ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №1, 2005 Механика

УДК 62-50

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ГАРАНТИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ МАНИПУЛЯТОРОМ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Айрапетян В.В., Гукасян А.А., Манукян А.А.

Վ.Վ. Հայրապետյան, Ա.Ա. Ղուկասյան, Ա.Ա. Մանուկյան
Մանիպուլյատորի ու ոչ լրիվ ինֆորմացիայով օպտիմալ երաշխավորված ղեկավարման մի խնդրի մասին

Նկարագրված է ոչ լրիվ ինֆորմացիայով օպտիմալ երաշխավորված ղեկավարման մի ալգորիթմ: Ենթադրվում է, որ նպատակային կետը կարող է գտնվել փուլային տարածության ինչ-որ բազմության մեջ, որի մասին ինֆորմացիան՝ տվյալ բազմության կամ մեկ այլ բազմության մեջ կետի գտնվելը, ճշգրտվում է բազմության եզրի վրա, կամ մինչև եզր հասնելը: Նշված ալգորիթմով ուսումնասիրված է երկօղակ մանիպուլյատորի բռնիչի օպտիմալ երաշխավորված ղեկավարման խնդիրը: Ստացված են օպտիմալ ղեկավարման ֆունկցիաներ նպատակային կետի էտապ առ էտապ ճշգրտման դեպքերում:

V.V. Hayrapetyan, A.A. Ghukasyan, A.A. Manukyan
One problem of optimal guaranteed control of the manipulator at the incomplete information

Описан один алгоритм оптимального гарантированного управления при неполной информации. Предполагается, что целевая точка находится в некотором множестве фазового пространства, информация о которой – нахождение точки в данном или в другом множестве–уточняется на границе множества или до достижения границы. С помощью описанного алгоритма исследована задача оптимального гарантированного управления схвата двухзвенного манипулятора. Получены оптимальные управляющие функции в случаях поэтапного уточнения местоположения целевой точки.

1. Описание алгоритма управления. Исследуется задача гарантированного управления механической системы при неопределенности положения целевой точки в начале процесса управления. Предполагается, что начальное состояние системы задано, а конечное состояние заранее неизвестно и уточняется в процессе движения [1].

Предполагается, что в начале движения системе управления известна не сама целевая точка, а некоторое выпуклое, закрытое, ограниченное множество, в котором она может находиться.

Поскольку положение целевой точки в пределах целевого множества произвольно, то необходимо использовать гарантированный метод управления. При таком подходе строится управление, называемое оптимально гарантирующим, рассчитывается соответствующий необходимый минимальный ресурс, который обеспечивает достижение целевой точки вне зависимости от ее положения в пределах целевого множества [2-3].

При достижении заданного множества или до этого получается дополнительная информация о целевой точке. Этой информацией является положение целевой точки в этом множестве или новое множество, где может находиться целевая точка.

Поскольку на границе множества получается дополнительная информация о целевой точке, то из начальной точки необходимо двигаться оптимально в смысле критерия качества в ту точку целевого множества, достижение которой требует наименьшей затраты. Если целевая точка не находится в заданном множестве, то точка получения информации берется как начальная точка и повторяется процесс построения управляющей функции и траектории движения для следующего целевого множества.

Уравнение движения системы в фазовом пространстве представим в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{u}),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,\ \mathbf{u} \in P \tag{1.1}$$

Качество переходного процесса оценивается следующим функционалом:

$$J = \int_{t_0}^{T} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt \tag{1.2}$$

где $\mathbf{x} - 2n$-мерный вектор состояния системы, P-множество допустимых управлений, $\mathbf{u} - n$-мерный вектор управления; t_0-начальный момент времени, $\mathbf{x}_0$-фиксированное начальное состояние, $F, \Phi \in C^2$.

Предполагается, что целевые множества не имеют взаимных пересечений и находятся в пределах множества достижимости, которое представляет собой выпуклое, закрытое, ограниченное множество в R^{2n}.

Предположим, что в начальный момент t_0 известно некоторое множество G_1, где может находиться целевая точка $(\mathbf{x}_1 \in G_1)$ и существует оптимальное управляющее воздействие, переводящее систему на множество G_1 за время $\bar{t}_1$. Ставится задача приведения системы из начальной точки $\mathbf{x}_0$ в произвольную точку $\overset{-1}{\mathbf{z}} \in G_1$ с минимизацией функционала

$$J_0 = \int_{t_0}^{\bar{t}_1} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt \tag{1.3}$$

Оптимальную фазовую траекторию и управляющую функцию представим в следующем виде:

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^0\left(\mathbf{x}_0, \overset{-1}{\mathbf{z}}, t_0, \bar{t}_1, t\right),\quad \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0\left(\mathbf{x}_0, \overset{-1}{\mathbf{z}}, t_0, \bar{t}_1, t\right) \tag{1.4}$$

а значение функционала (1.3) будет

$$\bar{J}_0 = \min_{\mathbf{u}\in P} \int_{t_0}^{\bar{t}_1} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt = \int_{t_0}^{\bar{t}_1} \Phi\left(\mathbf{x}^0\left(\mathbf{x}_0, \overset{-1}{\mathbf{z}}, t_0, \bar{t}_1, t\right), \mathbf{u}^0\left(\mathbf{x}_0, \overset{-1}{\mathbf{z}}, t_0, \bar{t}_1, t\right)\right)dt \tag{1.5}$$

Поскольку система (1.1) автономна и $F, \Phi \in C^2$, при следующих условиях

(1) $\begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xu} \\ \Phi_{ux} & \Phi_{uu} \end{bmatrix} > 0$

(2) выполняются какие-либо из следующих условий:

$$(a)\ F_{xx} = F_{xu} = F_{uu} = 0$$
$$(b)\ \Phi_x = 0$$

оптимальную управляющую функцию можно определить из принципа максимума [4,5].

