

УДК 539.3

ВОЛНЫ ТИПА РЭЛЕЯ В СИСТЕМЕ ТОНКИЙ СЛОЙ – ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Белубекян М.В.

Մ.Վ. Բելուբեկյան

Ռելեյի տիպի ալիքները շերտ-կիսատարածություն համակարգում

Ուսումնասիրված են տեղայնացված առավելագույն ալիքների տարածումը, երբ շերտի և կիսատարածության միջև տրված են տարբեր տիպի եզրային պայմաններ: Ստացված են պարզեցված դիսպերսիոն հավասարումները: Որոշված են տեղայնացված ալիքների գոյության պայմանները:

M.V. Belubekyan

Rayleigh Type Waves in the Layer-Half-space System

It is supposed that elastic layer is thin. The correctness of the assumptions of Kirchhoff' plate theory for the layer is accepted. Two cases of boundary conditions (full contact and smooth contact) are considered.

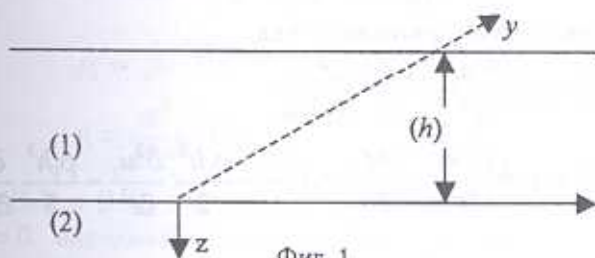
The dispersion equations are derived. The conditions of surface waves existens are determined.

Распространение поверхностных волн типа Рэлея в системе слой – полупространство было исследовано многими авторами.

Обзор ранних работ в этой области приводится в [1]. Из последних работ следует отметить [2,3], в которых рассмотрена задача о вынужденных колебаниях полосы, соединенной с полуплоскостью, где для обеих областей предполагается разная анизотропия.

В настоящей работе слой принимается тонким и для него считается применимым допущения теории пластин Кирхгофа. Получены дисперсионные уравнения задачи при различных контактных условиях между слоем и полупространством.

1. Рассматривается задача плоской деформации для полупространства, контактирующего с тонким слоем (фиг.1)



Принимается

$$u_1^{(i)} = u^{(i)}(x, z, t), u_3^{(i)} = w^{(i)}(x, z, t), u_2^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

Уравнения движения полупространства $z > 0$ в перемещениях имеют вид [4]

$$c_t^2 \Delta u^{(2)} + (c_e^2 - c_t^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2}$$

$$c_i^2 \Delta w^{(2)} + (c_e^2 - c_i^2) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

Как обычно, система уравнений (1.2) при помощи преобразования

$$u^{(2)} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w^{(2)} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.3)$$

приводится к уравнениям

$$c_e^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad c_i^2 \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.4)$$

При этом для используемых в дальнейшем напряжений получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(2)} &= \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \\ \sigma_{31}^{(2)} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

где λ, μ — коэффициенты Ляме для материала полупространства $z > 0$.

Для покрывающего полупространство тонкого слоя ($-h < z < 0$) принимаются допущения теории пластин Кирхгофа (с учетом независимости от координаты y)

$$u_1^{(1)} = u_1 - z \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad u_3^{(1)} = w_1, \quad u_1, w_1 \sim (x, t) \quad (1.6)$$

$$\sigma_{11}^{(1)} = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) \quad (1.7)$$

С учетом условий на свободной границе слоя $z = -h$

$$\sigma_{33}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{31}^{(1)} = 0 \quad (1.8)$$

уравнения колебания слоя принимают вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \sigma_{31}^{(1)}(0) = \rho_1 h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\rho_1 h^2}{2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2 \partial x} \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \sigma_{33}^{(1)}(0) = \rho_1 h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_1}{\partial x} - N_1 = -\frac{\rho_1 h^2}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\rho_1 h^3}{3} \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial t^2}$$

Здесь

$$\int_{-n}^0 \sigma_{11}^{(1)} dz \equiv T_1 = C \frac{\partial u_1}{\partial x} + K \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}, \quad \int_{-n}^0 z \sigma_{11}^{(1)} dz \equiv M_1 = -K \frac{\partial u_1}{\partial x} - D \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \quad (1.10)$$

$$\int_{-n}^0 \sigma_{33}^{(1)} dz \equiv N_1, \quad C = \frac{E_1 h}{1 - \nu_1^2}, \quad K = \frac{E_1 h^2}{2(1 - \nu_1^2)}, \quad D = \frac{E_1 h^3}{3(1 - \nu_1^2)} \quad (1.11)$$

