ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №1, 2005 Механика

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЕ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Григорян Э.Х., Джилавян С.А.

Է.Խ. Գրիգորյան, Ս.Հ. Ջիլավյան

Պիեզոէլեկտրական տարածությունում սահքային հարթ ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ ճաքի վրա

Աշխատանքում դիտարկվում է անվերջությունից կիսաանվերջ ճաքի վրա ընկնող սահքի հարթ ալիքի դիֆրակցիան պիեզոէլեկտրական տարածությունում: Խնդիրը բերված է Վիներ – Հոփֆի ֆունկցիոնալ հավասարման լուծման: Ստացված են տեղափոխության, լարման, էլեկտրական դաշտի պոտենցիալի և ինդուկցիայի վեկտորի բաղադրիչի բաշխումները պիեզոէլեկտրիկ միջավայրում: Ստացված են ասիմպտոտական բանաձևեր լարման, ինդուկցիայի վեկտորի բաղադրիչի համար ճաքի գագաթի շրջակայքում, հեռավոր գոտում տրված են տեղափոխության ասիմպտոտական ներկայացումները: Ցույց է տրված մակերևութային էլեկտրաառաձգական ալիքի առկայությունը:

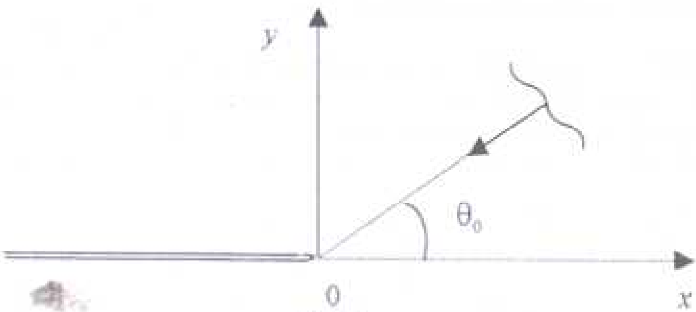
E.Kh. Grigoryan, S.H. Jilavyan

Diffraction of a Plan Shear Wave on Semi-Infinite Crack in a Piezoelectric Space

В работе рассмотрена дифракция сдвиговой плоской волны, падающей из бесконечности на полубесконечную трещину в пьезоэлектрическом пространстве. Задача сводится к решению функционального уравнения Винера-Хопфа. Получены распределения перемещения, напряжения, потенциала и составляющей вектора индукции электрического поля в пьезоэлектрической среде. Получены асимптотические формулы для напряжения и составляющей вектора индукции электрического поля в окрестности вершины трещины, в дальней зоне даны асимптотические представления перемещения. Показано наличие поверхностной электроупругой волны.

1. Рассмотрим пьезоэлектрическое пространство – пьезоэлектрик класса 6mm гексагональной симметрии, отнесенное к декартовой системе координат $Oxyz$, когда среда имеет полубесконечную трещину в плоскости Oxz при $x<0$ (фиг. 1). Пусть из бесконечности, под углом θ_0 к плоскости трещины $(0<\theta_0<\pi/2)$, распространяется плоская волна сдвига со следующими значениями амплитудных составляющих перемещения и электрического потенциала, соответственно:

$$w_\infty(x,y)=e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0}$$
$$\Phi_\infty(x,y)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0} \tag{1.1}$$



Фиг. 1

Отметим, что учитывается гармоническая зависимость от времени всех составляющих электроупругого поля – временной множитель $e^{-i\omega t}$, t – параметр времени, ω – частота колебаний. Здесь $k=\omega/c$ – волновое число, $c=\sqrt{c_{44}(1+æ)/\rho}$ – скорость распространения сдвиговой электроупругой волны, $æ=e_{15}^2/c_{44}\varepsilon_{11}$ – коэффициент электромеханической связи пьезоэлектрика, c_{44}, ε_{11}, e_{15} – упругая, диэлектрическая и пьезоэлектрическая постоянные пьезоэлектрического пространства, соответственно, а ρ – плотность.

Пьезоэлектрическая среда находится в условиях антиплоской деформации. Для определения амплитуд перемещения и электрического потенциала имеем следующую систему уравнений [1]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+k^2 w=0,\\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+k^2\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}w=0\end{gathered}\tag{1.2}$$

На берегах трещины для напряжения σ_{yz} имеем условие

$$\sigma_{yz}=c_{44}\frac{\partial w}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial \Phi}{\partial y}=0 \quad \text{при} \quad y=\pm 0,\ x<0\tag{1.3}$$

а для электрического потенциала и составляющей вектора электрической индукции –

$$\Phi(x,y)\big|_{y=+0}=\Phi(x,y)\big|_{y=-0};D_2(x,y)\big|_{y=+0}=D_2(x,y)\big|_{y=-0},\ -\infty<x<\infty\tag{1.4}$$

где $D_2(x,y)=e_{15}\dfrac{\partial w}{dy}-\varepsilon_{11}\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$.

Введем функции

$$\begin{gathered}u(x,y)=w(x,y)-w_\infty(x,y)\\ \varphi(x,y)=\Phi(x,y)-\Phi_\infty(x,y)\end{gathered}\tag{1.5}$$

Тогда для напряжения σ_{yz} получим формулу

$$\begin{gathered}\sigma_{yz}=c_{44}\frac{\partial w}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial \Phi}{\partial y}=c_{44}\frac{\partial u}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\\ -ikc_{44}(1+æ)\sin\theta_0 e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0}\end{gathered}\tag{1.6}$$

а для определения функций $u(x,y)$, $\varphi(x,y)$ из (1.2) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+k^2 u=0\\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+k^2\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}u=0\end{gathered}\tag{1.7}$$

Введем функции $q^+(x)=q(x)\theta(x)$, $\psi^-(x)=\psi(x)\theta(-x)$

$$\sigma_{yz}(x,0)=q^{+}(x) \qquad (1.8)$$

$$u(x,+0)-u(x,-0)=\psi^{-}(x) \qquad (1.9)$$

т.е. $q^{+}(x)$ – напряжение при $y=0$, а $\psi^{-}(x)$ представляет разницу перемещений на $y=\pm 0$, $\theta(x)$ – известная функция Хевисайда.