Минимизируя (1.5) по $\overset{-1}{\mathbf{z}} \in G_1$

$$J_0^* = \min_{\overset{-1}{\mathbf{z}}\in G_1} \int_{t_0}^{\bar{t}_1} \Phi\left(\mathbf{x}^0\left(\mathbf{x}_0, \overset{-1}{\mathbf{z}}, t_0, \bar{t}_1, t\right), \mathbf{u}^0\left(\mathbf{x}_0, \overset{-1}{\mathbf{z}}, t_0, \bar{t}_1, t\right)\right)dt = \min_{\overset{-1}{\mathbf{z}}\in G_1} \min_{\mathbf{u}\in P} \int_{t_0}^{\bar{t}_1} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt \tag{1.6}$$

получим точку из G_1, до которой можно дойти, используя наименьший ресурс. Минимизирующий вектор обозначим через $\mathbf{z}_*^1$ с компонентами $\left(z_{1*}^1, \ldots, z_{2n*}^1\right)$.

Подставляя $\mathbf{z}_*^1$ в (1.4), получим оптимальное управляющее воздействие, которое приводит систему (1.1) на множество G_1 с наименьшими ресурсами, и соответствующую фазовую траекторию

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_*^1, t_0, \bar{t}_1, t\right), \quad \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^0\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_*^1, t_0, \bar{t}_1, t\right) \tag{1.7}$$

Поскольку положение целевой точки в множестве G_1 произвольно, то в точке $\mathbf{z}_*^1$ система управления должна иметь ресурс, который позволил бы дойти до любой точки $\mathbf{z}_1$ из множества G_1, начиная движение из точки $\mathbf{z}_*^1$. Для системы (1.1) ставится задача оптимального приведения из точки $\mathbf{z}_*^1$ в точку $\mathbf{z}_1$ с минимизацией функционала

$$J_0^{\,1} = \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_1+\theta_1} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt \tag{1.8}$$

где θ_1 –время пребывания на множестве G_1. При задаче быстродействия θ_1 будет свободным.

Решение задачи представим в следующем виде:

$$\bar{\mathbf{u}}^0 = \bar{\mathbf{u}}^0\left(\mathbf{z}_*^1, \mathbf{z}_1, \bar{t}_1, \theta_1, t\right), \quad \bar{\mathbf{x}}^0 = \bar{\mathbf{x}}^0\left(\mathbf{z}_*^1, \mathbf{z}_1, \bar{t}_1, \theta_1, t\right) \tag{1.9}$$

Подставляя (1.9) в (1.8) и максимизируя по $\mathbf{z}_1$

$$\bar{J}_0^{\,1} = \max_{\mathbf{z}_1\in G_1} \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_1+\theta_1} \Phi\left(\bar{\mathbf{x}}^0\left(\mathbf{z}_*^1, \mathbf{z}_1, \bar{t}_1, \theta_1, t\right), \bar{\mathbf{u}}^0\left(\mathbf{z}_*^1, \mathbf{z}_1, \bar{t}_1, \theta_1, t\right)\right)dt \tag{1.10}$$

получим тот наименьший ресурс, который необходим для решения задачи оптимального гарантированного управления системы (1.1) в случае, если целевая точка находится на множестве G_1. Соответствующая управляющая функция и траектория, переводящая систему из точки $\mathbf{z}_*^1$ в целевую точку $\mathbf{x}_1$, получаются подставлением координаты $\mathbf{x}_1$ в (1.9) (фиг.1)

$$\bar{\mathbf{u}}^0 = \bar{\mathbf{u}}^0\left(\mathbf{z}_*^1, \mathbf{x}_1, \bar{t}_1, \theta_1, t\right), \quad \bar{\mathbf{x}}^0 = \bar{\mathbf{x}}^0\left(\mathbf{z}_*^1, \mathbf{x}_1, \bar{t}_1, \theta_1, t\right) \tag{1.11}$$

Таким образом, начиная движение из точки $\mathbf{x}_0$ в момент времени t_0 с управляющей функцией

$$\mathbf{u}_0 = \begin{cases} \mathbf{u}^0\left(\mathbf{x}^0, \mathbf{z}_*^1, t_0, \bar{t}_1, t\right), & t \in \left[t_0, \bar{t}_1\right] \\ \bar{\mathbf{u}}^0\left(\mathbf{z}_*^1, \mathbf{x}_1, \bar{t}_1, \theta_1, t\right), & t \in \left[\bar{t}_1, \bar{t}_1 + \theta_1\right] \end{cases} \tag{1.12}$$

можно гарантированно дойти до целевой точки $\mathbf{x}_1$ при ее нахождении на множестве G_1. Значение функционала не будет больше $J_0^{\,*} + \bar{J}_0^{\,1}$ при любом положении точки $\mathbf{x}_1$.