После пренебрежения в уравнениях (1.9) членами

$$\frac{\rho_1 h^2}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\rho_1 h^2}{2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\rho_1 h^3}{3} \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial t^2}$$

что соответствует точности теории пластин Кирхгофа и подстановки (1.10), получаются следующие уравнения колебания слоя в перемещениях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(C \frac{\partial u_1}{\partial x} + K \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) + \sigma_{31}^{(1)}(0) &= \rho_1 h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} + \sigma_{33}^{(1)}(0) &= \rho_1 h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u_1}{\partial x} + D \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) + N_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

2. Пусть слой и полупространство жестко скреплены. Тогда на контактной границе $z=0$ должны выполняться условия непрерывности перемещений и напряжений

$$u_1^{(1)} = u_1^{(2)}, \quad w_1^{(1)} = w_1^{(2)}, \quad \sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)}, \quad \sigma_{31}^{(1)} = \sigma_{31}^{(2)} \quad (2.1)$$

С учетом (2.1) система уравнений (1.12) приводится к граничным условиям для уравнений (1.2) или (1.4) при $z=0$

$$\begin{aligned} C \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + K \frac{\partial^3 w^{(2)}}{\partial x^3} + \sigma_{31}^{(2)} &= \rho_1 h \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \\ D \frac{\partial^4 w^{(2)}}{\partial x^4} + K \frac{\partial^3 u^{(2)}}{\partial x^3} + \rho_1 h \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial t^2} &= \sigma_{33}^{(2)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

В [5] для слоя принимаются известные уравнения обобщенного плоского напряженного состояния и изгиба пластины (уравнения планарных и изгибных колебаний) без членов взаимодействия, т.е. без членов уравнения (2.2) с множителем K .

Общие решения уравнений (1.4), удовлетворяющие условиям затухания

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \psi = 0 \quad (2.3)$$

имеют вид

$$\varphi = A e^{-k p_1 z} \exp i(\omega t - kx), \quad \psi = B e^{-k p_2 z} \exp i(\omega t - kx) \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{1 - \theta \eta}, \quad p_2 = \sqrt{1 - \eta}, \quad 0 < \eta < 1 \\ \eta &= \frac{\omega^2}{k^2 c_t^2}, \quad \theta = \frac{c_t^2}{c_s^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

С учетом (1.3) и (1.4), значения функций, входящих в систему уравнений (2.2) при $z=0$, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} u^{(2)}(0) &= -k(iA + p_2 B) \exp i(\omega t - kx) \\ w^{(2)}(0) &= -k(p_1 A - iB) \exp i(\omega t - kx) \\ \sigma_{33}^{(2)}(0) &= \mu k^2 [(2 - \eta)A - 2ip_2 B] \exp i(\omega t - kx) \\ \sigma_{31}^{(1)}(0) &= \mu k^2 [(2ip_1 A + (2 - \eta)B) \exp i(\omega t - kx)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подстановка (2.6) в граничные условия (2.2) приводит к системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A и B .

$$\left(2 - \eta - \beta p_1 \eta kh - \alpha k^2 h^2 + \frac{2}{3} \alpha k^3 h^3 p_1\right) A_1 -$$

$$- i \left(2 p_2 - \beta \eta kh - \alpha p_2 k^2 h^2 + \frac{2}{3} \alpha k^3 h^3\right) B = 0 \quad (2.7)$$

$$i \left[2 p_1 + (2\alpha + \beta \eta) kh + \alpha p_1 k^2 h^2\right] A +$$

$$+ \left[2 - \eta + (2\alpha + \beta \eta) p_2 kh + \alpha k^2 h^2\right] B = 0$$

Здесь приняты обозначения

$$\alpha = \frac{\mu_1}{(1 - \nu_1)\mu}, \quad \beta = \frac{\rho_1}{\rho} \quad (2.8)$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.7) дает уравнение, определяющее фазовую скорость поверхностной волны типа Рэлея. Здесь это уравнение приводится с точностью $k^2 h^2 \ll 1$

$$R(\eta) \equiv (2 - \eta)^2 - 4 p_1 p_2 - [(2\alpha + \beta \eta) p_2 - \beta \eta p_1] \eta kh = 0 \quad (2.9)$$

Для получения более точного уравнения необходимо применить теорию, учитывающую поперечные сдвиги и инерцию вращения [6].