Применяя интегральное преобразование Фурье по переменной x к уравнениям (1.7), получим

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\overline{u}}{dy^2}-(\sigma^2-k^2)\overline{u}=0\\
&\frac{d^2\overline{\varphi}}{dy^2}-\sigma^2\overline{\varphi}+k^2\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\overline{u}=0
\end{aligned} \qquad (1.10)$$

где $\overline{u}(\sigma,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(x,y)e^{i\sigma x}dx$; $\overline{\varphi}(\sigma,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)e^{i\sigma x}dx$

Из (1.8), (1.9), имея в виду (1.6), применив преобразование Фурье, получим следующие условия:

$$\overline{q}^{+}(\sigma)=c_{44}\left.\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\right|_{y=0}+e_{15}\left.\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial y}\right|_{y=0}-2\pi ikc_{44}(1+æ)\sin\theta_0\delta(\sigma-k\cos\theta_0) \qquad (1.11)$$

$$\overline{\psi}^{-}(\sigma)=\overline{u}(\sigma,+0)-\overline{u}(\sigma,-0) \qquad (1.12)$$

$\delta(\sigma)$ – функция Дирака.

Чтобы выполнялись условия уходящей волны, принимается, что $\gamma(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k^2}\to|\sigma|$ при $|\sigma|\to\infty$, и $\sqrt{\sigma^2-k^2}=-i\sqrt{k^2-\sigma^2}$. Для выбора такой ветви двузначной функции $\gamma(\sigma)$ следует провести в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ разрезы до бесконечности от точки $\sigma=k$ в верхней полуплоскости и от точки $\sigma=-k$ в нижней полуплоскости, т.е. действительная ось обходит точки ветвления: $-k$ сверху, а k – снизу [2]. Тогда, принимая во внимание условия

$$\left.\frac{d\overline{u}}{dy}\right|_{y=+0}=\left.\frac{d\overline{u}}{dy}\right|_{y=-0};\quad \left.\frac{d\overline{\varphi}}{dy}\right|_{y=+0}=\left.\frac{d\overline{\varphi}}{dy}\right|_{y=-0};\quad \overline{\varphi}(\sigma,+0)=\overline{\varphi}(\sigma,-0)$$

ограниченное и представляющее уходящую волну решение системы (1.10) имеет вид

$$\overline{u}(\sigma,y)=\begin{cases}-Ae^{\gamma y} & \text{при } y<0\\ Ae^{-\gamma y} & \text{при } y>0\end{cases} \qquad (1.13)$$

$$\overline{\varphi}(\sigma,y)=\begin{cases}-\dfrac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}A\left(e^{\gamma y}-e^{|\sigma|y}\right) & \text{при } y<0\\[2ex] \dfrac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}A\left(e^{-\gamma y}-e^{-|\sigma|y}\right) & \text{при } y>0\end{cases} \qquad (1.14)$$

В силу (1.12) очевидно, что

$$A(\sigma)=\frac{1}{2}\overline{\psi}^{-}(\sigma) \tag{1.15}$$

Из условия (1.11) получим уравнение относительно $A(\sigma)$ и $q^{+}(\sigma)$

$$\begin{gathered} c_{44}A(\sigma)\cdot\left((1+æ)\sqrt{\sigma^2-k^2}-æ|\sigma|\right)+\overline{q}^{+}(\sigma)+ \\ +2\pi i k c_{44}(1+æ)\sin\theta_0\cdot\delta(\sigma-k\cos\theta_0)=0 \end{gathered} \tag{1.16}$$

Прежде чем приступить к решению уравнения (1.16), рассмотрим интересный частный случай, когда пьезоэлектрическая среда имеет бесконечную трещину – трещина занимает всю плоскость Oxz. Тогда следует в уравнении (1.16) принять $\overline{q}^{+}(\sigma)=0$ (т.е. $\sigma_{yz}=0$ при $y=0$, $-\infty<x<\infty$) и определяя $A(\sigma)=2\pi A_0\delta(\sigma-k\cos\theta_0)$,
где

$$A_0=\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_0-i\dfrac{æ}{1+æ}\cos\theta_0} \tag{1.17}$$

Из (1.13), (1.14), применяя обратное преобразование, имея в виду (1.1), (1.5), получим решение этой частной задачи. Так, для амплитуды перемещения получим

$$\begin{gathered} w(x,y)=e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0}+A_0e^{-ikx\cos\theta_0+iky\sin\theta_0} \quad \text{при} \quad y>0 \\ w(x,y)=(1-A_0)e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0} \quad \text{при} \quad y<0 \end{gathered} \tag{1.18}$$

на берегах трещины

$$w(x,y)=(1\pm A_0)e^{-ikx\cos\theta_0} \quad \text{при} \quad y=\pm 0.$$

Волновое поле при $y>0$ состоит из падающей волны и отраженной, а при $y<0$ – только из проходящей волны, обусловленной пьезоэффектом. Как и следовало ожидать, в случае $æ=0$ (отсутствие пьезоэффекта) при $y>0$ $w=e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0}+e^{-ikx\cos\theta_0+iky\sin\theta_0}$, при $y<0$ $w=0$.