Если на траектории $\mathbf{x}^0\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_*^1, t_0, \bar{t}_1, t\right)$ есть точка $\hat{\mathbf{x}}_1$, в которой получается информация о целевой точке $\mathbf{x}_1$ в пределах множества G_1, то с помощью принципа максимума строится оптимальная траектория $\bar{\mathbf{x}}^0\left(\hat{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_1, \hat{t}_1, \theta_1, t\right)$ и управляющая функция $\overline{\mathbf{u}}^{0}\left(\hat{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_1, \hat{t}_1, \theta_1, t\right)$, переводящая систему из точки $\hat{\mathbf{x}}_1$ в точку $\mathbf{x}_1$ и дающая минимум функционалу (1.2) на интервале $\left[\hat{t}_1, \bar{t}_1+\theta_1\right]$.

$$\hat{J}_0^{\,1}=\min_{\mathbf{u}} \int_{\hat{t}_1}^{\bar{t}_1+\theta_1} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt=\int_{\hat{t}_1}^{\bar{t}_1+\theta_1} \Phi\left(\overline{\mathbf{x}}^{0}\left(\hat{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_1, \hat{t}_1, \theta_1, t\right), \overline{\mathbf{u}}^{0}\left(\hat{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_1, \hat{t}_1, \theta_1, t\right)\right)dt \quad (1.13)$$

где $\hat{t}_1$–время получения информации в точке $\hat{\mathbf{x}}_1$. Очевидно, что в этом случае

$$\int_{t_0}^{\hat{t}_1} \Phi\left(\mathbf{x}^0\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_*^1, t_0, \bar{t}_1, t\right), \mathbf{u}^0\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_*^1, t_0, \bar{t}_1, t\right)\right)dt+\hat{J}_0^1 \le J_0^*+\overline{J}_0^1 \quad (1.14)$$

Если целевая точка не находится на множестве G_1, в точке $\mathbf{z}_*^1$ или $\hat{\mathbf{x}}_1$ задается новое целевое множество G_2. В качестве начальной точки $\mathbf{x}_0$ берется $\mathbf{z}_*^1$ или $\hat{\mathbf{x}}_1$ и строятся соответствующие управляющая функция и траектория для G_2, повторяя рассуждения предыдущего этапа.

Допустим, система находится в точке $\hat{\mathbf{x}}_{m-1}$, которая находится или на границе множества G_{m-1}, или на траектории, по которой система приближается к этому множеству. В этой точке получается информация о множестве G_m, где может находиться целевая точка $\mathbf{x}_1$ и существует оптимальное управляющее воздействие, переводящее систему на множество G_m за время $\bar{t}_m$. Ставится задача приведения системы (1.1) из точки $\hat{\mathbf{x}}_{m-1}$ в произвольную точку $\overline{\mathbf{z}}^{m} \in G_m$ с минимизацией функционала

$$J_{m-1}=\int_{\hat{t}_{m-1}}^{\bar{t}_m} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt \quad (1.15)$$

где $\hat{t}_{m-1}$–время получения информации.

Оптимальную управляющую функцию и фазовую траекторию представим в следующем виде:

$$\mathbf{x}^{m-1}=\mathbf{x}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \overline{\mathbf{z}}^{m}, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right) \quad \mathbf{u}^{m-1}=\mathbf{u}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \overline{\mathbf{z}}^{m}, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right) \quad (1.16)$$

а значение функционала будет

$$\overline{J}_{m-1}=\min_{\mathbf{u}\in P} \int_{\hat{t}_{m-1}}^{\bar{t}_m} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt=\int_{\hat{t}_{m-1}}^{\bar{t}_m} \Phi\left(\mathbf{x}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \overline{\mathbf{z}}^{m}, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right), \mathbf{u}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \overline{\mathbf{z}}^{m}, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right)\right)dt$$

Минимизируя $\overline{J}_{m-1}$ по $\overline{\mathbf{z}}^{m} \in G_m$

$$J_{m-1}^*=\min_{\overline{\mathbf{z}}^m\in G_m} \int_{\hat{t}_{m-1}}^{\bar{t}_m} \Phi\left(\mathbf{x}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \overline{\mathbf{z}}^{m}, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right), \mathbf{u}^0\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \overline{\mathbf{z}}^{m}, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right)\right)dt=\min_{\overline{\mathbf{z}}^m\in G_m}\min_{\mathbf{u}\in P} \int_{\hat{t}_{m-1}}^{\bar{t}_m} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt$$

получим точку из G_m, до которой можно дойти, используя наименьший ресурс.

Оптимальное управляющее воздействие, приводящее систему на множество G_m с наименьшими ресурсами, и соответствующая фазовая траектория будут (фиг.1)

$$\mathbf{u}^{m-1}=\mathbf{u}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \mathbf{z}_*^{m}, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right), \qquad \mathbf{x}^{m-1}=\mathbf{x}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \mathbf{z}_*^{m}, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right) \quad (1.17)$$

где $\mathbf{z}_*^m$ –минимизирующая точка из G_m.

