

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ
 НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ
 ПРОСТРАНСТВЕ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЕ

Мелкумян А. С.

Ա. Ս. Մելքումյան

Պիեզոէլեկտրական տարածությունում ոչ ստացիոնար ակուստիկական և էլեկտրական
 ալիքների դիֆրակցիան կիսամեկնիք ճառ պարունակող պիեզոէլեկտրիկ
 տարածությունում: Ի տարբերություն պիեզոէլեկտրիկ տարածությունում դինամիկ դրվածքով կատարված
 բազմաթիվ հետազոտությունների, որտեղ դիտարկվում են ստացիոնար խնդիրներ, այստեղ
 հետազոտությունները կատարված են ոչ ստացիոնար դրվածքով: Խնդիրը հետազոտված է Լապլասի
 ձևափոխությունների, ինչպես նաև Վիներ-Հուպի և Կամյար - դե Հուիի մեթոդների կիրառմամբ:
 Մանրամասնությամբ ուսումնասիրված է անբողջական էլեկտրատառձգական դաշտի կառուցվածքը և նրա
 բաղկացուցիչ մասերի փոխառավարվածության կախվածությունը ընկնող ալիքի բնույթից և անկյուն
 անկյանից: Մտազոտված են ժամանակից կախված էլեկտրական դաշտի ինդուկցիայի և մեխանիկական
 լարումների ինտենսիվությունների գործակիցները ճառի զագարում: Բերված են թվային հաշվարկներ:

A. S. Melkumyan

Diffraction of nonstationary acoustic and electric waves in
 piezoelectric media on a semi-infinite crack

Рассматривается задача о дифракции электрической и сдвиговой акустической нестационарных волн с прямолинейным фронтом в пьезоэлектрическом пространстве от края полубесконечной трещины, свободной от напряжений. В отличие от многих исследований динамических задач в пьезоэлектрическом пространстве, где рассматриваются стационарные задачи, здесь исследования проведены в нестационарной постановке. Задача исследована с помощью преобразования Лапласа, а также применением методов Винера-Хопфа и Кампьяра-де Хула. Детально изучена зависимость строения взаимосвязанного электроупругого поля и взаимного расположения его составных частей от вида падающей волны и от ее угла падения. Получены выражения интенсивностей электрической индукции и механических напряжений при вершине трещины в зависимости от времени. Приведены численные расчеты.

1. Имеется пьезоэлектрическое пространство класса $6mm$ гексагональной симметрии, содержащей полубесконечную трещину, свободной от напряжений. Введем декартовую координатную систему $OXYZ$ с осью OZ , совпадающей с осью симметрии кристалла и с полуплоскостью $y=0, x>0, -\infty < z < \infty$, совпадающей с трещиной. Рассматривая антиплоские механические и плоские электрические волны в пьезоэлектрике, будем иметь

$$\vec{u} = (0, 0, w(x, y, t)), \vec{E} = (-\varphi_x(x, y, t), -\varphi_y(x, y, t), 0) \quad (1)$$

Введем обозначения $\tilde{c}_{44} = c_{44} + e_{15}^2 / \epsilon_{11}$, $c_t = s_t^{-1} = 1 / \sqrt{\epsilon_{11} \mu_0}$,
 $c_s = s_s^{-1} = \sqrt{c_{44} / \rho}$, $C_f = c_t^2 / (c_t^2 - c_s^2)$, $\tilde{c}_{44} = \tilde{c}_{44} [1 - (1 - C_f)(e_{15}^2 / \tilde{c}_{44} \epsilon_{11})]$,
 $k_s^2 = e_{15}^2 C_f / (\epsilon_{11} \tilde{c}_{44})$ и функцию

$$\psi(x, y, t) = \varphi(x, y, t) - \frac{e_{15} C_f}{\epsilon_{11}} w(x, y, t) \quad (2)$$

В нестационарном приближении [1] будем иметь следующую систему гиперболических уравнений:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

а также следующие соотношения:

$$\sigma_{xz} = \tilde{c}_{44} w_{,x} + e_{15} \psi_{,x}, \quad \sigma_{yz} = \tilde{c}_{44} w_{,y} + e_{15} \psi_{,y} \quad (4)$$

$$D_x = e_{15} (1 - C_f) w_{,x} - \epsilon_{11} \psi_{,x}, \quad D_y = e_{15} (1 - C_f) w_{,y} - \epsilon_{11} \psi_{,y} \quad (5)$$

Как видно из (1)–(5), при нестационарной постановке задачи в пьезоэлектрике распространяются как акустические $w(x, y, t)$, так и электрические $\psi(x, y, t)$ волны с конечными скоростями c_s и c_e соответственно.

В пьезоэлектрике класса 6mm с полубесконечной трещиной (фиг. 1) распространяются акустическая и электрическая волны с прямолинейным фронтом

$$w^{(i)}(x, y, t) = w_0 G(t - s_e [x \cos \alpha + y \sin \alpha]) \quad (6)$$

$$\psi^{(i)}(x, y, t) = \psi_0 G(t - s_e [x \cos \alpha + y \sin \alpha]) \quad (7)$$

где α – угол падения, $G(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$,

$g(\tau)$ – заданная функция, такая, что $g(\tau) = 0$ при $\tau < 0$.