Для амплитуды электрического потенциала получим
при $y>0$

$$\Phi(x,y)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}e^{-ikx\cos\theta_0}\left(e^{-iky\sin\theta_0}+A_0e^{iky\sin\theta_0}\right)-A_0\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}e^{-ikx\cos\theta_0-ky\cos\theta_0}$$

при $y<0$ (1.19)

$$\Phi(x,y)=(1-A_0)\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0}+A_0\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}e^{-ikx\cos\theta_0+ky\cos\theta_0}$$

на берегах трещины $y=\pm 0$ $\Phi(x)=\dfrac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}e^{-ikx\cos\theta_0}$.

Волновое поле для электрического потенциала при $y>0$ состоит из падающей и отраженной волн, при $y<0$ – из проходящей. Наличие локализованной волны (последние члены в выражениях (1.19)) обусловлено падающей волной и особенностями уравнений электростатики.

2. Вернемся к решению поставленной задачи о полубесконечной трещине. Уравнение (1.16) можно свести к функциональному уравнению Винера-Хопфа относительно $\overline{\psi}^-(\sigma)$ и $\overline{q}^+(\sigma)$

$$\frac{c_{44}}{2}\overline{\psi}^-(\sigma)\cdot\sqrt{\sigma^2-k^2}\,\overline{K}(\sigma)+\overline{q}^+(\sigma)+ \\ +2\pi i k c_{44}(1+æ)\sin\theta_0\delta(\sigma-k\cos\theta_0)=0 \tag{2.1}$$

где
$$\overline{K}(\sigma)=1+æ-\frac{æ|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2-k^2}} \tag{2.2}$$

здесь $\overline{K}(\sigma)\to 1$ при $|\sigma|\to\infty$.

Функция $\sqrt{\sigma^2-k^2}\,\overline{K}(\sigma)=(1+æ)\sqrt{\sigma^2-k^2}-æ|\sigma|$ имеет нули, только если $\sigma=\pm\sigma_n$, где

$$\sigma_n=k\frac{1+æ}{\sqrt{1+2æ}}>k \tag{2.3}$$

Действительная ось обходит точку $\sigma=-\sigma_n$ сверху, а $\sigma=\sigma_n$ снизу, тем самым обеспечивая условие уходящей волны.

Для решения функционального уравнения (2.1), факторизуем функцию $\sqrt{\sigma^2-k^2}\,\overline{K}(\sigma)$, представив ее в виде

$$\sqrt{\sigma^2-k^2}\,\overline{K}(\sigma)=\sqrt{\sigma+k}\,\overline{K}^+(\sigma)\sqrt{\sigma-k}\,\overline{K}^-(\sigma)$$

т.е.
$$\overline{K}(\sigma)=\overline{K}^+(\sigma)\cdot\overline{K}^-(\sigma) \tag{2.4}$$

где функция $\overline{K}^+(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha>0$, а $\overline{K}^-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha<0$, $\alpha=\sigma+i\tau$. Здесь

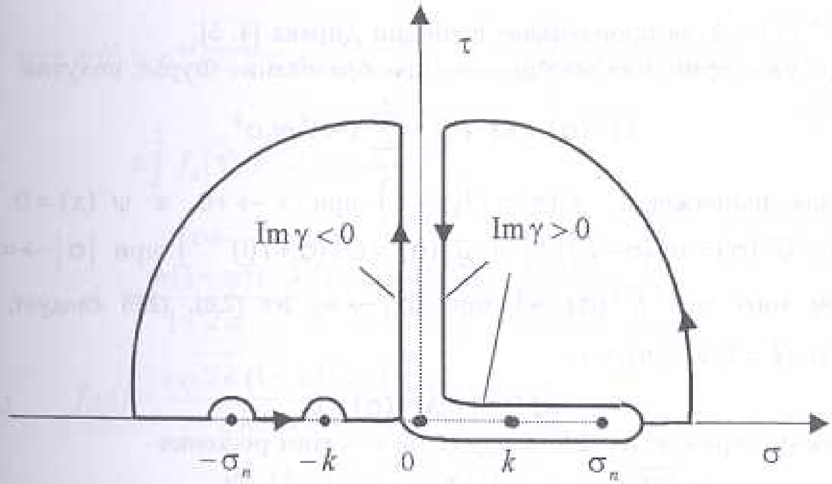
$$\overline{K}^+(\sigma)=\exp\left(F^+(\sigma)\right),\quad F^+(\sigma)=\int_0^\infty F(x)e^{i(\sigma+i0)x}dx$$

$$\overline{K}^-(\sigma)=\exp\left(F^-(\sigma)\right),\quad F^-(\sigma)=\int_{-\infty}^0 F(x)e^{i(\sigma-i0)}dx \tag{2.5}$$

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(\overline{K}(\sigma)\right)e^{-i\sigma x}d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(1+æ-\frac{æ|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2-k^2}}\right)\cdot e^{-i\sigma x}d\sigma$$

При $|\sigma|\to\infty$ $\ln\left(\overline{K}(\sigma)\right)=O(\sigma^{-2})$, значит $F(x)$ – непрерывная функция и при $x=0$ имеет конечное значение, и следовательно, $F^\pm(\sigma)\to\dfrac{1}{\sigma\pm i0}$ при $|\sigma|\to\infty$. $\overline{K}^+(\alpha)$, $\overline{K}^-(\alpha)$ стремятся к единице при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности.