Обозначим через $\mathbf{z}_m$ произвольную точку из множества G_m. Требуется найти управляющую функцию, которая переводит систему из точки $\mathbf{z}_*^m$ в точку $\mathbf{z}_m$, минимизируя функционал

$$J_{m-1}^m = \int_{\bar{t}_m}^{\bar{t}_m+\theta_m} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt \tag{1.18}$$

где θ_m –время пребывания на множестве G_m. При задаче быстродействия θ_m свободна.

Решая задачу (1.1), (1.18) с начальной точкой $\mathbf{z}_*^m$ и конечной точкой $\mathbf{z}_m$ и максимизируя по $\mathbf{z}_m$

$$\bar{J}_{m-1}^m = \max_{\mathbf{z}_m \in G_m} \int_{\bar{t}_m}^{\bar{t}_m+\theta_m} \Phi\left(\mathbf{x}^{m-1}\left(\mathbf{z}_*^m, \mathbf{z}_m, \bar{t}_m, \theta_m, t\right), \mathbf{u}^{m-1}\left(\mathbf{z}_*^m, \mathbf{z}_m, \bar{t}_m, \theta_m, t\right)\right)dt =$$

$$= \max_{\mathbf{z}_m \in G_m} \min_{\mathbf{u} \in P} \int_{\bar{t}_m}^{\bar{t}_m+\theta_m} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt$$

получим необходимый наименьший ресурс для решения задачи оптимального гарантированного управления для системы (1.1), если целевая точка находится в множестве G_m. Соответствующая управляющая функция и траектория, переводящие систему из точки $\mathbf{z}_*^m$ в целевую точку $\mathbf{x}_1$, будут

$$\bar{\mathbf{u}}^{m-1} = \bar{\mathbf{u}}^{m-1}\left(\mathbf{z}_*^m, \mathbf{x}_1, \bar{t}_m, \theta_m, t\right), \quad \bar{\mathbf{x}}^{m-1} = \bar{\mathbf{x}}^{m-1}\left(\mathbf{z}_*^m, \mathbf{x}_1, \bar{t}_m, \theta_m, t\right) \tag{1.19}$$

Если информация о целевой точке получается до достижения границы G_m, в точке $\hat{\mathbf{x}}_m$ траектории $\mathbf{x}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \mathbf{z}_*^m, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right)$, то для системы (1.1) строится оптимальная траектория и управляющая функция

$$\bar{\mathbf{x}}^{m-1} = \bar{\mathbf{x}}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_m, \mathbf{x}_1, \hat{t}_m, \theta_m, t\right), \quad \bar{\mathbf{u}}^{m-1} = \bar{\mathbf{u}}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_m, \mathbf{x}_1, \bar{t}_m, \theta_m, t\right) \tag{1.20}$$

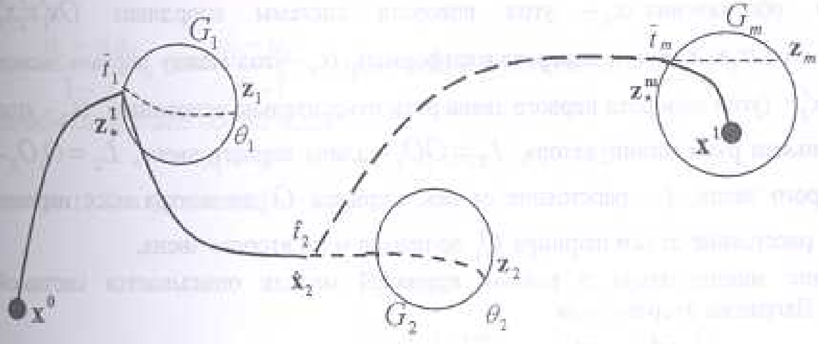
переводящие систему из точки $\hat{\mathbf{x}}_m$ в целевую точку $\mathbf{x}_1$ и минимизирующие функционал (1.2) на интервале $\left[\hat{t}_m, \bar{t}_m + \theta_m\right]$.

$$\hat{J}_{m-1}^m = \min_{\mathbf{u}} \int_{\hat{t}_m}^{\bar{t}_m+\theta_m} \Phi(\mathbf{x},\mathbf{u})dt \tag{1.21}$$

где $\hat{t}_m$ –время получения информации в точке $\hat{\mathbf{x}}_m$. В этом случае

$$\int_{\bar{t}_{m-1}}^{\hat{t}_m} \Phi\left(\mathbf{x}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \mathbf{z}_*^m, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right), \mathbf{u}^0\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \mathbf{z}_*^m, \bar{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right)\right)dt + \hat{J}_{m-1}^m \le J_{m-1}^* + \bar{J}_{m-1}^m \tag{1.22}$$

Таким образом, начиная движение из точки $\hat{\mathbf{x}}_{m-1}$ в момент времени $\hat{t}_{m-1}$ с