Для решения задачи разделим пространство на две части: верхняя ($y > 0$) и нижняя ($y < 0$), удовлетворяя условия контакта

$$\sigma_{yz}(x, +0, t) = \sigma_{yz}(x, -0, t) = \sigma_-(x, t), \quad D_y(x, +0, t) = D_y(x, -0, t) \quad (8)$$

$$w(x, +0, t) - w(x, -0, t) = h_-(x, t), \quad \varphi(x, +0, t) = \varphi(x, -0, t) \quad (9)$$

где $\sigma_-(x, t) = 0$ при $x > 0$, $h_-(x, t) = 0$ при $x < 0$ и введем новые неизвестные функции $w^{(s)}(x, y, t)$ и $\psi^{(s)}(x, y, t)$ по формулам

$$w(x, y, t) = w^{(i)}(x, y, t) + w^{(s)}(x, y, t) \quad (10)$$

$$\psi(x, y, t) = \psi^{(i)}(x, y, t) + \psi^{(s)}(x, y, t) \quad (11)$$

Подставляя (2), (4)–(7), (10)–(11) в волновые уравнения (3) и условия контакта (8)–(9) и производя одностороннее преобразование Лапласа по времени, а также двухстороннее преобразование Лапласа по координате x , согласно формулам

$$f^*(x, p) = \int_0^\infty f(x, t) e^{-pt} dt, \quad f(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} f(x, p) e^{pt} dp \quad (12)$$

$$\hat{f}^*(\zeta, p) = \int_{-\infty}^\infty f^*(x, p) e^{-p\zeta x} dx, \quad f^*(x, p) = \frac{p}{2\pi i} \int_{\zeta_0 - i\infty}^{\zeta_0 + i\infty} \hat{f}^*(\zeta, p) e^{p\zeta x} d\zeta$$

получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 \hat{w}^{(s)*}}{\partial y^2} - p^2 a^2(\zeta) \hat{w}^{(s)*} = 0, \quad \frac{\partial^2 \hat{\psi}^{(s)*}}{\partial y^2} - p^2 e^2(\zeta) \hat{\psi}^{(s)*} = 0 \quad (13)$$

с преобразованными условиями контакта

$$\hat{w}_{,y}^{(s)*}(\zeta, +0, p) = \hat{w}_{,y}^{(s)*}(\zeta, -0, p) \quad (14)$$

$$\hat{w}^{(s)*}(\zeta, +0, p) - \hat{w}^{(s)*}(\zeta, -0, p) = \hat{h}_+^*(\zeta, p) \quad (15)$$

$$\hat{\psi}_{,y}^{(s)*}(\zeta, +0, p) = \hat{\psi}_{,y}^{(s)*}(\zeta, -0, p) \quad (16)$$

$$\hat{\psi}^{(s)*}(\zeta, +0, p) - \hat{\psi}^{(s)*}(\zeta, -0, p) = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} C_f \hat{h}_+^*(\zeta, p) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{44} \hat{w}_{,y}^{(s)*}(\zeta, -0, p) + e_{15} \hat{\psi}_{,y}^{(s)*}(\zeta, -0, p) = \hat{s}_-^*(\zeta, p) + \\ + \frac{g^*(p)}{p} \left[\tilde{c}_{44} \frac{w_0 s_s \sin \alpha}{\zeta + s_s \cos \alpha} + e_{15} \frac{\psi_0 s_l \sin \alpha}{\zeta + s_l \cos \alpha} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь и далее введены следующие обозначения: $a(\zeta) = \sqrt{s_s^2 - \zeta^2}$, $a(0) = s_s$ с разрезами $\text{Im} \zeta = 0, |\text{Re} \zeta| \geq s_s$, $e(\zeta) = \sqrt{s_l^2 - \zeta^2}$, $a(0) = s_l$ с разрезами $\text{Im} \zeta = 0, |\text{Re} \zeta| \geq s_l$, а также

$$s_-(x, t) = \sigma_-(x, t) - \tilde{c}_{44} w_{,y}^{(s)}(x, 0, t) H(-x) - e_{15} \psi_{,y}^{(s)}(x, 0, t) H(-x) \quad (19)$$

Решая систему (13)-(18), получим следующие выражения для $\hat{w}^{(s)*}$ и $\hat{\psi}^{(s)*}$:

$$\hat{w}^{(s)*}(\zeta, y, p) = \text{sgn}(y) \frac{\hat{h}_+^*(\zeta, p)}{2} e^{-p a(\zeta) |y|} \quad (20)$$

$$\hat{\psi}^{(s)*}(\zeta, y, p) = -\frac{e_{15} C_f}{\varepsilon_{11}} \text{sgn}(y) \frac{\hat{h}_+^*(\zeta, p)}{2} e^{-p e(\zeta) |y|} \quad (21)$$

а также уравнение Винера-Хопфа [2]

$$\begin{aligned} -(1 - k_e^2) R(\zeta) a(\zeta) \frac{\hat{h}_+^*(\zeta, p)}{2} p \tilde{c}_{44} = \hat{s}_-^*(\zeta, p) + \\ + \frac{g^*(p)}{p} \left[\tilde{c}_{44} \frac{w_0 s_s \sin \alpha}{\zeta + s_s \cos \alpha} + e_{15} \frac{\psi_0 s_l \sin \alpha}{\zeta + s_l \cos \alpha} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$R(\zeta) = \frac{1}{1 - k_e^2} \frac{a(\zeta) - k_e^2 e(\zeta)}{a(\zeta)} \quad (23)$$

Факторизируя функцию $R(\zeta)$ с применением интегралов типа Коши [3], получим

$$R(\zeta) = R_+(\zeta) R_-(\zeta) \quad (24)$$

где

$$R_{\pm}(\zeta) = \frac{s_{loc} \pm \zeta}{s_x \pm \zeta} \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_{s_l}^{s_x} \arctan \left[k_e^2 \frac{\sqrt{\sigma^2 - s_l^2}}{\sqrt{s_x^2 - \sigma^2}} \right] \frac{d\sigma}{\sigma \pm \zeta} \right) \quad (25)$$

$$s_{loc} = \sqrt{\frac{s_x^2 - k_e^4 s_l^2}{1 - k_e^4}} > s_x \quad (26)$$

Используя факторизацию (24)-(26) и решая уравнение (22) методом Винера-Хопфа [2], получим