Вычислим $\overline{K}^-(\sigma)$ методом контурного интегрирования, рассматривая при этом комплексную плоскость с разрезами, показанными на фиг. 2. Замыкая контур интегрирования в верхней полуплоскости, с помощью леммы Жордана, получим



Фиг. 2

$$\overline{K}^{-}(\sigma)=\frac{\sigma-\sigma_n}{\sigma-k}\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_0^k \operatorname{arctg}\frac{æ s}{(æ+1)\sqrt{k^2-s^2}}\cdot\frac{ds}{s-(\sigma-i0)}\right)$$

$$\overline{K}^{+}(\sigma)=\overline{K}^{-}(-\sigma) \tag{2.6}$$

Надо иметь в виду, что $\dfrac{1}{s-(\sigma-i0)}=\dfrac{1}{s-\sigma}-i\pi\delta(s-\sigma)$.

Здесь и в дальнейшем аналитическое продолжение функции $|\sigma|$ в комплексной плоскости представляется в виде

$$|\alpha|=\begin{cases}\alpha & \text{при } \operatorname{Re}\alpha>0\\ -\alpha & \text{при } \operatorname{Re}\alpha<0\end{cases} \tag{2.7}$$

Приступим теперь к решению функционального уравнения (2.1). Имея в виду (2.4), а также, что

$$2\pi i\delta(\sigma-k\cos\theta_0)=\frac{1}{\sigma-k\cos\theta_0-i0}-\frac{1}{\sigma-k\cos\theta_0+i0}$$

$$f(x)\delta(x)=f(0)\delta(x)$$

уравнение (2.1) сводится к уравнению

$$\overline{M}^{-}(\sigma)\equiv\overline{\psi}^{-}(\sigma)\sqrt{\sigma-k}\,\overline{K}^{-}(\sigma)+\frac{2\sqrt{2k}\,(1+æ)\sin\theta_0/2}{\overline{K}^{+}(k\cos\theta_0)\cdot(\sigma-k\cos\theta_0-i0)}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2k}\,(1+æ)\sin\theta_0/2}{\overline{K}^{+}(k\cos\theta_0)\cdot(\sigma-k\cos\theta_0+i0)}-\frac{2\overline{q}^{+}(\sigma)}{c_{44}\sqrt{\sigma+k}\,\overline{K}^{+}(\sigma)}\equiv M^{+}(\sigma) \tag{2.8}$$

$$-\infty<\sigma<\infty$$

Методика решения уравнения (2.8) та же, что и в [3]. Применив к (2.8) обратное преобразование Фурье, получим $M^{+}(x)=M^{-}(x)$ $(-\infty<x<\infty)$, которое может иметь место только, если

$$M^{+}(x)=M^{-}(x)=\sum_{k=0}^{n}m_k\delta^{(k)}(x)$$

где $\delta^{(k)}(x)$ — k-ая производная функции Дирака [4, 5].
Теперь уже, применив обобщенное преобразование Фурье, получим

$$\overline{M}^{+}(\sigma)=\overline{M}^{-}(\sigma)=\sum_{k=0}^{n}(-i)^{k}m_{k}\sigma^{k} \tag{2.9}$$

Так как напряжение $q^{+}(x)=O\left(x_{+}^{-1/2}\right)$ при $x\to+0$, а $\psi^{-}(x)=0$ при $x=0$, $\overline{\psi}^{-}(\sigma)=o\left((\sigma-i0)^{-1}\right)$ и $\overline{q}^{+}(\sigma)=O\left((\sigma+i0)^{-1/2}\right)$ при $|\sigma|\to\infty$. С учетом того, что $\overline{K}^{\pm}(\sigma)\to1$ при $|\sigma|\to\infty$, из (2.8), (2.9) следует, что $m_k=0$ $(k=0,1,\ldots,n)$, т.е.

$$\overline{M}^{+}(\sigma)=\overline{M}^{-}(\sigma)=0 \tag{2.10}$$

Таким образом, из (2.8) ввиду (2.10) получим решения

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}^{-}(\sigma)&=-\frac{2\sqrt{2k}(1+\text{æ})\sin\theta_0/2}{\overline{K}^{+}(k\cos\theta_0)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sigma-k}(\sigma-k\cos\theta_0-i0)\cdot\overline{K}^{-}(\sigma)}\\ \overline{q}^{+}(\sigma)&=\frac{\sqrt{2k}(1+\text{æ})c_{44}\sin\theta_0/2}{\overline{K}^{+}(k\cos\theta_0)}\cdot\frac{\sqrt{\sigma+k}\,\overline{K}^{+}(\sigma)}{\sigma-k\cos\theta_0+i0}\end{aligned} \tag{2.11}$$

Следовательно, решение поставленной задачи, т.е. выражения амплитуд перемещения и потенциала электрического поля, имея в виду (1.1), (1.5), (1.13), (1.14), а также (1.15), представляется в виде

$$w(x,y)=e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0}\pm\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A(\sigma)e^{-|y|\sqrt{\sigma^2-k^2}}\cdot e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{2.12}$$

$$\Phi(x,y)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0}\pm\frac{e_{15}}{2\pi\varepsilon_{11}}\int_{-\infty}^{\infty}A(\sigma)\cdot\left(e^{-|y|\sqrt{\sigma^2-k^2}}-e^{-|\sigma||y|}\right)e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{2.13}$$

при $y>0$ или $y<0$, соответственно.
Здесь

$$A(\sigma)=-\frac{\sqrt{2k}\,(1+\text{æ})\sin\theta_0/2}{\overline{K}^{+}(k\cos\theta_0)\cdot\sqrt{\sigma-k}\,(\sigma-k\cos\theta_0-i0)\overline{K}^{-}(\sigma)} \tag{2.14}$$