Фиг.1

ресурсами $J_{m-1}^* + \bar{J}_{m-1}^m$, с управляющей функцией

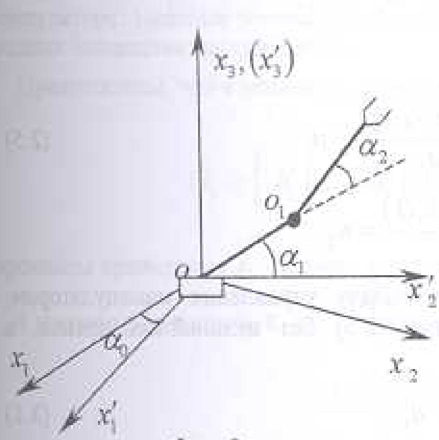
$$\mathbf{u}_{m-1} = \begin{cases} \mathbf{u}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \mathbf{z}_*^m, \hat{t}_{m-1}, \bar{t}_m, t\right), & t \in \left[\hat{t}_{m-1}, \bar{t}_m\right] \\ \bar{\mathbf{u}}^{m-1}\left(\mathbf{z}_*^m, \mathbf{x}_1, \bar{t}_m, \theta_m, t\right), & t \in \left[\bar{t}_m, \bar{t}_m + \theta_m\right] \end{cases} \quad (1.23)$$

или

$$\mathbf{u}_{m-1} = \begin{cases} \mathbf{u}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \mathbf{z}_*^m, \hat{t}_{m-1}, \hat{t}_m, t\right), & t \in \left[\hat{t}_{m-1}, \hat{t}_m\right] \\ \bar{\mathbf{u}}^{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_m, \mathbf{x}_1, \hat{t}_m, \theta_m, t\right), & t \in \left[\hat{t}_m, \bar{t}_m + \theta_m\right] \end{cases} \quad (1.24)$$

можно гарантированно дойти до целевой точки $\mathbf{x}_1$ при ее нахождении во множестве G_m.

2. Расчетная модель двухзвенного манипулятора и уравнения движения. Рассматривается двухзвенный антропоморфный манипулятор типичной конструкции [6], состоящий из подвижной платформы и механической руки со схватом (фиг. 2). Предполагается, что рука представляет собой два абсолютно твердых тела (звена), соединенных шарниром O_1. Первое звено посредством шарнира O связано с платформой, а на конце второго звена расположен схват с грузом. Шарниры O, O_1 идеальные, цилиндрические. Управление движением манипулятора осуществляется при помощи электромеханических приводов, каждый из которых содержит линейный электродвигатель постоянного тока с независимым возбуждением и редуктор.



Фиг. 2

Для описания движения манипулятора введем две прямоугольные системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $Ox_1'x_2'x_3'$ с общим началом O и осью вращения платформы Ox_3. Система координат $Ox_1x_2x_3$ неподвижная, $Ox_1'x_2'x_3'$ жестко связана с платформой, координатная плоскость $Ox_2'x_3'$ совпадает с плоскостью руки манипулятора.

Введем обозначения: α_0 – угол поворота системы координат $Ox_1'x_2'x_3'$ относительно $Ox_1x_2x_3$ (угол поворота платформы), α_1 – угол между первым звеном и осью Ox_2' (угол поворота первого звена руки относительно основания), α_2 – угол между звеньями руки манипулятора, $L_1 = OO_1$ – длина первого звена, $L_2 = O_1O_2$ – длина второго звена, l_1 – расстояние от оси шарнира O до центра масс первого звена, l_2 – расстояние от оси шарнира O_1 до центра масс второго звена.

Движение манипулятора в рамках принятой модели описывается системой уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot\alpha_i} - \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} + Q_i \qquad (i = 0,1,2) \tag{2.1}$$

Уравнения движений манипулятора получатся в следующем виде:

$$\begin{gathered} I_0\ddot\alpha_0 + f_0(\alpha,\dot\alpha,\ddot\alpha) = Q_0 \\ A_{11}\ddot\alpha_1 + A_{12}\ddot\alpha_2 + f_1(\alpha,\dot\alpha,\ddot\alpha) = Q_1 \\ A_{21}\ddot\alpha_1 + A_{22}\ddot\alpha_2 + f_2(\alpha,\dot\alpha,\ddot\alpha) = Q_2 \end{gathered} \tag{2.2}$$

С целью дальнейшего упрощения предполагаем, что вращение манипулятора в целом относительно оси Ox_3 происходит независимо от остальных движений. При этом уравнения (2.2) принимают вид

$$\begin{gathered} A_{00}\ddot\alpha_0 = Q_0 \\ A_{11}\ddot\alpha_1 + A_{12}\ddot\alpha_2 + f_{11}(\alpha,\dot\alpha,\ddot\alpha) = Q_1 \\ A_{21}\ddot\alpha_1 + A_{22}\ddot\alpha_2 + f_{22}(\alpha,\dot\alpha,\ddot\alpha) = Q_2 \end{gathered} \tag{2.3}$$

где $A_{ij}\ (i,j = 0,1,2)$ –постоянные коэффициенты, $f_{ii}(\alpha,\dot\alpha,\ddot\alpha)\ (i = 1,2)$ –нелинейные члены соответствующих уравнений [6].