$$\hat{h}_x^*(\zeta, p) = -\frac{g^*(p)}{p^2 \tilde{c}_{44}} \frac{2(1 - k_e^2)^{-1}}{R_+(\zeta) \sqrt{s_x + \zeta}} \left[\frac{1}{\zeta + s_x \cos \alpha} \frac{\tilde{c}_{44} w_0 \sqrt{2s_x} \sin(\alpha/2)}{R(-s_x \cos \alpha)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\zeta + s_l \cos \alpha} \frac{e_{15} \Psi_0 s_l \sin \alpha}{R(-s_l \cos \alpha) \sqrt{s_x + s_l \cos \alpha}} \right] \quad (27)$$

$$\hat{s}_x^*(\zeta, p) = -\frac{g^*(p)}{p} \left[\frac{\tilde{c}_{44} w_0 s_x \sin(\alpha)}{\zeta + s_x \cos \alpha} \left(1 - \frac{R_+(\zeta) \sqrt{s_x - \zeta}}{R(-s_x \cos \alpha) \sqrt{2s_x \cos(\alpha/2)}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{e_{15} \Psi_0 s_l \sin \alpha}{\zeta + s_l \cos \alpha} \left(1 - \frac{R_+(\zeta) \sqrt{s_x - \zeta}}{R(-s_l \cos \alpha) \sqrt{s_x + s_l \cos \alpha}} \right) \right] \quad (28)$$

Подставляя (27) в (20)-(21) и обращая двухстороннее преобразование Лапласа по координате x , получим

$$w^{(s)*}(x, y, p) = -\frac{\sin(\alpha) \operatorname{sgn}(y)}{1 - k_e^2} \frac{g^*(p)}{p} W^{(s)*}(x, y, p) \quad (29)$$

$$\Psi^{(s)*}(x, y, p) = \frac{e_{15} C_f}{\varepsilon_{11} \tilde{c}_{44}} \frac{\sin(\alpha) \operatorname{sgn}(y)}{1 - k_e^2} \frac{g^*(p)}{p} \Psi^{(s)*}(x, y, p) \quad (30)$$

где

$$W^{(s)*}(x, y, p) = W_a^{(s)*}(x, y, p) + W_e^{(s)*}(x, y, p) = \\ = \frac{w_0 \sqrt{s_x}}{R(-s_x \cos \alpha) \sqrt{2} \cos(\alpha/2)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta_0 - i\infty}^{\zeta_0 + i\infty} \frac{e^{-p[a(\zeta)y - x\zeta]} d\zeta}{(\zeta + s_x \cos \alpha) R_+(\zeta) \sqrt{s_x + \zeta}} + \\ + \frac{e_{15}}{\tilde{c}_{44}} \frac{\Psi_0 s_l}{R(-s_l \cos \alpha) \sqrt{s_x + s_l \cos \alpha}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta_0 - i\infty}^{\zeta_0 + i\infty} \frac{e^{-p[a(\zeta)y - x\zeta]} d\zeta}{(\zeta + s_l \cos \alpha) R_+(\zeta) \sqrt{s_x + \zeta}} \quad (31)$$

и

$$\Psi^{(s)*}(x, y, p) = \Psi_a^{(s)*}(x, y, p) + \Psi_e^{(s)*}(x, y, p) = \\ = \frac{\tilde{c}_{44} w_0 \sqrt{s_x}}{R(-s_x \cos \alpha) \sqrt{2} \cos(\alpha/2)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta_0 - i\infty}^{\zeta_0 + i\infty} \frac{e^{-p[a(\zeta)y - x\zeta]} d\zeta}{(\zeta + s_x \cos \alpha) R_+(\zeta) \sqrt{s_x + \zeta}} + \\ + \frac{e_{15} \Psi_0 s_l}{R(-s_l \cos \alpha) \sqrt{s_x + s_l \cos \alpha}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta_0 - i\infty}^{\zeta_0 + i\infty} \frac{e^{-p[a(\zeta)y - x\zeta]} d\zeta}{(\zeta + s_l \cos \alpha) R_+(\zeta) \sqrt{s_x + \zeta}} \quad (32)$$

Отметим, что при $e_{15} \rightarrow 0$ полученные выражения переходят в соответствующие выражения для случая чисто упругого тела, приведенные в [4].

2. Теперь перейдем к обращению одностороннего интегрального преобразования Лапласа по времени в (29)-(32) методом Каняра - де Хула [4]. В отдельности рассмотрим три случая: а) случай падения акустической волны (то есть $w_0 \neq 0, \psi_0 = 0$) при $\alpha < \arccos(s_t/s_s)$, б) случай падения акустической волны (то есть $w_0 \neq 0, \psi_0 = 0$) при $\alpha > \arccos(s_t/s_s)$ и в) случай падения электрической волны (то есть $w_0 = 0, \psi_0 \neq 0$).

а) случай падения акустической волны при $\alpha < \arccos(s_t/s_s)$

Для обращения одностороннего преобразования Лапласа в выражениях (29)-(32) методом Каняра - де Хула перейдем к координатам r и θ по формулам $x = r \cos \theta, |y| = r \sin \theta, \theta \in [0, \pi]$ и введем следующие функции:

$$\zeta_a^\pm(r, \theta, t) = \frac{1}{r} \left(-t \cos \theta \pm i \sqrt{t^2 - s_t^2 r^2} \sin \theta \right), \quad t \in [s_t r, +\infty) \quad (33)$$

$$\zeta_{ae}(r, \theta, t) = \frac{1}{r} \left(-t \cos \theta + \sqrt{s_s^2 r^2 - t^2} \sin \theta \right), \quad t \in [t_{ae}, s_s r] \quad (34)$$

$$\zeta_{ae}^\pm(r, \theta, t) = \zeta_{ae}(r, \theta, t) \pm i\varepsilon, \quad t \in [t_{ae}, s_s r] \quad (35)$$

$$\zeta_e^\pm(r, \theta, t) = \frac{1}{r} \left(-t \cos \theta \pm i \sqrt{t^2 - s_t^2 r^2} \sin \theta \right), \quad t \in [s_t r, +\infty) \quad (36)$$