Уравнение (2.9) имеет корень $\eta = 0$, которому соответствует тривиальное решение, что нетрудно проверить. Исключая корень $\eta = 0$, аналогично тому, как это сделано в [7], уравнение (2.9) приведем к виду

$$R_1(\eta) \equiv \eta - 4(1 - \theta) p_2 (p_1 + p_2)^{-1} - [(2\alpha + \beta \eta) p_2 - \beta \eta p_1] kh = 0 \quad (2.10)$$

Уравнения (2.9) и (2.10) при $kh = 0$ совпадают с вариантами классического уравнения Рэлея.

Из свойств функции $R_1(\eta)$

$$R_1(0) = -2(1 - \theta) - 2\alpha kh < 0, \quad R_1(1) = 1 + \beta \sqrt{1 - \theta} kh > 0$$

$$R_1'(\eta) > 0 \quad \text{при } 0 < \eta < 1 \quad (2.11)$$

следует, что уравнение (2.10) имеет один и только один действительный корень. Поверхностная волна при наличии тонкого слоя, в отличие от волны Рэлея, является дисперсной.

3. Рассматривается система тонкий слой – полупространство в случае, когда на контактной границе $z = 0$ имеют место условия скользящего контакта

$$\sigma_{31}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{31}^{(2)} = 0, \quad w_1 = w^{(2)}, \quad \sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)} \quad (3.1)$$

С учетом (3.1) система уравнений (1.12) приводится к следующим граничным условиям при $z = 0$:

$$C \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + K \frac{\partial^3 w^{(2)}}{\partial x^3} = \rho_1 h \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^2}, \quad \sigma_{31}^{(2)} = 0$$

$$D \frac{\partial^4 w^{(2)}}{\partial x^4} + K \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + \rho_1 h \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial t^2} = \sigma_{33}^{(2)} \quad (3.2)$$

Используя выражения (2.6) и представление

$$u_1 = F \exp i(\omega t - kx) \quad (3.3)$$

для произвольных постоянных A, B, F получим систему однородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} i\alpha k^2 h p_1 A + \alpha k^2 h B - (2\alpha - \beta\eta)F &= 0 \\ \left(2 - \eta - \beta\eta p_1 k h + \frac{2}{3}\alpha k^3 h^3 p_1 \right) A - i(2p_2 - \\ - \beta k h + \frac{2}{3}\alpha k^3 h^3) B - i\alpha k h^2 F &= 0 \\ 2ip_1 A + (2 - \eta)B &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Равенство нулю детерминанта системы (3.4) дает искомое дисперсионное уравнение, которое с точностью $k^2 h^2 \ll 1$ имеет вид

$$R(\eta) \equiv (2 - \eta)^2 - 4p_1 p_2 + \beta p_1 \eta^2 k h = 0 \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) исключением корня тривиального решения $\eta = 0$ приводится к виду

$$R_1(\eta) \equiv \eta - 4(1 - \theta)p_2(p_1 + p_2)^{-1} + \beta p_1 \eta k h = 0 \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) в промежутке $0 < \eta < 1$ имеет единственный действительный корень, что следует из следующих свойств функции $R_1(\eta)$:

$$R_1(0) = -2(1 - \theta) < 0, \quad R_1(1) = 1 + \beta\sqrt{1 - \theta} k h, \quad R_1'(\eta) > 0 \quad (3.7)$$

4. Пусть, наконец, на границе $z = 0$ между слоем и полупространством заданы условия Навье (условия антискользящего контакта)

$$\sigma_{33}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(2)} = 0, \quad u_1 = u^{(2)}, \quad \sigma_{31}^{(1)} = \sigma_{31}^{(2)} \quad (4.1)$$

В этом случае система уравнений (1.2) приводится к следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} C \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + K \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + \sigma_{31}^{(2)} &= \rho_1 h \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2}, \quad \sigma_{33}^{(2)} = 0 \\ D \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + K \frac{\partial^3 u^{(2)}}{\partial x^3} + \rho_1 h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Подстановка в (4.2) выражений из (2.6) и представление

$$w_1 = G \exp i(\omega t - kx) \quad (4.3)$$

приведет к однородной системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A, B, G

$$\begin{aligned} i[2p_1 + (2\alpha - \beta\eta)kh]A + [2 - \eta + (2\alpha - \beta\eta)p_2 kh]B + i\alpha k h^2 G &= 0 \\ (2 - \eta)A - 2ip_2 B &= 0 \\ \alpha k h A - i\alpha p_2 k h B - k^{-1} \left(\beta\eta - \frac{2}{3}\alpha k^2 h^2 \right) G &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Дисперсионное уравнение, согласно (4.4), с точностью $k^2 h^2 \ll 1$ будет иметь вид

$$R(\eta) \equiv (2 - \eta)^2 - 4p_1 p_2 - (2\alpha - \beta\eta) p_2 \eta kh = 0 \quad (4.5)$$

Другой вариант уравнения (4.5) получается исключением корня $\eta = 0$

$$R_1(\eta) = \eta - 4(1 - \theta) p_2 (p_1 + p_2)^{-1} - (2\alpha - \beta\eta) p_2 kh = 0 \quad (4.6)$$

Также и в предыдущих случаях показывается, что уравнение (4.6) имеет в промежутке $0 < \eta < 1$ один и только один действительный корень.