После перехода к безразмерным переменным

$$t' = \frac{t}{T_*};\quad u_i' = \frac{n_i u_i T_*^2}{A_{ii}};\quad v_i' = \frac{m_i v_i T_*^2}{A_{ii}} \quad (i = 0,1,2) \tag{2.4}$$

уравнения (2.3) принимают вид

$$\begin{gathered} \ddot\alpha_0 = u_0 \\ \ddot\alpha_1 + \frac{A_{12}}{A_{11}}\ddot\alpha_2 + \frac{f_{11}(\alpha,\dot\alpha,\ddot\alpha)}{A_{11}} = u_1 \\ \ddot\alpha_1 + \ddot\alpha_2 + \frac{f_{22}(\alpha,\dot\alpha,\ddot\alpha)}{A_{22}} = u_2 \end{gathered} \tag{2.5}$$

3. Применение алгоритма. Рассмотрим задачу управления манипулятором, движение которого описывается уравнениями (2.5) без нелинейных членов, а $\alpha_0 = \mathrm{const}$

$$\begin{gathered} \ddot\alpha_1 + A\ddot\alpha_2 = u_1 \\ \ddot\alpha_1 + \ddot\alpha_2 = u_2 \end{gathered} \tag{3.1}$$

уравнение (3.1) напишем в следующем виде:

$$\ddot{\alpha}_1 = u$$
$$\ddot{\alpha}_2 = v \tag{3.2}$$

где $u = \dfrac{u_1 - Au_2}{1-A}$, $v = \dfrac{u_1 - u_2}{A-1}$ – управляющие функции, $A = A_{12} / A_{11}$

Введем следующие обозначения:

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \dot{\alpha}_1,\ x_3 = \alpha_2,\ x_4 = \dot{\alpha}_2$$

Уравнения (3.2) в фазовом пространстве будут

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = v \end{cases} \tag{3.3}$$

с начальным условием

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{3.4}$$

где $\{u, v\}$–управляющие функции, $\mathbf{x}$–фазовый вектор, $\mathbf{x}_0$–начальное состояние, t_0–начальный момент времени.

Функционал, характеризующий качество переходного процесса, представим в виде

$$J = \int_{t_0}^{T} \left(u^2 + v^2\right) dt \tag{3.5}$$

Требуется оптимально гарантированно привести схват манипулятора из заданной начальной точки $\mathbf{x}_0$ в целевую точку $\mathbf{x}^T$.

Допустим, что целевые множества имеют следующий вид:

$$G_i = \left\{ b_1^i \left(x_1 + a_1^i\right)^2 + b_3^i \left(x_3 + a_3^i\right)^2 \le 1 \right\} \tag{3.6}$$

где b_1, b_3, a_1, a_3–постоянные величины и находятся в рабочем пространстве манипулятора. Целевые множества не имеют взаимных пересечений и находятся в пределах множества достижимости.

Предположим, что в момент t_0 известно множество

$$G_1 = \left\{ b_1^1 \left(x_1 + a_1^1\right)^2 + b_3^1 \left(x_3 + a_3^1\right)^2 \le 1 \right\} \tag{3.7}$$

с временем приведения $\bar{t}_1$. Ставится задача приведения системы из начальной точки $\mathbf{x}_0$ в произвольную точку $\overset{-1}{\mathbf{z}} \in G_1$ с минимизацией функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left(u^2 + v^2\right) dt \tag{3.8}$$

Применяя принцип максимума к системе (3.3), получим фазовую траекторию и оптимальную управляющую функцию, обеспечивающие минимум функционалу (3.8)

$$\begin{cases} u = c_1^1 t + c_2^1 \\ v = c_3^1 t + c_4^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = c_1^1 \dfrac{t^3}{6} + c_2^1 \dfrac{t^2}{2} + c_5^1 t + c_6^1, & x_3 = c_3^1 \dfrac{t^3}{6} + c_4^1 \dfrac{t^2}{2} + c_7^1 t + c_8^1 \\ x_2 = c_1^1 \dfrac{t^2}{2} + c_2^1 t + c_5^1, & x_4 = c_3^1 \dfrac{t^2}{2} + c_4^1 t + c_7^1 \end{cases} \tag{3.9}$$

где

$$c_1^1 = \frac{6\left(-2x_{01} - \bar{t}_1 x_{02} + 2\bar{z}_1^1 - \bar{t}_1 \bar{z}_2^1 + t_0\left(x_{02} + \bar{z}_2^1\right)\right)}{\left(t_0 - \bar{t}_1\right)^3}$$

$$c_2^1 = \frac{1}{\left(t_0 - \bar{t}_1\right)^3}\left(-2t_0^{\,2}\left(x_{02} + 2\bar{z}_2^1\right) + 2t_0\left(3x_{01} - 3\bar{z}_1^1 + \bar{t}_1\left(\bar{z}_2^1 - x_{02}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + 2\bar{t}_1\left(3x_{01} - 3\bar{z}_1^1 + \bar{t}_1\left(\bar{z}_2^1 + 2x_{02}\right)\right)\right)$$