где

$$t_{ae} = t_{ae}(r, \theta) = s_t x + \sqrt{s_s^2 - s_t^2} |y| \quad (37)$$

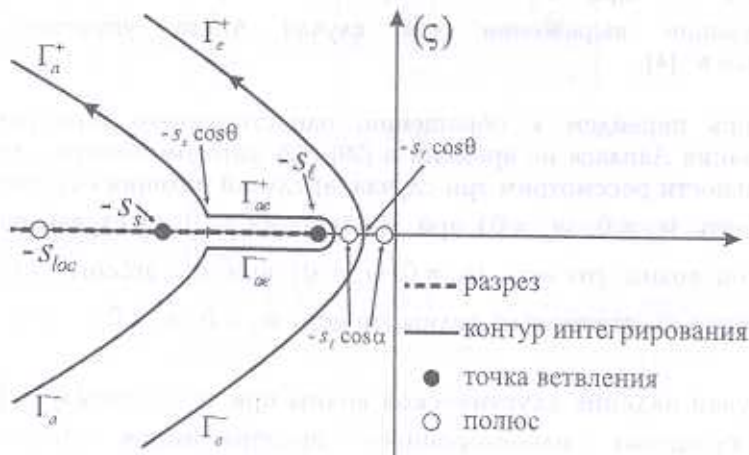
При этом будем иметь

$$\frac{\partial \zeta_a^\pm}{\partial t} = \pm i \frac{a(\zeta_a^\pm(r, \theta, t))}{\sqrt{t^2 - s_t^2 r^2}}, \quad \frac{\partial \zeta_{ae}}{\partial t} = \frac{\partial \zeta_{ae}^\pm}{\partial t} = - \frac{a(\zeta_{ae}(r, \theta, t))}{\sqrt{s_s^2 r^2 - t^2}} \quad (38)$$

$$\frac{\partial \zeta_e^\pm}{\partial t} = \pm i \frac{e(\zeta_e^\pm(r, \theta, t))}{\sqrt{t^2 - s_t^2 r^2}} \quad (39)$$

Функции (33)-(36) представляют параметрические выражения контуров интегрирования Каняра - де Хула [4,5], которые вместе с разрезами, точками ветвления и полюсами показаны на фиг. 2. Переходя от контуров интегрирования, параллельных мнимой оси к контуру $\Gamma_a^- + \Gamma_{ae}^- + \Gamma_a^+ + \Gamma_{ae}^+$ в (31) и к контуру $\Gamma_e^- + \Gamma_e^+$ в (32) и при этом учитывая вклады от полюсов и совершая замену переменной по формулам (33)-(36), после небольших преобразований получим

$$w^{(s)}(x, y, t) = -w_0 \frac{\operatorname{sgn}(y)}{1 - k_e^4} \frac{H(\alpha - \theta)}{s_{loc}^2 - s_s^2 \cos^2 \alpha} G(t - s_s [x \cos \alpha + |y| \sin \alpha]) + \int_0^t G(t - \tau) w_{ab}^{(s)}(x, y, \tau) d\tau \quad (40)$$



Фиг. 2. Контур интегрирования Каньяра-де Хупа в случае падающей акустической волны

где

$$w_{\alpha\delta}^{(s)}(x, y, t) = -\frac{w_0 \sqrt{s_s} \sin(\alpha) \operatorname{sgn}(y) (1 - k_s^2)^{-1}}{\pi \sqrt{2} R(-s_s \cos \alpha) \cos(\alpha/2)} \times$$

$$\times \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{\sqrt{s_s - \zeta_{\alpha}^+(t)}}{(\zeta_{\alpha}^+(t) + s_s \cos \alpha) R_+(\zeta_{\alpha}^+(t))} \right] \frac{H(t - s_s r)}{\sqrt{t^2 - s_s^2 r^2}} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{Im} \left[\frac{\sqrt{s_s - \zeta_{\alpha\epsilon}^-(t)}}{(\zeta_{\alpha\epsilon}^-(t) + s_s \cos \alpha) R_+(\zeta_{\alpha\epsilon}^-(t))} \right] \frac{H(t - t_{\alpha\epsilon}) - H(t - s_s r)}{\sqrt{s_s^2 r^2 - t^2}} H(\cos \theta - s_s s_s^{-1}) \right\}$$

и

$$\Psi^{(s)}(x, y, t) = \int_0^t G(t - \tau) \Psi_{\alpha\delta}^{(s)}(x, y, \tau) d\tau$$

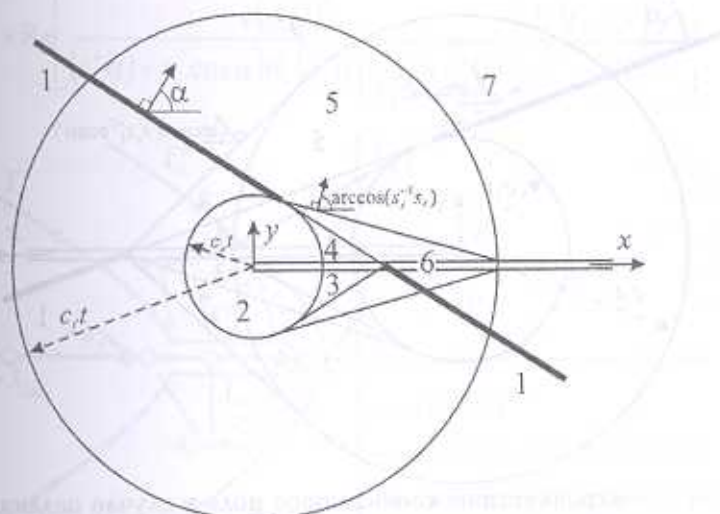
где:

$$\Psi_{\alpha\delta}^{(s)}(x, y, t) = \frac{w_0 \sqrt{s_s}}{R(-s_s \cos \alpha)} \frac{e_{15} C_f \sqrt{2} \sin(\alpha/2) \operatorname{sgn}(y)}{\epsilon_{11} (1 - k_s^2)} \times$$

$$\times \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{e(\zeta_{\alpha}^+(t))}{(\zeta_{\alpha}^+(t) + s_s \cos \alpha) R_+(\zeta_{\alpha}^+(t)) \sqrt{s_s + \zeta_{\alpha}^+(t)}} \right] \frac{H(t - s_s r)}{\sqrt{t^2 - s_s^2 r^2}}$$

Картина волновых фронтов, соответствующая данному случаю и полученная из анализа выражений (40) – (43), показана на фиг. 3, где проявляются следующие 7 зон:

1. Зона падающей волны
2. Зона дифрагированной акустической волны
3. Зона отраженной акустической волны
4. Зона пройденной акустической волны
5. Зона дифрагированной электрической волны
6. Зона головной волны
7. Невозмущенная зона



Фиг. 3. Электроакустическое волновое поле в случае падающей акустической волны при $\alpha < \arccos(s_t/s_s)$

б) случай падения акустической волны при $\alpha > \arccos(s_t/s_s)$

Производя вычисления, проходя путем, изложенным в пункте а), получим, что в данном случае

$$w^{(s)}(x, y, t) = -w_0 \frac{\operatorname{sgn}(y) G(t - s_s [x \cos \alpha + |y| \sin \alpha])}{1 - k_e^2} \frac{R(-s_s \cos \alpha)}{R(-s_s \cos \alpha)} H(\alpha - \theta) + \int_0^t G(t - \tau) w_{\infty}^{(s)}(x, y, \tau) d\tau \quad (44)$$

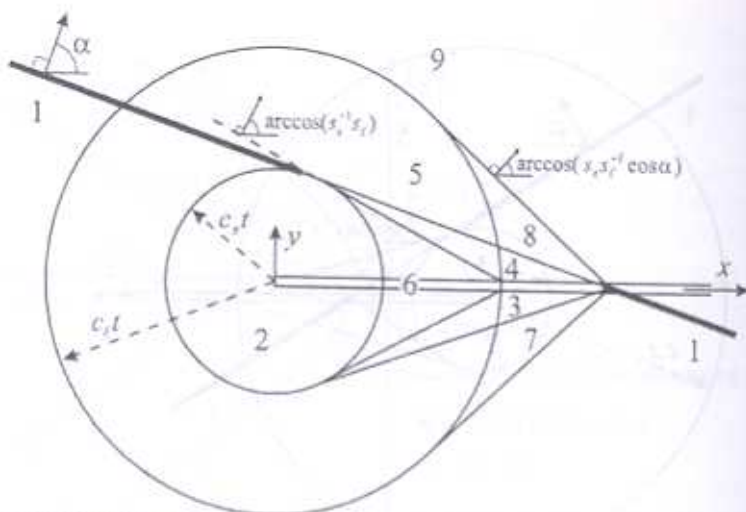
где $w_{\infty}^{(s)}(x, y, t)$ дается формулой (41), и

$$\psi^{(s)}(x, y, t) = w_0 \frac{\varepsilon_{15} C_f \operatorname{sgn}(y) G(t - [s_s x \cos \alpha + |y| \varepsilon(s_s \cos \alpha)])}{\varepsilon_{11} (1 - k_e^2)} \frac{R(-s_s \cos \alpha)}{R(-s_s \cos \alpha)} \times H(\arccos(s_s s_t^{-1} \cos \alpha) - \theta) + \int_0^t G(t - \tau) \psi_{\infty}^{(s)}(x, y, \tau) d\tau \quad (45)$$

где $\psi_{\infty}^{(s)}(x, y, t)$ дается формулой (43).

Картина волновых фронтов, соответствующая данному случаю и полученная из анализа выражений (44) – (45), показана на фиг. 4, где проявляются следующие 9 зон:

1. Зона падающей волны
2. Зона дифрагированной акустической волны
3. Зона отраженной акустической волны
4. Зона пройденной акустической волны
5. Зона дифрагированной электрической волны
6. Зона головной волны
7. Зона отраженной электрической волны
8. Зона пройденной электрической волны
9. Невозмущенная зона



Фиг. 4. Электроакустическое волновое поле в случае падающей акустической волны при $\alpha > \arccos(s_1/s_2)$

в) случай падения электрической волны

Взаимное расположение контуров интегрирования, разрезов, точек ветвления и полюсов для данного случая показано на фиг. 5. Производя расчеты, аналогичные тем, которые проведены в пунктах а) и б), получим, что в данном случае

$$w^{(s)}(x, y, t) = -\psi_0 \frac{e_{15}}{\tilde{c}_{44}} s_t \frac{\sin(\alpha) \operatorname{sgn}(y) G(t - [x s_t \cos \alpha + |y| a(s_t \cos \alpha)])}{1 - k_e^2 R(-s_t \cos \alpha) a(s_t \cos \alpha)} \times \\ \times H(\arccos[s_t s_2^{-1} \cos \alpha] - \theta) + \int_0^t G(t - \tau) w_{es}^{(s)}(x, y, \tau) d\tau \quad (46)$$