5. В рассмотренных вариантах граничных условий получены дисперсионные уравнения, в которых члены с множителями $k^2 h^2$ и $k^3 h^3$ пренебрежены в согласии с точностью теории Кирхгофа. Следовательно, и система уравнений (1.12) содержит члены, влиянием которых можно пренебречь.

Они имеют такой же порядок, что и моменты инерции вращения и поперечные сдвиги. Анализ систем уравнений (2.7), (3.4) и (4.4) показывает, какими членами можно пренебречь.

В случае граничных условий жесткого контакта между слоем и полупространством (4.1) система уравнений (1.12) должна быть заменена следующей системой для более простой модели:

$$c \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \sigma_{13}^{(1)}(0) = \rho_1 h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \sigma_{33}^{(1)}(0) = \rho_1 h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \quad (5.1)$$

В случае статической задачи струнгера с растягивающей нагрузкой система (5.1) совпадает с моделью работы [8].

Таким же образом, когда на границе слоя и полупространства заданы условия скользящего контакта (3.1), уравнения (1.12) приводятся к упрощенному виду:

$$c \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + K \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} = \rho_1 h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \sigma_{33}^{(1)} = \rho_1 h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \quad (5.2)$$

Соответствующие уравнения для варианта граничных условий Навье имеют вид

$$c \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \sigma_{31}^{(1)}(0) = \rho_1 h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad K \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + \rho_1 h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0 \quad (5.3)$$

Если при решении задач пунктов 2-4, вместо уравнений (1.12) взять за основу для каждого варианта свои упрощенные системы уравнений (5.1)-(5.3), то соответствующие дисперсионные уравнения будут либо (2.9), либо (3.5), либо (4.5).

Следует отметить, что уравнения (1.12) получаются в общем случае в рамках теории пластин Кирхгофа. Однако, для конкретных вариантов условий контакта оказывается возможным делать дополнительные упрощения.

6. Как видно из дисперсионных уравнений, фазовые скорости поверхностных волн, в отличие от классической волны Рэлея, зависят от относительной длины волны (kh).

Численные результаты показывают, что фазовые скорости также существенно зависят от упругих характеристик слоя α и β .

В табл. 1 в качестве примера приведены значения безразмерной характеристики квадрата фазовой скорости (η) в зависимости от kh для

случая скользящего контакта, т.е. для уравнения (3.5). Численные расчеты проведены при $\theta = 0,25$ ($\nu = 1/3$) и $\beta = 2$

Таблица

kh	0	0,1	0,2	0,3
η	0,8696	0,8203	0,7687	0,7184

По результатам таблицы можно сделать вывод, что наличие тонкого покрытия приводит к значительному увеличению степени локализации волны в окрестности контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chattarjee S.N. Propagation of Rayleigh Waves in a Layer Lying over a Heterogeneous Half Space. // Pure and Applied Geophysics. 1971. V. 86. №3. P 69-79.
2. Белоконь А.В., Ремизов М.Ю. Гармонические колебания упругой изотропной полосы, жестко связанной с анизотропной полуплоскостью. Современные проблемы механики сплошной среды. // Труды V Межд. конф. Ростов-на Дону. 12-14 окт.1999. Ростов-на Дону. Изд. СКНЦ ВШ. 2000. Т. 2. С. 31-37.
3. Белоконь А.В., Ремизов М.Ю. Гармонические колебания в системе: анизотропная полоса-полуплоскость при жестком и скользящем соединении сред. // Изв. Вузов. Северо-Кавказский регион. Естествознания. 2002. № 3. С. 120-121.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.
5. Tiersten H.F. Elastic Surface Waves Guided by Thin Films. // Journal of Applied Physics. 1969. Vol. 40. №2. P 770-789.
6. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. (Прочность, устойчивость и колебания). М.: Наука. 1987. 360 с.
7. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах // В сб.: "Проблемы механики деформируемого твердого тела." Ереван: Изд. НАН Армении 1997. С. 79-96.
8. Муки Р., Стернберг Э. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке. // ПМ. Тр. Америк. общ. инж-механиков. 1968. С. Е. Т.35. №4. С.124-135.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
21.12.2004