Тогда выражения индукции $D_2(x,y)$ и напряжения $\sigma_{yz}(x,y)$ представляются в виде

$$D_2(x,y)=-\frac{e_{15}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\sigma|A(\sigma)e^{-|\sigma||y|}e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{2.15}$$

$$\sigma_{yz}(x,y)=c_{44}(1+\text{æ})\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}D_2(x,y) \tag{2.16}$$

Проводя в комплексной плоскости разрезы по линиям $-k-i\tau$, $k+i\tau$ и $i\tau$ $(0<\tau<\infty)$, обходя точки $\sigma=k\cos\theta_0$ и $\sigma=\sigma_n$ снизу, а $\sigma=-\sigma_n$ сверху и замыкая контур интегрирования в верхней полуплоскости, для амплитуды перемещения на берегах трещины $(x<0,\ y=\pm0)$ из (2.12) получим

$$w(x,\pm 0)=e^{-ikx\cos\theta_0}\pm A_0 e^{-ikx\cos\theta_0}\pm e^{i\left(\frac{\pi}{4}-kx\right)}\int_0^{\infty} f_1(\tau)\cdot e^{\tau x}d\tau\pm$$

$$\pm\int_0^{\infty} f_2(\tau)\cdot e^{x\tau}d\tau\pm A_n e^{-i\sigma_n x} \tag{2.17}$$

где

$$A_n=\frac{æ(1+æ)i}{1+2æ}\cdot\frac{\overline{K}^{+}(\sigma_n)\sin\theta_0/2}{\overline{K}^{+}(k\cos\theta_0)}\cdot\frac{\sqrt{2k(\sigma_n+k)}}{k\cos\theta_0-\sigma_n} \tag{2.18}$$

$$f_1(\tau)=\frac{i\sqrt{2k}(1+æ)^2\sin\theta_0/2}{\pi\overline{K}^{+}(k\cos\theta_0)}\times$$

$$\times\frac{\overline{K}^{+}(k+i\tau)\cdot(2k+i\tau)\cdot\sqrt{\tau}}{\left(2k\sin^2\theta_0/2+i\tau\right)\left(æ^2k^2-\tau(1+2æ)(2ki-\tau)\right)} \tag{2.19}$$

$$f_2(\tau)=\frac{æ(1+æ)\sqrt{2k}\cdot\sin\theta_0/2}{\pi\overline{K}^{+}(k\cos\theta_0)}\cdot\frac{\overline{K}^{+}(i\tau)\cdot\sqrt{k+i\tau}\cdot\tau}{(k\cos\theta_0-i\tau)\left((1+æ)^2k^2+\tau^2(1+2æ)\right)}$$

Из (2.17) следует, что волновое поле на берегах трещины складывается из порций падающей и отраженной на верхнем ($y=+0$) или проходящей на нижнем ($y=-0$) берегах трещины, соответственно, и дифрагированной объемной сдвиговой волн, а также из неволновой части и поверхностной волны. Наличие последних двух волн и проходящей волны обусловлено пьезоэффектом – характерным свойством пьезоэлектрической среды. В случае $æ=0$ (изотропное пространство) решение совпадает с приведенным в [2] решением.

На берегах трещины из (2.15) получим следующее выражение для индукции:

$$D_2(x,0)=-e_{15}k\cos\theta_0 A_0 e^{-ikx\cos\theta_0}-e_{15}\sigma_n A_n e^{-i\sigma_n x}-e_{15}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-kx\right)}\times$$

$$\times\int_0^{\infty} f_1(\tau)\cdot(k+i\tau)e^{\tau x}d\tau+\frac{e_{15}(1+æ)i}{æ}\int_0^{\infty} f_2(\tau)\sqrt{k^2+\tau^2}\,e^{\tau x}d\tau,\quad x<0 \tag{2.20}$$

Как видно из (2.20), волновое поле состоит как из поверхностных волн с разными волновыми числами – $k\cos\theta_0$, σ_n, k, так и из неволновой части.

Асимптотические представления амплитуд перемещения и индукции при $x\to-\infty$ имеют вид

$$w(x,\pm 0)=(1\pm A_0)e^{-ikx\cos\theta_0}\pm A_n e^{-i\sigma_n x}\pm e^{i\left(\frac{\pi}{4}-kx\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{a}{|\pi kx|^{3/2}}+O\left(|kx|^{-5/2}\right)\right)\pm\frac{æ}{1+æ}\left(\frac{b}{(\pi kx)^2}+O\left(|kx|^{-3}\right)\right),\quad x\to-\infty \tag{2.21}$$

$$D_2(x,0)=-e_{15}k\cos\theta_0 A_0 e^{-ikx\cos\theta_0}-e_{15}\sigma_n A_n e^{-i\sigma_n x}-e_{15}k\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}-kx\right)}\times$$
$$\times\left(\frac{a}{\left|\pi k x\right|^{3/2}}+O\left(\left|kx\right|^{-5/2}\right)\right)+e_{15}k\left(\frac{ib}{(\pi k x)^2}+O\left(\left|kx\right|^{-3}\right)\right),\quad x\to-\infty \tag{2.22}$$

где $a=\dfrac{i\pi\sqrt{2}(1+æ)^2\overline{K}^{+}(k)}{2æ^2\sin\theta_0/2\cdot\overline{K}^{+}(k\cos\theta_0)}$, $b=\dfrac{\sqrt{2(1+æ)}\,\pi\sin\theta_0/2}{\cos\theta_0\cdot\overline{K}^{+}(k\cos\theta_0)}$.

