ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №1, 2005 Механика

УДК 531.36

О ПРИМЕНЕНИИ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ K_Δ^ω- УСТОЙЧИВОСТИ

Аванян В.Т., Аванян М.В.

Վ.Տ. Ավանյան, Մ.Վ. Ավանյան

Լյապունովի վեկտոր-ֆունկցիայի կիրառությունը K_Δ^ω -կայունության խնդիրներում

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է բարդ համակարգի K_Δ^ω - կայունությունը Լյապունովի վեկտոր-ֆունկցիայի կիրառությամբ, երբ ենթահամակարգերը փոխկապակցված են գծայնորեն: Ստացված է ամբողջովին ասիմպտոտիկ K_Δ^ω - կայունության համար բավարար պայման:

V.T. Avanyan, M.V. Avanyan

An application of Lyapunov's method in K_Δ^ω - stability problems

В работе рассматривается K_Δ^ω - устойчивость сложных систем с применением вектор-функции Ляпунова, когда подсистемы связаны линейно. Получено достаточное условие для асимптотической K_Δ^ω -устойчивости в целом.

Пусть уравнение возмущенного процесса имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = X_i(x_i, t) + D_i u_i, \qquad y_i = H_i x_i \\ u_i = \sum\limits_{j=1}^{k} F_{ij} y_j \qquad\qquad (i = 1, \dots, k) \end{cases} \tag{1.1}$$

где функция $X_i(x_i, t)$ непрерывна по x_i и t, имеет непрерывные и ограниченные частные производные по координатам вектора x_i, $X_i(0, t) = 0$, $x_i - n_i$-мерный вектор $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n\right)$, u_i, y_i–векторы с размерностями q_i, матрицы F_{ij}, D_i, H_i–постоянные, соответственно с размерностями $p_i \times q_j$, $n_i \times p_i$, $q_i \times n_i$. Матрица $F = \left(F_{ij}\right)_1^k$ полностью характеризует взаимосвязь отдельных подсистем.

Очевидно, уравнения подсистем (1.1) можно переписать в форме

$$\dot{x}_i = X_i(x_i, t) + \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j, \; c_{ij} = D_i F_{ij} H_j, \quad c_{ii} = 0 \; (i = 1, \dots, k) \tag{1.2}$$

Предположим, для каждого уравнения

$$\dot{x}_i = X_i(x_i, t) \; \left(X_i(0, t) = 0\right) \; (i = 1, \dots, k) \tag{1.3}$$

найдена функция Ляпунова

$$V_i(x_i, t) = \left(B_i(t) x_i, x_i\right) \; \left(B_i(t) = G_i^{-1^*}(t) G_i^{-1}(t)\right) \tag{1.4}$$

удовлетворяющая условиям

$$\frac{1}{n_i\omega_0^2}\|x_i\|^2 \le V_i(x_i,t) \le \frac{n_i\omega_0^2}{m_i^2}\|x_i\|^2$$

$$\dot{V}_i(x_i,t) \le -c_i\|x_i\|^2, \ (c_i > 0) \tag{1.5}$$

$$\|\mathrm{grad}V_i\| \le \frac{2n_i\omega_0^2}{m_i^2}\|x_i\|$$

Как известно [1], при вышеизложенных предположениях относительно функции $X_i(x_i,t)$, для существования функции (1.4), удовлетворяющей условиям (1.5), необходимо и достаточно, чтобы тривиальное решение подсистемы (1.3) было экспоненциально устойчиво, т. е. чтобы существовали две положительные постоянные β и Q такие, что для любого решения подсистемы (1.3) было справедливо при всех $t \ge t_0$ неравенство

$$\|x_i(t,x_i^0,t_0)\| \le Q\,e^{-\beta(t-t_0)} \tag{1.6}$$

В дальнейшем будем предполагать, что для каждой подсистемы вида (1.3) условия (1.6), а следовательно, и (1.5), справедливы. Известно, что если для любого решения подсистемы (1.3) выполняется (1.6), то его тривиальное решение асимптотически K_Δ^∞- устойчиво в целом, т. е. существует матрица $G(t) \in K_\Delta^\infty$ такая, что для любого достаточно малого $\rho > 0$ числа любое возмущение $x_i(t) = x_i(t;t_0,x_i^0)$, начальное значение которого удовлетворяет условию