где

$$w_{es}^{(s)}(x, y, t) = -\frac{\sin(\alpha) \operatorname{sgn}(y) e_{15}}{1 - k_e^2} \frac{\psi_0 s_t}{\tilde{c}_{44} R(-s_t \cos \alpha) \sqrt{s_2 + s_t \cos \alpha}} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{\sqrt{s_2 - \zeta_{ae}^+(t)}}{(\zeta_{ae}^+(t) + s_t \cos \alpha) R_+(\zeta_{ae}^+(t))} \right] \frac{H(t - s_t r)}{\sqrt{t^2 - s_2^2 r^2}} - \operatorname{Im} \left(\frac{1}{R_+(\zeta_{ae}^+(t))} \right) \right\} \times \\ \times \frac{\sqrt{s_2 - \zeta_{ae}(t)}}{\zeta_{ae}(t) + s_t \cos \alpha} \frac{H(t - t_{ae}) - H(t - s_t r)}{\pi \sqrt{s_2^2 r^2 - t^2}} H(\arccos[s_t s_2^{-1}] - \theta) \quad (47)$$

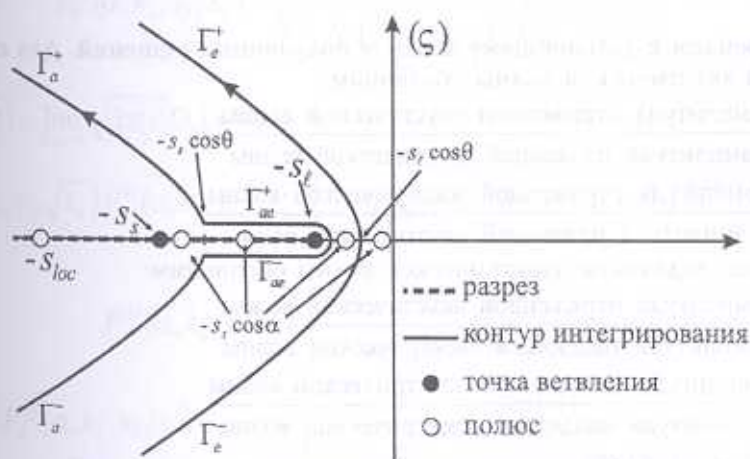
и

$$\psi^{(s)}(x, y, t) = \psi_0 s_t k_e^2 \frac{\sin(\alpha) \operatorname{sgn}(y) G(t - s_t [x \cos \alpha + |y| \sin \alpha])}{1 - k_e^2 R(-s_t \cos \alpha) a(s_t \cos \alpha)} H(\alpha - \theta) + \\ + \int_0^t G(t - \tau) \psi_{es}^{(s)}(x, y, \tau) d\tau \quad (48)$$

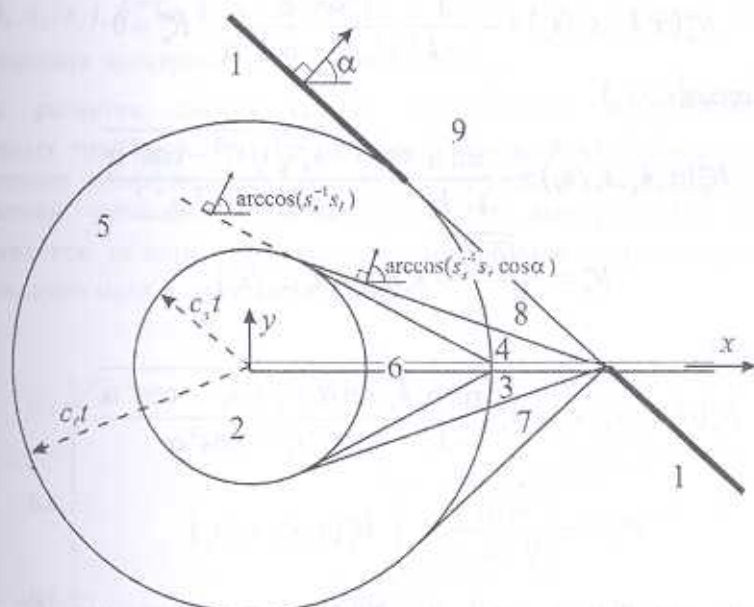
где

$$\psi_{es}^{(s)}(x, y, t) = \frac{\psi_0 s_t k_e^2}{\pi(1 - k_e^2)} \frac{\sin(\alpha) \operatorname{sgn}(y)}{R(-s_t \cos \alpha) \sqrt{s_2 + s_t \cos \alpha}} \times$$

$$\times \operatorname{Re} \left[\frac{e(\zeta_e^+(t))}{(\zeta_e^+(t) + s_l \cos \alpha) R_c(\zeta_e^+(t)) \sqrt{s_l + \zeta_e^+(t)}} \right] \frac{H(t - s_l r)}{\sqrt{t^2 - s_l^2 r^2}} \quad (49)$$



Фиг. 5. Контур интегрирования Каняра – де Хупа в случае падающей электрической волны



Фиг. 6. Электроакустическое волновое поле в случае падающей электрической волны

Картина волновых фронтов, соответствующая данному случаю и полученная из анализа выражений (46)-(49), показана на фиг. 6, где проявляются следующие 9 зон

1. Зона падающей волны
2. Зона дифрагированной акустической волны
3. Зона отраженной акустической волны
4. Зона пройденной акустической волны
5. Зона дифрагированной электрической волны

6. Зона головной волны
7. Зона отраженной электрической волны
8. Зона пройденной электрической волны
9. Невозмущенная зона

3. Перейдем к дальнейшему анализу полученных решений. Для случая падающей акустической волны обозначим:

$$R_a^a = \frac{\text{амплитуда отраженной акустической волны}}{\text{амплитуда падающей акустической волны}}$$

$$R_a^e = \frac{\text{амплитуда отраженной электрической волны}}{\text{амплитуда падающей акустической волны}}$$