Здесь было учтено, что $\overline{K}^{\pm}(0)=\sqrt{1+æ}$.

Проводя в комплексной плоскости разрезы по линиям $k+i\tau$, $-i\tau$ $(0<\tau<\infty)$, обходя точку $\sigma=k\cos\theta_0$ снизу и замыкая контур интегрирования в нижней полуплоскости, для амплитуды индукции D_2 на $y=0$ при $x>0$ из (2.15) получим

$$D_2(x,0)=\frac{e_{15}\sqrt{2k}(1+æ)i\sin\theta_0/2}{\pi\overline{K}^{+}(k\cos\theta_0)}\int_0^\infty\frac{\tau e^{-\tau x}d\tau}{\sqrt{k+i\tau}\,(i\tau+k\cos\theta_0)\overline{K}^{-}(-i\tau)} \tag{2.23}$$

и следующую асимптотику

$$D_2(x,0)=e_{15}k\left(\frac{ib}{(\pi k x)^2}+O\left((kx)^{-3}\right)\right)\quad\text{при } x\to\infty \tag{2.24}$$

Как видно, $D_2(x,0)$ при $x>0$ состоит только из неволновой части.

Из (2.20) и (2.23) получим следующие асимптотические представления для составляющей вектора индукции около вершины трещины

$$D_2(x,0)=-e_{15}(k\cos\theta_0 A_0+\sigma_n A_n)+O\left(\left|x\right|^{1/2}\right)\ \text{при } x\to-0 \tag{2.25}$$

$$D_2(x,0)=-e_{15}k\frac{ie^{i\pi/4}\sqrt{2}\,(1+æ)\sin\theta_0/2}{\overline{K}^{+}(k\cos\theta_0)\sqrt{\pi k x}}+O(1)\ \text{при } x\to+0$$

Как следует из (2.13), $\Phi(x,0)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}e^{-ikx\cos\theta_0}$.

Из (2.11) очевидно, что $\sigma_{yz}(x,0)=q^{+}(x)=0$ при $x<0$, а при $x>0$

$$\sigma_{yz}(x,0)=\frac{\sqrt{2k}\,(1+æ)c_{44}\sin\theta_0/2}{2\pi\overline{K}^{+}(k\cos\theta_0)}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{\sigma^2-k^2}\,(æ+1)-æ\left|\sigma\right|\right)e^{-i\sigma x}\,d\sigma}{\sqrt{\sigma-k}\,(\sigma-k\cos\theta_0+i0)\overline{K}^{-}(\sigma)} \tag{2.26}$$

Проводя в комплексной плоскости $(\alpha=\sigma+i\tau)$ разрезы по линиям $-k-i\tau$, $k+i\tau$ и $-i\tau$ $(0<\tau<\infty)$, замыкая контур интегрирования в нижней полуплоскости, обходя точку $\sigma=k\cos\theta_0$ сверху, получим

$$\sigma_{yz}(x,0)=\frac{\sqrt{2k}\,(1+æ)c_{44}\sin\theta_0/2}{\pi\overline{K}^{+}(k\cos\theta_0)}\times$$

$$\times\left(\int_0^{\infty}\frac{e^{-\tau x}(1+æ)\sqrt{(k+i\tau)^2-k^2}\,e^{ikx}\,d\tau}{\sqrt{2k+i\tau}\,(i\tau+2k\sin^2\theta_0/2)\overline{K}^{-}(-k-i\tau)}+\right. \tag{2.27}$$

$$\left.+\int_0^{\infty}\frac{æ\tau e^{-\tau x}\,d\tau}{\sqrt{k+i\tau}\,(ik\cos\theta_0-\tau)\overline{K}^{-}(-i\tau)}\right)-i(1+æ)k\,c_{44}\sin\theta_0 e^{-ikx\cos\theta_0}$$

Волновое поле состоит из порций объемной сдвиговой волны и неволновой части, а также падающей волны.

Асимптотика для напряжения $\sigma_{yz}(x,0)$ при $x\to+0$ имеет вид

$$\sigma_{yz}(x,0)=-\frac{i\sqrt{2}\,(1+æ)k\,c_{44}e^{i\pi/4}\sin\theta_0/2}{\overline{K}^{+}(k\cos\theta_0)\cdot\sqrt{\pi k x}}+O(1) \tag{2.28}$$

3. Пользуясь подходом, изложенным в [6, 7], найдем распределение перемещения в пьезоэлектрической среде (принимая $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$).

В случае $0<\theta<\pi/2$, принимая

$$\lambda=\sigma\cos\theta-i\sin\theta\sqrt{\sigma^2-k^2}\,,\ \sigma(\lambda)=\lambda\cos\theta+i\sin\theta\sqrt{\lambda^2-k^2} \tag{3.1}$$

полагая, что при выборе однозначной ветви $\sqrt{\alpha^2-k^2}$ разрезы в комплексной плоскости $(\alpha=\lambda+i\tau)$ проведены по линиям $k+i\tau$, $-k-i\tau$ $(0<\tau<\infty)$, и контур интегрирования замыкается в нижней полуплоскости, обходя точки $\lambda=k\cos(\theta+\theta_0)$, $\lambda=k\cos(\theta-\theta_0)$ снизу, где $\lambda=k\cos(\theta\pm\theta_0)$ нули функции $\sigma(\lambda)-k\cos\theta_0$, с помощью леммы Жордана получим

$$w(r,\theta)=e^{-ikr\cos(\theta-\theta_0)}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-i\left(\alpha r-\frac{3}{2}\pi\right)}}{\sqrt{\alpha^2-k^2}}\times \tag{3.2}$$

$$\times\left(A(\sigma)\cdot\sqrt{\sigma^2-k^2}+A(\sigma_2)\sqrt{\sigma^2-k^2}\right)d\tau$$

где $\alpha=-k-i\tau$, $\sigma_2(\alpha)=\alpha\cos\theta-i\sin\theta\sqrt{\alpha^2-k^2}$.