$$\left(G_i^{-1}(t_0)x_i^0;\ G_i^{-1}(t_0)x_i^0\right) \le \rho^2 \tag{1.7}$$

для всех $t \ge t_0$ удовлетворяет условию

$$\left(G_i^{-1}(t)x_i(t);\ G_i^{-1}(t)x_i(t)\right) \le \rho^2 \tag{1.8}$$

а все возмущения удовлетворяют условию

$$\lim_{t\to+\infty} x_i\left(t;t_0,x_i^0\right) = 0 \tag{1.9}$$

От (1.7) и (1.8) следует [2], что область допустимых возмущений $x_i(t)$ определяется определенно положительной эрмитовой формой (1.4), которая определена в некоторой области

$$\left\{t \in [t_0,\infty);\ \|x_i\| \in \mathfrak{R}_{\Delta}^{n_i}\right\} \tag{1.10}$$

причем

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \le \omega(t) \le \omega_0 < \infty;\ \ \left|\det G_i(t)\right| \ge m_i > 0 \text{ на } [t_0,\infty) \tag{1.11}$$

Полная производная по t формы (1.4) в силу подсистемы (1.2) будет

$$\dot{V}_i(x_i,t) = \left(\dot{B}_i(t)x_i,x_i\right) + \left(\mathrm{grad}V_i, X_i\right) + \left(\mathrm{grad}V_i, \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j\right) \tag{1.12}$$

Для первого слагаемого (1.12) в области (1.10) имеем

$$\lambda_{\min}^{(i)}(\dot{B}(t))\|x_i\|^2 \le \left(\dot{B}_i(t)x_i,x_i\right) \le \lambda_{\max}^{(i)}(\dot{B}(t))\|x_i\|^2 \tag{1.13}$$

где $\lambda^{(t)}_{\min}(\dot{B}(t))$ и $\lambda^{(t)}_{\max}(\dot{B}(t))$ –наименьшее и наибольшее характеристические числа матрицы $\dot{B}(t)$ в точке t.

Так как $\operatorname{grad} V_i = 2B_i(t)x_i$, то на $[t_0,\infty)$ имеем

$$\|\operatorname{grad} V_i\| \le 2\|B_i(t)\|\|x_i\| \le 2n_i\,\omega_0^2 m_i^{-2}\|x_i\| \tag{1.14}$$

Из существования непрерывного и ограниченного частного производного функции $X_i(x_i,t)$ по координатам вектора x_i следует выполнение условий Липшица для $X_i(x_i,t)$ в области (1.10):

$$\|X_i(x_i,t) - X_i(x_i',t)\| \le M_i\|x_i - x_i'\|$$

Откуда, с учетом $X_i(0,t) = 0$, получаем $\|X_i(x_i,t)\| \le M_i\|x_i\|$.

Так как для координат векторов X_i и $\operatorname{grad} V_i$ имеем

$$(X_i(x,t))_j \le \|X_i(x_i,t)\| \le M_i\|x_i\|,\ \left(\frac{\partial V_i(x_i,t)}{\partial x_i}\right)_j \le \|\operatorname{grad} V_i\| \le \frac{2n_i\,\omega_0^2}{m_i^2}\|x_i\|,$$

то в области (1.10) получаем

$$(\operatorname{grad} V_i, X_i) \le \frac{2n_i^2\,\omega_0^2}{m_i^2} M_i\|x_i\|^2$$

$$\left(grad\, V_i,\ \sum_{j=1}^{k} c_{ij}\,x_j\right) \le \frac{2n_i^2\,\omega_0^2}{m_i^2}\|c_{ij}\|\cdot\|x_i\|^2 \tag{1.15}$$