а для случая падающей электрической волны обозначим:

$$R_e^a = \frac{\text{амплитуда отраженной акустической волны}}{\text{амплитуда падающей электрической волны}}$$

$$R_e^e = \frac{\text{амплитуда отраженной электрической волны}}{\text{амплитуда падающей электрической волны}}$$

Из (40)-(49) следует:

при $\alpha < \arccos(s_t/s_s)$

$$R_a^a(\alpha, k_e, s_t/s_s) = -\frac{1}{1-k_e^4} \frac{\sin^2 \alpha}{s_{loc}^2 s_s^{-2} - \cos^2 \alpha}, \quad R_a^e = 0 \quad (50)$$

при $\alpha > \arccos(s_t/s_s)$

$$R_a^a(\alpha, k_e, s_t/s_s) = -\frac{\sin \alpha}{1-k_e^4} \frac{\sin \alpha + k_e^2 \sqrt{s_t^2 s_s^{-2} - \cos^2 \alpha}}{s_{loc}^2 s_s^{-2} - \cos^2 \alpha} \quad (51)$$

$$R_a^e = -\sqrt{\frac{\tilde{e}_{44} C_f}{\epsilon_{11}}} k_e R_a^a(\alpha, k_e, s_t/s_s) \quad (52)$$

при любом α

$$R_e^a(\alpha, k_e, s_t/s_s) = k_e^2 \frac{\sin \alpha}{1-k_e^4} \frac{k_e^2 \sin \alpha + \sqrt{s_t^2 s_s^{-2} - \cos^2 \alpha}}{s_{loc}^2 s_s^{-2} - \cos^2 \alpha} \quad (53)$$

$$R_e^e = -\left(\sqrt{\frac{\tilde{e}_{44} C_f}{\epsilon_{11}}} k_e \right)^{-1} R_e^a(\alpha, k_e, s_t/s_s) \quad (54)$$

Заметим, что при $e_{15} \rightarrow 0$ из (50)-(54) получаем, что $R_a^a \rightarrow -1$, $R_a^e \rightarrow 0$, $R_e^a \rightarrow 0$, $R_e^e \rightarrow 0$, то есть получаем результат для случая изотропного тела.

На основании решений (29)-(32) получаются следующие выражения для интенсивностей напряжений и электрической индукции:

$$\begin{aligned} K_e(\alpha, t) &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} x \left| \sigma_{yz}(x, 0, t) \right| = \\ &= -\left[\left(\tilde{e}_{44} w_0 \sqrt{s_s} \right) F_a^\sigma(\alpha, k_e, s_t/s_s) + \left(e_{15} \Psi_0 \sqrt{s_t} \right) F_e^\sigma(\alpha, k_e, s_t/s_s) \right] \int_0^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau \quad (55) \end{aligned}$$

где

$$F_a^\sigma(\alpha, k_e, s_t/s_s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(\alpha/2)}{R_-(-s_s \cos \alpha)} \quad (56)$$

$$F_e^\sigma(\alpha, k_e, s_t/s_s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\alpha)}{R_-(-s_t \cos \alpha) \sqrt{s_s s_t^{-1} + \cos \alpha}} \quad (57)$$

и

$$K_D(\alpha, t) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2\pi|x|} D_y(x, 0, t) = - \left[(\epsilon_{13} w_0 \sqrt{s_s}) F_a^D(\alpha, k_e, s_t/s_s) + (\epsilon_{11} \psi_0 \sqrt{s_t}) F_e^D(\alpha, k_e, s_t/s_s) \right] \int_0^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau \quad (58)$$

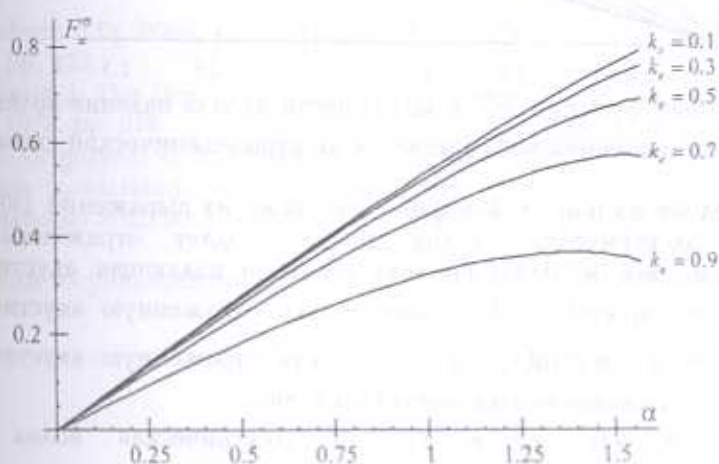
где

$$F_a^D(\alpha, k_e, s_t/s_s) = \frac{1}{1-k_e^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(\alpha/2)}{R_-(-s_s \cos \alpha)} \quad (59)$$

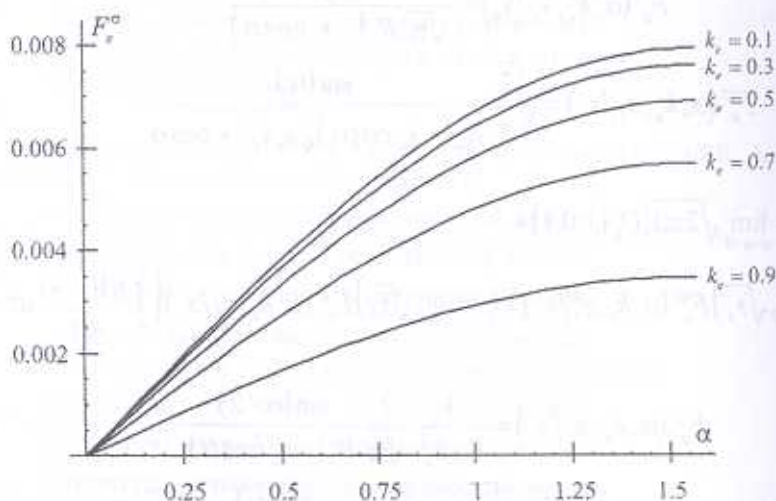
$$F_e^D(\alpha, k_e, s_t/s_s) = \frac{k_e^2}{1-k_e^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\alpha)}{C_f R_-(-s_t \cos \alpha) \sqrt{s_s s_t^{-1} + \cos \alpha}} \quad (60)$$

На фиг. 7–10 показаны графики функций $F_a^\sigma(\alpha, k_e, s_t/s_s)$, $F_e^\sigma(\alpha, k_e, s_t/s_s)$, $F_a^D(\alpha, k_e, s_t/s_s)$, $F_e^D(\alpha, k_e, s_t/s_s)$ при разных значениях коэффициента электромеханической связи k_e .