Волновое поле состоит из падающей волны и дифрагированной объемной сдвиговой волны.

В случае $\pi/2<\theta<\pi$ принимается

$$\lambda=-\sigma\cos\theta+i\sin\theta\sqrt{\sigma^2-k^2}\,,\ \sigma(\lambda)=-\lambda\cos\theta-i\sin\theta\sqrt{\lambda^2-k^2} \tag{3.3}$$

Теперь уже проведем разрезы в комплексной плоскости $(\alpha=\lambda+i\tau)$ не только по линиям $k+i\tau$, $-k-i\tau$, но и по линии $k\sin\theta+i\tau$ для функции $|\sigma|$. Контур интегрирования замыкается в верхней полуплоскости. При $\pi/2<\theta<\pi-\theta_0$ $\sigma(\lambda)-k\cos\theta_0$ не имеет нулей, но при $\pi-\theta_0<\theta<\pi$

$\lambda = -k\cos(\theta+\theta_0)$ является единственным нулем этой функции, и контур интегрирования обходит эту точку снизу. Функция $A(\sigma)$ имеет простой полюс в точке

$\lambda = -\lambda_n = -\sigma_n \cos\theta + i\sin\theta\sqrt{\sigma_n^2 - k^2}$, если только $\mathrm{Re}(-\lambda_n - k\sin\theta) > 0$,

т.е. в случае $\pi - \mathrm{arctg}\dfrac{\sigma_n}{k} < \theta < \pi$. Для амплитуды перемещения получим

$$w(r,\theta) = w_0(r,\theta) + A_n e^{-ir\lambda_n} + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{i\left(\alpha r + \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}} \times$$

$$\times\left(A(\sigma)\sqrt{\sigma^2 - k^2} + A(\sigma_1)\sqrt{\sigma_1^2 - k^2}\right)d\tau - \frac{\sqrt{2k}\,æ(1+æ)\sin\theta_0/2}{\pi \overline{K}^+(k\cos\theta_0)}\cdot i e^{ikr\sin\theta} \times \tag{3.4}$$

$$\times\int_0^\infty \frac{e^{-\tau r}\overline{K}^+(\sigma)(\sigma+k)\sigma\sqrt{\sigma-k}\,d\tau}{\sqrt{(k\sin\theta + i\tau)^2 - k^2}\,(\sigma - k\cos\theta_0)((1+2æ)(\sigma^2-k^2) - æ^2k^2)}$$

где $\alpha = k + i\tau$, $\sigma_1(\alpha) = -\alpha\cos\theta + i\sin\theta\sqrt{\alpha^2 - k^2}$.

$$w_0(r,\theta) = e^{-ikr\cos(\theta-\theta_0)} \quad \text{при } \pi/2 < \theta < \pi - \theta_0$$

$$w_0(r,\theta) = e^{-ikr\cos(\theta-\theta_0)} + A_0 e^{-ikr\cos(\theta+\theta_0)} \quad \text{при } \pi - \theta_0 < \theta < \pi \tag{3.5}$$

Отметим, что $|\sigma| = \begin{cases} \sigma & \text{при } \mathrm{Re}\,\sigma > k\sin\theta \\ -\sigma & \text{при } \mathrm{Re}\,\sigma < k\sin\theta \end{cases}$

Волновое поле состоит из падающей волны, отраженной волны (если $\pi - \theta_0 < \theta < \pi$), поверхностной волны (при $\pi - \mathrm{arctg}\dfrac{\sigma_n}{k} < \theta < \pi$), дифрагированной объемной волны, а также волны, обусловленной пьезоэффектом и распространяющейся от поверхности трещины в среду. Таким образом, обнаружена обусловленная пьезоэффектом поверхностная волна в пьезоэлектрической среде с полубесконечной трещиной при наличии падающей электроупругой волны. Однако, в случае бесконечной трещины, как следует из (1.18), поверхностная волна не возникает при данной постановке задачи.

В случае $\theta = \pi - \theta_0$ точка $\lambda = k$ является и простым полюсом подынтегральной функции, и точкой ветвления. В этом случае функцию перемещения можно представить в виде

$$w(r,\pi-\theta_0) = e^{ikr\cos 2\theta_0} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{A(\sigma)\sqrt{\sigma^2-k^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} + \frac{iA_0}{2(\lambda-k)}\right)\times$$

$$\times e^{i\lambda r}d\lambda + \frac{A_0}{2}e^{ikr} \tag{3.6}$$

Как следует из решения (2.12), в случае $y<0$, т.е. $-\pi<\theta<0$, подынтегральную функцию следует заменить на $-A(\sigma)$, а θ на $-\theta$, и возникающая проходящая волна (при $-\pi<\theta<-\pi+\theta_0$) обусловлена пьезоэффектом.

