0 \tag{1.1}$$

Симметричный тензор напряжений $\hat{P}$ имеет вид

$$P_{ij}=p_{\perp}\delta_{ij}+\frac{p_{II}-p_{\perp}}{H^2}H_iH_j \tag{1.2}$$

где $p_{\perp}, p_{II}$ – независимые давления, действующие соответственно перпендикулярно и параллельно магнитным силовым линиям (остальные обозначения общепринятые).

Дополнительно к системе (1.1) имеются два уравнения состояния (более строго: одно адиабатическое уравнение состояния и один адиабатический инвариант сохранения магнитного момента в частице):

$$\frac{p_{II}H^2}{\rho^3}=\text{const} \qquad \frac{p_{\perp}}{\rho H}=\text{const} \tag{1.3}$$

Систему можно представить в виде законов сохранения массы, магнитной индукции и импульса

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho v^j\right)}{\partial x^j}=0$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^j}\left(H_iv^j-H^jv_i\right)=0$$

$$\frac{\partial\left(\rho v_i\right)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho v_iv^j+\tilde{p}\delta_i^j-\tilde{T}_i^{\,j}\right)=0 \tag{1.4}$$

$$\tilde{T}_i^{\,j}=\tilde{\mu}H_iH^j-\frac{1}{2}\tilde{\mu}H^2\delta_i^j,\quad \tilde{\mu}=\mu_e+\frac{p_{\perp}-p_{II}}{H^2},\quad \tilde{p}=\frac{p_{\perp}+p_{II}}{2}$$

Система (1.4) переходит в систему МГД, если формально принять $p_{\perp}=p_{II}$, однако с различными уравнениями состояния и внутренней энергии.

Следствием из системы ЧГЛ является закон сохранения полной энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial S^j}{\partial x^j}=0 \tag{1.5}$$

$$E=\frac{1}{2}\rho v^2+\frac{1}{2}\tilde{\mu}H^2+\rho\tilde{U}=\frac{1}{2}\rho v^2+\frac{1}{2}\mu_eH^2+\rho U$$

$$S^j=v^jE+\left(\tilde{p}\delta_i^j-\tilde{T}_i^{\,j}\right)v^i$$

$$\tilde{U}=\frac{p_{II}}{\rho}+\frac{p_{\perp}}{2\rho},\quad U=\frac{p_{\perp}}{\rho}+\frac{p_{II}}{2\rho}$$

Будем рассматривать систему (1.4) как основную для 7-мерного вектора $u=\{\rho,H_1,H_2,H_3,v_1,v_2,v_3\}$. В силу адиабатических законов (1.3) будем считать p_{II} и $p_{\perp}$ заданными функциями от ρ и H, дифференциалы которых связаны соотношениями

$$dp_{II}=\frac{3p_{II}}{\rho}d\rho-\frac{2p_{II}}{H}dH,\quad dp_{\perp}=\frac{p_{\perp}}{\rho}d\rho+\frac{p_{\perp}}{H}dH \tag{1.6}$$

2. Будем симметризировать систему (1.4) по методу Фридрихса-Лакса [3,4]. Симметрические системы позволяют наиболее естественным образом поставить корректную задачу Коши и получить достаточные условия гиперболичности системы. Кроме того, симметрические системы позволяют без больших вычислительных затрат применить методы редукции системы к уравнениям типа КДВ, ЗХ, КП и т.д. [5,6].

Суть метода ФЛ заключается в следующем: системы МСС, как правило, являются следствием из некоторых законов сохранения:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial P_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial Q_\alpha^m}{\partial x^m}=0\\ &P_\alpha=P_\alpha(u_1,u_2,\ldots u_n)\qquad (m=1,2,3)\\ &Q_\alpha^m=Q_\alpha^m(u_1,u_2,\ldots u_n)\qquad (\alpha=1,2,\ldots n)\end{aligned} \tag{2.1}$$

Величины P_α называются "сохраняемыми величинами", а Q_α^m – их потоками. Важным свойством законов сохранений является то, что они могут порождать новые законы сохранения. Для этого необходимо, чтобы существовали интегрирующие множители $v_\alpha(u_1,u_2,\ldots u_n)$ такие, чтобы линейные дифференциальные формы $v_\alpha dP_\alpha$ и $v_\alpha dQ_\alpha^m$ стали полными дифференциалами:

$$v_\alpha dP_\alpha=d\omega\qquad v_\alpha dQ_\alpha^m=d\omega^m \tag{2.2}$$

Тогда следует дополнительный закон сохранения:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial\omega^m}{\partial x^m}=0 \tag{2.3}$$