С учетом (1.13) и (1.15) из (1.12), в области (1.10), будем иметь

$$\dot{V}_i(x_i,t) \le -\left[c_i - \frac{2n_i^2\,\omega_0^2}{m_i^2}\|c_{ij}\|\right]\cdot\|x_i\|^2 \tag{1.16}$$

Откуда следует, что при

$$\|c_{ij}\| < \frac{m_i^2}{2n_i^2\,\omega_0^2}c_i \tag{1.17}$$

функция $\dot{V}_i$ будет определенно отрицательной в (1.10) и

$$\dot{V}_i(x_i,t) \le -c_i^*\cdot\|x_i\|^2\ \left(c_i^* = c_i - \frac{2n_i^2\,\omega_0^2}{m_i^2}\|c_{ij}\|\right) \tag{1.18}$$

Таким образом, получили, что для подсистемы (1.2) существует определенно положительная эрмитова форма (1.4), удовлетворяющая всем условиям теоремы об асимптотической K^{ω}_{Δ} - устойчивости [3].

В силу неравенства

$$\frac{1}{n\omega_0^2} \le \lambda_i(B(t)) \le \frac{n\omega_0^2}{m^2}$$

на $[t_0,\infty)$ выполняется первое неравенство из (1.5). Так как неравенства (1.5) выполняются во всех точках $\mathfrak{R}^{n_i}_{x_i}$, то подсистема (1.2) асимптотически

K_Δ^ω-устойчива в целом. Докажем, что при этом полная система (1.2) асимптотически K_Δ^ω - устойчива в целом.

Составим следующую блочно-диагональную матрицу:

$$B(t)=\mathrm{diag}\{B_1(t),...,B_k(t)\} \quad \left(B(t)=G^{-1*}(t)G^{-1}(t)\right.$$

$$G(t)=\mathrm{diag}\{G_1(t),...,G_k(t)\}) \tag{1.19}$$

Она эрмитова и а) $\left|\det G(t)\right| \geq m_1...m_k=m>0$, б) столбцы $G^{(j)}(t)$ матрицы $G(t)$ имеют одинаковую эрмитовую норму: $\left\|G^{(j)}(t)\right\|=\omega(t)$, c) матрица $B(t)$ определенно положительная и $n^{-1}SpB^{-1}(t)=\omega^2(t)$ на $[t_0,\infty)$.

Матрице $B(t)$ соответствует положительно-определенная эрмитова форма

$$V(x,t)=\sum_{i=1}^{k}V_i(x_i,t) \tag{1.20}$$

Нетрудно убедиться, что форма (1.20) в (1.10) удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{n\omega_0^2}\|x\|^2 \leq V(x,t) \leq \frac{n\omega_0^2}{m^2}\|x\|^2$$

$$\dot{V}(x,t) \leq -c^*\|x\|^2 \tag{1.21}$$

$$\|\mathrm{grad}V\| \leq 2n\omega_0^2 m^{-2}\|x\|$$

Из существования формы (1.20) для полной системы (1.2), удовлетворяющей неравенствам (1.21), следует асимптотическая K_Δ^ω - устойчивость в целом его тривиального решения. Таким образом, доказана

Теорема. Если для подсистемы (1.3) существует определенно положительная эрмитова форма (1.4), удовлетворяющая в (1.10) условиям (1.5), а матрица c_{ij} удовлетворяет неравенству (1.17), то тривиальное решение полной системы (1.2) асимптотически K_Δ^ω - устойчиво в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959, 232 с.
2. Абгарян К.А., Аванян В.Т. К теории устойчивости на заданном интервале времени. // ПММ. 1977. Т. 41. № 5. С.844-849.
3. Абгарян К.А., Аванян В.Т. К теории устойчивости процессов на заданном промежутке времени. //Тр. Мос. Авиац. Ин-та. 1975. №339. С.5-11.

Ереванский государственный университет архитектуры и строительства

Поступила в редакцию 22.03.2004