При больших значениях r (дальние от вершины трещины зоны) получим следующие асимптотические представления амплитуды перемещения при $rk \to \infty$:

при $-\pi < \theta < -\pi/2$ $(\theta \neq \theta_0 - \pi)$

$$w(r,\theta) = w_1(r,\theta) - A_n e^{-ir\bar{\lambda}_n} + e^{i(kr+\pi/4)}\left(B(\theta)\frac{1}{\sqrt{\pi kr}} + O\left((rk)^{-3/2}\right)\right) + \\ + e^{-ikr\sin\theta}\cdot\left(B_n(\theta)\frac{1}{\pi kr} + O\left((kr)^{-2}\right)\right) \tag{3.7}$$

где $\quad w_1(r,\theta) = (1-A_0)e^{-ikr\cos(\theta-\theta_0)}$ при $-\pi < \theta < \theta_0 - \pi$

$$w_1(r,\theta) = e^{-ikr\cos(\theta-\theta_0)} \text{ при } \theta_0 - \pi < \theta < \pi/2$$

$$B(\theta) = \frac{\sqrt{2}\sin\theta/2\sin\theta_0/2}{\cos\theta + \cos\theta_0}\cdot\frac{1+æ}{\overline{K}^+(k\cos\theta_0)\overline{K}^-(-k\cos\theta)}$$

$$B_n(\theta) = \frac{2æ(1+æ)\sin\theta\sin\theta/2\cdot\overline{K}^+(-k\cos\theta)\cdot i\sin\theta_0/2}{\cos\theta(\cos\theta+\cos\theta_0)(æ^2+(1+2æ)\sin^2\theta)\overline{K}^+(k\cos\theta_0)}$$

при $\theta = \theta_0 - \pi$

$$w(r) = (1-A_0/2)e^{ikr} - A_n e^{ir\sigma_n\left(\cos\theta_0 + i\frac{æ}{1+æ}\sin\theta_0\right)} + e^{ikr}O\left((rk)^{-1/2}\right) \tag{3.8}$$

при $-\pi/2 < \theta < \pi/2$

$$w(r,\theta) = e^{-ikr\cos(\theta-\theta_0)} + e^{i(kr+\pi/4)}\left(B(\theta)\frac{1}{\sqrt{\pi kr}} + O\left((rk)^{-3/2}\right)\right) \tag{3.9}$$

при $\theta = \pi - \theta_0$

$$w(r) = e^{ikr\cos 2\theta_0} + \frac{A_0}{2}e^{ikr} + A_n e^{ir\sigma_n\left(\cos\theta_0 + i\frac{æ}{1+æ}\sin\theta_0\right)} + e^{ikr}O\left((rk)^{-1/2}\right) \tag{3.10}$$

при $\pi/2 < \theta < \pi$; $(\theta \neq \pi - \theta_0)$

$$w(r,\theta) = w_0(r,\theta) + A_n e^{-ir\lambda_n} + e^{i(kr+\pi/4)}\cdot\left(B(\theta)\frac{1}{\sqrt{\pi kr}} + O\left((rk)^{-3/2}\right)\right) + \\ + e^{ikr\sin\theta}\left(B_n(\theta)\frac{1}{\pi kr} + O\left((kr)^{-2}\right)\right) \tag{3.11}$$

где для $w_0(r,\theta)$ имеют место формулы (3.5).

Асимптотическое представление индукции $D_2(r,\theta)$ при $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ имеет вид

$$D_2(r,\theta) = e_{15}k\left(\frac{ib\cos 2\theta}{(\pi kr)^2} + O\left((kr)^{-3}\right)\right),\ kr \to \infty \tag{3.12}$$

а в случае $\pi/2 < \theta < \pi$ или $-\pi < \theta < -\pi/2$

$$D_2(r,\theta) = -e_{15}k\cos\theta_0 e^{-ikr\cos\theta_0\cos\theta}\cdot e^{-kr\cos\theta_0|\sin\theta|} -$$
$$-e_{15}\sigma_n A_n e^{-i\sigma_n r\cos\theta}\cdot e^{-\sigma_n r|\sin\theta|} - e_{15}k\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}-kr\cos\theta\right)}\cdot e^{-kr\sin|\theta|}\times \tag{3.13}$$
$$\times\left(\frac{e^{\frac{3}{2}i(|\theta|-\pi)}\cdot a}{(\pi kr)^{3/2}} + O\left((kr)^{-5/2}\right)\right) + e_{15}k\left(\frac{ib\cos 2\theta}{(\pi kr)^2} + O\left((kr)^{-3}\right)\right),\ kr\to\infty$$

Асимптотические представления составляющей D_θ вектора индукции и напряжения $\sigma_{\theta z}$ вблизи вершины трещины имеют вид

$$D_\theta = -e_{15}g(\theta)(\pi kr)^{-1/2} + O(1),\quad \sigma_{\theta z} = -c_{44}g(\theta)(\pi kr)^{-1/2} + O(1)\quad r\to 0$$
$$g(\theta) = \frac{ik\sqrt{2}\,(1+æ)e^{i\pi/4}}{\overline{K}^{+}(k\cos\theta_0)}\sin\frac{\theta_0}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} \tag{3.14}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезоэлектриках. Новосибирск: Наука. 1982. 240 с.
2. Нобл Б. Метод Винера - Хопфа. М.: Мир, 1962. 279 с.
3. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости.//Уч. записки ЕГУ. 1979. 3. С.29-34.
4. Шилов Г.Е. Математический анализ. II спецкурс. М.: Наука. 1965. 327 с.
5. Справочная мат. библиотека. Функ. анализ. М.: Наука, 1972. 283с.
6. Григирян Э.Х., Саркисян Л.В. Дифракция сдвиговых электроупругих поверхностных волн на крае электропроводящего упругого слоя.//Изв. НАН Арм. Механика. 1999. Т. 52. №1. С.30-39.
7. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. //Изв. НАН Арм. Механика. 2003. Т. 56. №4. С.3-17.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию 23.11.2004