По терминологии Фридрихса ω называется "выведенной" (derived) величиной, а уравнение (2.2) – "выведенным" уравнением сохранения. Будем считать, что выполняется условие

$$\delta^2\omega(u)-v_\alpha\delta^2P_\alpha(u)>0 \tag{2.4}$$

Доказывается, что в силу принятых предположений система (2.1) записывается в виде симметричной t-гиперболической системы с корректно поставленной задачей Коши

$$A^0\frac{\partial u}{\partial t}+A^m\frac{\partial u}{\partial x^m}=0 \tag{2.5}$$

Гиперболичность означает, что собственные числа λ матрицы $A^j\xi_j$ по отношению к матрице A^0 для любого ненулевого вектора $\overline{\xi}$ вещественны, а соответствующие им левые собственные векторы составляют базис в соответствующем векторном пространстве. Для нелинейных систем гиперболичность может определяться только на множестве решений. Достаточным условием гиперболичности системы (2.4) являются симметричность матриц A^0 и A^j при положительной определенности первой.

Применительно к идеальным системам МСС, как правило, следствием является уравнение сохранения энергии E, т.е. одно из уравнений типа (2.2) является уравнение сохранения энергии. Тогда следует

$$v^{\alpha} = \frac{\partial E}{\partial P_{\alpha}} \qquad v^{\alpha} = \frac{\partial S^m}{\partial Q_{\alpha}^m} \tag{2.6}$$

Записав систему (2.1) в виде

$$\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial Q_{\alpha}^m}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x^m} = 0 \tag{2.7}$$

и умножив слева на "симметризирующую" невырожденную матрицу $\left(\frac{\partial v^{\alpha}}{\partial u^j}\right)$, получим систему (2.4) с симметричными матрицами

$$A^0 = \left(a_{ij}^0\right),\ A^m = \left(a_{ij}^m\right)$$

$$\begin{aligned} a_{ij}^0 &= \frac{\partial^2 E}{\partial u^i \partial u^j} - v^{\alpha}(u)\left(\frac{\partial^2 P_{\alpha}}{\partial u^i \partial u^j}\right) = \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial u^j}\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial u^i} \\ a_{ij}^m &= \frac{\partial^2 S^m}{\partial u^i \partial u^j} - v^{\alpha}(u)\left(\frac{\partial^2 Q_{\alpha}^m}{\partial u^i \partial u^j}\right) = \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial u^j}\frac{\partial Q_{\alpha}^m}{\partial u^i} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Положительная определенность матрицы A^0 следует из (1.7).

Можно симметризацию провести и по иному. Этим методом часто пользуется С.К. Годунов [7,8] и др. [9]. Этот метод двойственнен к методу ФЛ в смысле преобразования Лежандра. Действительно, из теории преобразований Лежандра следует существование обратных к (1.9) преобразований

$$P_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial v^{\alpha}} \qquad Q_{\alpha}^m = \frac{\partial L^m}{\partial v^{\alpha}} \tag{2.9}$$

порожденных функциями Лагранжа

$$L = P_{\alpha}v^{\alpha} - \mathrm{E}, \qquad L^m = Q_{\alpha}^m v^{\alpha} - S^m \tag{2.10}$$

С использованием (1.11) систему (1.4) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial v^{\alpha}}\right) + \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{\partial L^m}{\partial v^{\alpha}}\right) = 0 \tag{2.11}$$

или

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^{\alpha}\partial v^{\beta}}\frac{\partial v^{\beta}}{\partial t} + \frac{\partial^2 L^m}{\partial v^{\alpha}\partial v^{\beta}}\frac{\partial v^{\beta}}{\partial x^m} = 0 \tag{2.12}$$

которая является симметрической. При этом порождающие функции L и

E выпуклы одновременно и это обеспечивает определенность матрицы $L_{,w}$.

Таким образом, оба метода идентичны, однако выведенные симметрические системы разные: если система (2.4) записана для исходных полевых функций u, то система (2.11) записана для «новых» функций v. В данной работе предпочтение дается методу ФЛ, исходя именно из этого обстоятельства.