$$c_3^1 = \frac{6\left(-2x_{03} - \bar{t}_1 x_{04} + 2\bar{z}_3^1 - \bar{t}_1 \bar{z}_4^1 + t_0\left(x_{04} + \bar{z}_4^1\right)\right)}{\left(t_0 - \bar{t}_1\right)^3}$$

$$c_4^1 = \frac{1}{\left(t_0 - \bar{t}_1\right)^3}\left(-2t_0^{\,2}\left(x_{04} + 2\bar{z}_4^1\right) + 2t_0\left(3x_{03} - 3\bar{z}_3^1 + \bar{t}_1\left(\bar{z}_4^1 - x_{04}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + 2\bar{t}_1\left(3x_{03} - 3\bar{z}_3^1 + \bar{t}_1\left(\bar{z}_4^1 + 2x_{04}\right)\right)\right)$$

$$c_5^1 = \frac{1}{\left(t_0 - \bar{t}_1\right)^3}\left(-\bar{t}_1^{\,3} x_{02} + t_0^{\,3}\bar{z}_2^1 + t_0^{\,2}\bar{t}_1\left(2x_{02} + \bar{z}_2^1\right) - t_0\bar{t}_1\left(6x_{01} - 6\bar{z}_1^1 + \bar{t}_1\left(x_{02} + 2\bar{z}_2^1\right)\right)\right) \tag{3.10}$$

$$c_6^1 = \frac{1}{\left(t_0 - \bar{t}_1\right)^3}\left(-\bar{t}_1^{\,3} x_{01} + t_0\bar{t}_1^{\,2}\left(3x_{01} + \bar{t}_1 x_{02}\right) + t_0^{\,3}\left(\bar{z}_1^1 - \bar{t}_1\bar{z}_2^1\right) + t_0^{\,2}\bar{t}_1\left(-3\bar{z}_1^1 + \bar{t}_1\left(\bar{z}_2^1 - x_{02}\right)\right)\right)$$

$$c_7^1 = \frac{1}{\left(t_0 - \bar{t}_1\right)^3}\left(-\bar{t}_1^{\,3} x_{04} + t_0^{\,3}\bar{z}_4^1 + t_0^{\,2}\bar{t}_1\left(2x_{04} + \bar{z}_4^1\right) - t_0\bar{t}_1\left(6x_{03} - 6\bar{z}_3^1 + \bar{t}_1\left(x_{04} + 2\bar{z}_4^1\right)\right)\right)$$

$$c_8^1 = \frac{1}{\left(t_0 - \bar{t}_1\right)^3}\left(-\bar{t}_1^{\,3} x_{03} + t_0\bar{t}_1^{\,2}\left(3x_{03} + \bar{t}_1 x_{04}\right) + t_0^{\,3}\left(\bar{z}_3^1 - \bar{t}_1\bar{z}_4^1\right) + t_0^{\,2}\bar{t}_1\left(-3\bar{z}_3^1 + \bar{t}_1\left(\bar{z}_4^1 - x_{04}\right)\right)\right)$$

$$\bar{J}_0 = \min_{u \in P} \int_{t_0}^{\bar{t}_1} \left(u^2 + v^2\right) dt = \int_{t_0}^{\bar{t}_1} \left[\left(c_1^1 t + c_2^1\right)^2 + \left(c_3^1 t + c_4^1\right)^2\right] dt \tag{3.11}$$

Минимизируя (3.11) по $\bar{\mathbf{z}}^1 \in G_1$

$$J_0^* = \min_{\bar{\mathbf{z}}^1 \in G_1} \int_{t_0}^{\bar{t}_1} \left[\left(c_1^1 t + c_2^1\right)^2 + \left(c_3^1 t + c_4^1\right)^2\right] dt = \min_{\bar{\mathbf{z}}^1 \in G_1} \min_{u \in P} \int_{t_0}^{\bar{t}_1} \left(u^2 + v^2\right) dt \tag{3.12}$$

получим точку из G_1, имеющую кратчайшее расстояние от точки $\mathbf{x}_0$ в смысле функционала (3.8). Минимизирующий вектор обозначим через $\mathbf{z}_*^1$ с компонентами

$\left(z_{1*}^1, z_{2*}^1, z_{3*}^1, z_{4*}^1\right)$.

$$z_{1*}^1 = \frac{\lambda a_1^1 b_1^1 (t_0 - t_1)^3 + 3\left(x_{01} + \left(\bar{t}_1 - t_0\right) x_{02}\right)}{3 + \lambda b_1^1 \left(\bar{t}_1 - t_0\right)^3}$$

$$z_{2*}^1 = \frac{-3\lambda a_1^1 b_1^1 (t_0 - t_1)^2 + 6x_{02} + \lambda b_1^1 \left(\bar{t}_1 - t_0\right)^2 \left(-3x_{01} + \left(t_0 - \bar{t}_1\right) x_{02}\right)}{6 + 2\lambda b_1^1 \left(\bar{t}_1 - t_0\right)^3}$$

$$z_{3*}^1 = \frac{\lambda a_3^1 b_3^1 (t_0 - t_1)^3 + 3\left(x_{03} + \left(\bar{t}_1 - t_0\right) x_{04}\right)}{3 + \lambda b_3^1 \left(\bar{t}_1 - t_0\right)^3}$$

$$z_{4*}^1 = \frac{-3\lambda a_3^1 b_3^1 (t_0 - t_1)^2 + 6x_{04} + \lambda b_3^1 \left(\bar{t}_1 - t_0\right)^2 \left(-3x_{03} + \left(t_0 - \bar{t}_1\right) x_{04}\right)}{6 + 2\lambda b_3^1 \left(\bar{t}_1 - t_0\right)^3}$$