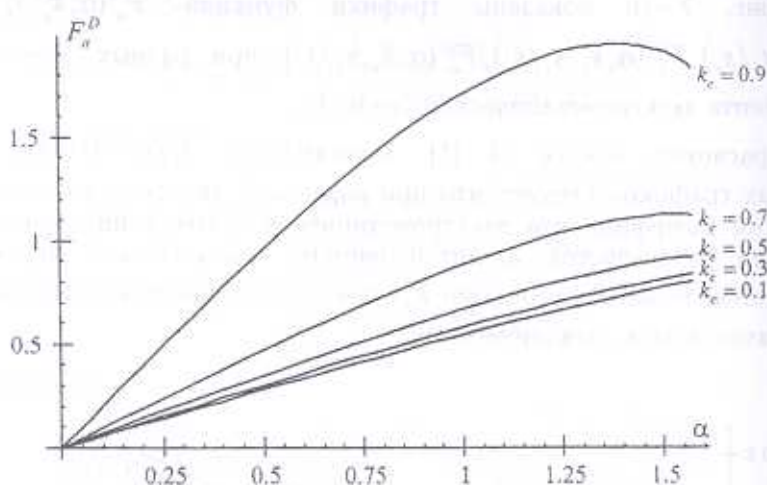
При расчетах, следуя Ли [1], принималось $s_t/s_s = 0.0001$. Из полученных графиков следует, что при падающей акустической волне с увеличением коэффициента электромеханической связи интенсивность напряжений уменьшается, а интенсивность электрической индукции увеличивается, то есть чем больше k_e , тем больше энергии переходит от акустического поля к электрическому.



Фиг. 7. График функции F_a^σ в зависимости от угла падения волны при разных значениях коэффициента электромеханической связи



Фиг. 8. График функции F_a^σ в зависимости от угла падения волны при разных значениях коэффициента электромеханической связи

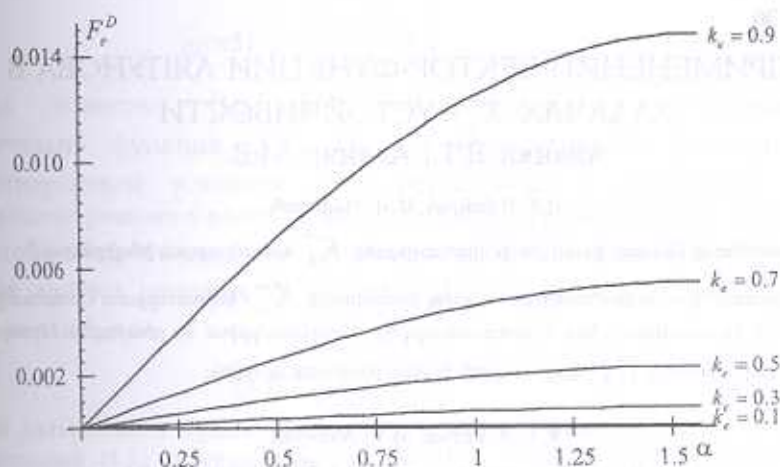


Фиг. 9. График функции F_a^D в зависимости от угла падения волны при разных значениях коэффициента электромеханической связи

Как следует из фиг. 3, 4 и фиг. 6, а также из выражений (50) – (54), падающая электрическая волна всегда создает отраженные как акустическую, так и электрическую волны, а падающая акустическая волна при $\alpha < \arccos(s_t/s_s)$ создает только отраженную акустическую волну, а при $\alpha > \arccos(s_t/s_s)$ создает как отраженную акустическую волну, так и отраженную электрическую волну.

Если $s_t/s_s \rightarrow 0$, то в фиг. 3 электрическая волна будет распространяться с бесконечно большой скоростью и создаст фон, то есть неволновую часть, а фронт головной волны станет параллельным трещине. При этом головная волна проявится как неволновая часть в направлении трещины с конечной скоростью распространения в

направлении, перпендикулярном трещине. Таким образом, полученные здесь результаты при предельном переходе $s_e/s_s \rightarrow 0$ переходят в соответствующие результаты работы [6] и дают более детальное объяснение строению волнового поля, полученного в [6].



Фиг. 10. График функции F_e^D в зависимости от угла падения волны при разных значениях коэффициента электромеханической связи

ЛИТЕРАТУРА

1. Li S. The Electromagneto-acoustic Surface Wave In A Piezoelectric Medium: The Bleustein-Gulyaev Mode. //Journal of Applied Physics, 1996, N 80(9), pp. 5264-5269.
2. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Изд. иностранной литературы, 1962. 280 с.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963. 640 с.
4. Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. North-Holland Pub., 1984. pp. 425.
5. Miklowitz J. The theory of elastic waves and waveguides. North-Holland Pub., 1978. pp. 618.
6. E. Kh. Grigoryan, A. S. Melkumyan On wave diffraction in a piezoelectric medium containing a semi-infinite electrode. //Proceedings of the International Seminar "Days on Diffraction 2004", 2004, pp. 99-109

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
6.12.2004