Легко проверить, что

$$L = \tilde{p} + \frac{1}{2}\tilde{\mu} H^2, \;\; L^m = v^i\left(\tilde{p}\delta_i^m - \tilde{T}_i^{\,m}\right) \tag{2.13}$$

Без знака тильды эти соотношения совпадают со случаем МГД.

В работе [10] приведен еще один вариант симметризации системы ЧГЛ для вектора

$$u = \left\{ v_i, \;\; H_i, \;\; \frac{p_\perp - p_{II}}{2H^2}, \;\; \frac{p_\perp + p_{II}}{2} \right\} \tag{2.14}$$

Однако в этом случае некоторые физические аспекты теряют свою прозрачность.

3. Переходим к симметризации системы ЧГЛ. Из законов сохранения (1.3) следует

$$P_\alpha = \left\{ \rho, H_i, \rho v_i \right\}, \;\; \alpha = 1,\dots,7$$

$$Q_\alpha^m = \left\{ \rho \mathrm{v}^m, \mathrm{v}^m H_i - \mathrm{v}_i H^m, \rho v_i v^m + \tilde{p}\delta_i^m - \tilde{T}_i^{\,m} \right\} \tag{3.1}$$

Теперь выберем вектор

$$v^\alpha = \left\{ \tilde{U} + \frac{\tilde{p}}{\rho} - \frac{\mathrm{v}^2}{2}, \tilde{\mu} H_i, \mathrm{v}_i \right\} \tag{3.2}$$

Нетрудно проверить, что

$$v^\alpha P_\alpha = d\mathrm{E} \qquad v^\alpha Q_\alpha^j = dS^j \tag{3.3}$$

где E и S^j имеют представления (1.5). Вычислив по формулам (2.8), для матриц $A^0 = \left(a_{ij}\right)$, $A^m = \left(a_{ij}^m\right)$ в блочном виде получим выражения

$$A^0 = \begin{vmatrix} \dfrac{3p_{II}}{\rho^2}, & \vec{0}, & \dfrac{\mu_1 \vec{H}}{\rho} \\ \vec{0}^T, & \rho\hat{I}, & \hat{0} \\ \dfrac{\mu_1 \vec{H}^T}{\rho}, & \hat{0}, & \tilde{\mu}\hat{I} + \mu_2 \hat{h} \end{vmatrix} \quad A^m = \begin{vmatrix} 0, & \vec{a}^m, & \vec{0} \\ \left(\vec{a}^m\right)^T, & \hat{0}, & \hat{\mathrm{H}}^m \\ \vec{0}^T, & \left(\hat{\mathrm{H}}^m\right)^T, & \hat{0} \end{vmatrix} + A_0 \mathrm{v}^m \tag{3.4}$$

где

$$\left(\vec{a}^m\right)_j = \frac{p_\perp}{\rho}\delta_i^m H_j - \frac{\mu_1 H_i H_j H^m}{\rho}$$

$$\left(\hat{\mathrm{H}}^m\right)_{ij} = \left(\mu_w + \frac{p_\perp}{H^2}\right)\delta_i^m H_j - \left(\tilde{\mu}\delta_{ij} + \mu_2 \frac{H_i H_j}{H^2}\right)H^m$$

$$\left(\hat{h}\right)_{ij} = \frac{H_i}{H}\frac{H_j}{H},\ \mu_1 = \frac{p_\perp - 3p_{II}}{H^2},\ \mu_2 = \frac{4p_{II} - p_\perp}{H^2} \tag{3.5}$$

Условие положительной определенности матрицы A_0 сводится к неравенствам

$$\tilde{\mu} = \frac{p_\perp - p_{II}}{H^2} + \mu_e > 0\ ,\ 3\mu_e H^2 p_{II} - p_\perp^2 + 6p_{II}p_\perp > 0 \tag{3.6}$$

Решив эту систему неравенств, получим

$$\frac{p_\perp^2}{6p_\perp + 3\mu_e H^2} < p_{II} < p_\perp + \mu_e H^2 \tag{3.7}$$

При нарушении условий (3.7) в системе возникает неустойчивость, известная в физике плазмы как «шланговая неустойчивость» [2].

Нетрудно проверить, что условия (3.7) обеспечивают и выпуклость полной энергии.