где λ определяется из следующего уравнения:

$$\frac{9b_1^1\left(a_1^1 + x_{01} + \left(\bar{t}_1 - t_0\right) x_{02}\right)^2}{\left(3 + \lambda b_1^1 \left(\bar{t}_1 - t_0\right)^3\right)^2} + \frac{9b_3^1\left(a_3^1 + x_{03} + \left(\bar{t}_1 - t_0\right) x_{04}\right)^2}{\left(3 + \lambda b_3^1 \left(\bar{t}_1 - t_0\right)^3\right)^2} = 1. \tag{3.13}$$

Когда $b_1^1 = b_3^1 = b^1$

$$\lambda = \frac{3\left(\sqrt{b^1}\sqrt{\begin{aligned}&a_1^{12} + a_3^{12} + 2a_1^1\left(x_{01} + (\bar{t}_1 - t_0) x_{02}\right) + 2a_3^1\left(x_{03} + (\bar{t}_1 - t_0) x_{04}\right) + \\ &+ \left(x_{01} + \left(\bar{t}_1 - t_0\right) x_{02}\right)^2 + \left(x_{03} + \left(\bar{t}_1 - t_0\right) x_{04}\right)^2\end{aligned}} + 1\right)}{b^1\left(t_0 - \bar{t}_1\right)^3} \tag{3.14}$$

Подставляя $\mathbf{z}_*^1$ в (3.9), получим оптимальное управляющее воздействие, приводящее систему (3.3) на множество G_1 с наименьшими ресурсами, и соответствующую фазовую траекторию.

Поскольку положение целевой точки на множестве G_1 произвольно, то в точке $\mathbf{z}_*^1$ система управления должна иметь столько ресурса, который позволил бы дойти до любой точки $\mathbf{z}_1$ из множества G_1, начиная движение из точки $\mathbf{z}_*^1$. Для системы (3.3) ставится следующая задача оптимального управления. Требуется найти управляющую функцию $\mathbf{u}_0$, которая переводит систему из точки $\mathbf{z}_*^1$ в точку $\mathbf{z}_1$, минимизируя функционал

$$J_0^{\,1} = \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_1 + \theta_1} \left(u^2 + v^2\right) dt \tag{3.15}$$

где θ_1 –время пребывания на множестве G_1.

Решая задачу (3.3), (3.15) по принципу максимума, найдем соответствующую управляющую функцию и траекторию, которые определяются из уравнений (3.9), где

$$\mathbf{x}_0 \to \mathbf{z}_*^1,\ \bar{\mathbf{z}}^1 \to \mathbf{z}_1,\ t_0 \to \bar{t}_1,\ \bar{t}_1 \to \left(\bar{t}_1 + \theta_1\right)$$

Подставляя эти уравнения в (3.15) и максимизируя по $\mathbf{z}_1$

$$\overline{J}_0^{\,1} = \max_{z_1 \in G_1} \min_{u} \int_{t_1}^{t_1+\theta_1} \left(u^2 + v^2\right) dt \tag{3.16}$$

получим тот наименьший ресурс, который необходим для решения задачи оптимального гарантированного управления системы (3.3), начиная движение из точки $\mathbf{z}_*^1$ в случае, если целевая точка находится на множестве G_1. Соответствующая управляющая функция и траектория, переводящие систему из точки $\mathbf{z}_*^1$ в целевую точку $\mathbf{x}^T$, получаются подставлением координаты $\mathbf{z}_1 \to \mathbf{x}^T$.

Таким образом, начиная движение из точки $\mathbf{x}_0$ в момент времени t_0 с ресурсами $J_0^* + \overline{J}_0^{\,1}$, с соответствующими управляющими функциями можно гарантированно дойти до целевой точки $\mathbf{x}^T$ при ее нахождении во множестве G_1.

Если целевая точка не находится в множестве G_1, в точке $\mathbf{z}_*^1$ задается новое целевое множество G_2:

$$G_2 = \left\{ b_1^2 x_1^{\,2} + b_3^2 x_3^{\,2} \le 1 \right\} \tag{3.17}$$

в качестве начальной точки берется $\mathbf{z}_*^1$ и повторяются предыдущие рассуждения и вычисления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420с.
2. Меликян А.А Минимаксная задача управления при неполной информации о положении целевой точки. // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1989. №2. С.111-118.
3. Гукасян А.А., Манукян А.А. О гарантированном управлении материальной точки при неполной информации. // Уч. записки ЕГУ. 2002. №1. С.39-48.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392с.
5. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
6. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы. М.: Наука. 1989. 363с.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
29.10.2004