Симметричную систему в окончательном виде представим в виде

$$\frac{3p_{II}H^2}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} + \frac{\mu_1 H_i}{\rho}\cdot\frac{DH_i}{Dt} + \left(\frac{p_\perp}{\rho}\delta_{ij} - \frac{\mu_1 H_i H_j}{\rho}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered}\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} + \frac{p_\perp}{\rho}\nabla\rho - \mu_1\frac{H^2}{\rho}\left(\hat{h}.\nabla\right)\rho + \frac{p_{II}}{H^2}\left(\overline{H}.\nabla\right)\overline{H} + \\ + \mu_0\overline{H}\times\nabla\times\overline{H} - \mu_2\overline{H}\left(\mathrm{I}_H^T : \nabla; \overline{H}\right) = 0\end{gathered} \tag{3.9}$$

$$\frac{\mu_1\overline{H}}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \left(\tilde{\mu}\mathrm{I} + \mu_2\mathrm{I}_H\right)\frac{D\overline{H}}{Dt} + \mu_0\overline{H}\nabla.\overline{v} - \tilde{\mu}\left(\overline{H}.\right)\overline{v} - \mu_2\overline{H}\left(\mathrm{I}_H : \nabla; \overline{v}\right) = 0 \tag{3.10}$$

$$\mu_1 = \frac{p_\perp - 3p_{II}}{H^2},\quad \mu_2 = \frac{4p_{II} - p_\perp}{H^2},\quad \mu_0 = \tilde{\mu} + \mu_1 + \mu_2$$

4. Рассмотрим внутреннюю энергию

$$U(\rho, H) = \frac{p_\perp}{\rho} + \frac{p_{II}}{2\rho} \tag{4.1}$$

В силу уравнений (1.3) внутренняя энергия в адиабатическом приближении является функцией не только плотности, как это имеет место в газовой динамике и магнитогазодинамике, но и величины магнитной индукции.

Вычислив дифференциал энергии, получим

$$dU = \frac{p_{II}}{\rho^2}d\rho + \frac{p_\perp - p_{II}}{\rho H}dH \tag{4.2}$$

Из этого соотношения следуют уравнения состояния

$$p_{II} = \rho^2\frac{\partial U}{\partial\rho},\ p_\perp = p_{II} + \rho H\frac{\partial U}{\partial H} \tag{4.3}$$

Можно изначально постулировать внутреннюю энергию в виде (4.1) и уравнения состояния в виде (4.3). Тогда уравнения (1.3) будут следствиями из постулированных.

Как было отмечено выше, из имеющих законов сохранения можно вывести дополнительные законы сохранения. Одним из таких законов является закон сохранения энтропии (при отсутствии ударных волн)

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \frac{\partial \rho s v^j}{\partial x^j} = 0 \tag{4.4}$$

В этом случае, согласно принципу равноприсутствия, энтропию следует ввести во всех уравнениях состояния и во внутреннюю энергию.

Следуя Р.В. Половину [11], в качестве энтропии можно выбрать величину

$$s = \frac{k}{2}\ln\frac{p_{II} p_{\perp}^2}{\rho^5} \tag{4.5}$$

где k – постоянная Больцмана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chew G.F., Goldberger M.L., Low F.E. The Boltzman eqation and the one-fluid hydromagnetic eqations in the absence of particle collissions. Proc. Roy. Soc., A 236, 112,1956.
2. Н. Кролл, А. Трайвелпис.Основы физики плазмы. М.: Мир. 1975.
3. Fridrics K.O., Lax P.D. Systems of conservation eqation with a convex extension. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 68, 1971, pp. 1668-1688.
4. Lax P.D. Hyperbolic systems of conservation laws. II, Comm. Pure Appl. Math. 10. 1957. pp.537-566.
5. Багдоев А.Г. Распространение волн в сплошных средах. Ереван.: Изд. АН Арм. ССР. 1984.
6. Минасян М.М. Приближенные уравнения нелинейных волн в неоднородных движущихся средах с учетом диссипации и дисперсии. // Уч. записки ЕрГУ. 3. 1978. С.46-52.
7. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука. 1978.
8. Годунов С.К. Симметрическая форма уравнений магнитной гидродинамики. // Численные методы МСС 3. 1972. 1. С.26-34.
9. Кондауров В.И. О законах сохранения и симметризация уравнений нелинейной теории термоупрутости. // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. 4. С.819-823.
10. Минасян М.М. Распространение слабых возмущений в бесстолкновительной плазме. //Уч. записки ЕрГУ, 2, 1975. С.28-38.
11. Половин Р.В. Выступление на 2-ом совещании по теор. и прикл. МГД./ Сб.: "Вопросы МГД и динамики плазмы". Рига, 1962.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
25.01.2005