ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №1, 2005 МЕХАНИКА

УДК 539.3

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Никогосян Г.С., Саркисян С.О.

Գ.Ս. Նիկողոսյան, Ս.Հ. Սարգսյան

Միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթի ասիմպտոտիկ տեսության մասին

Դիտարկվում է եռաչափ բարակ թաղանթի տիրույթում առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսության (երբ տեղափոխությունները և պտույտները իրարից անկախ են) ստատիկական խնդրի ընդհանուր հավասարումները համապատասխան եզրային պայմաններով: Ասիմպտոտիկ մեթոդի կիրառմամբ կառուցված է ներքին ասիմպտոտիկական վերլուծությունը և սահմանային շերտերը: Ցույց է տրված, որ սահմանային շերտերը չորսն են՝ ուժային (հարթ և հակահարթ) և մոմենտային (հարթ և հակահարթ): Ուսումնասիրված է ներքին և սահմանային շերտի տիպի խնդիրների համակցման, բավարարելու համար թաղանթի կողմնային մակերևույթի վրա առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսության եռաչափ եզրային պայմաններին: Այս ուսումնասիրման արդյունքում ներքին ասիմպտոտիկ վերլուծության համար ստացվել են առանձին եզրային պայմաններ, սահմանային շերտերի համար նույնպես ստացվել են առանձին եզրային պայմաններ:

Ասիմպտոտիկ մեթոդի հիման վրա կառուցված է միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթի կիրառական ընդհանուր երկչափ տեսությունը:

G.S. Nikogosyan, S.H. Sarkisyan

On Asymptotic Theory of Micropolar Elastic Thin Shells

В трехмерной тонкой области оболочки рассматриваются общие уравнения и соответствующие граничные условия статической задачи несимметричной теории упругости (когда перемещения и вращения независимы друг от друга). Методом асимптотического интегрирования построен внутренний итерационный процесс и погранслои. Показывается существование четырех типов погранслоев–силовые (плоское и антиплоское) и моментные (плоское и антиплоское). Изучается задача сращивания внутренней задачи и погранслоев для удовлетворения трехмерных граничных условий несимметричной теории упругости на боковой поверхности оболочки. В результате этого исследования получены отдельные граничные условия для внутреннего итерационного процесса и для пограничных слоев.

На основе асимптотического метода построена общая прикладная–двумерная теория микрополярных оболочек.

1. Несимметричная (моментная, микрополярная) теория упругости впервые построена в работе [1], согласно которой каждая материальная точка континуума наделяется свойствами твердого тела путем учета вращательных степеней свободы.

Современное состояние несимметричной теории упругости изложено в работах [2–4]. Проблемы приложения теории несимметричной упругости в конкретных областях механики деформируемого тела рассмотрены в работах [5–8].

Несимметричная теория упругости является феноменологической моделью, отражающую полное внутреннее взаимодействие частиц тел, имеющих микроструктуру [9–10].

Актуальным является проблема построения микрополярной теории упругих тонких балок и стержней, пластин и оболочек [11–14].

В работе [11] методом гипотез реализован симбиоз общей несимметричной теории упругости и основных положений общеизвестной уточненной теории оболочек и пластин [15,16], построена теория микрополярных упругих тонких оболочек и пластин, которая открывала существенные возможности для решения прикладных проблем прочности, колебания и устойчивости микрополярных тонких оболочек и пластин.

Актуальным является проблема построения общей теории микрополярных упругих тонких балок и стержней, пластин и оболочек на основе асимптотического метода. При построении общей теории тонких балок и стержней, пластин и оболочек по классической теории упругости асимптотические методы развиты в работах [17–23]. В работе [21] (см. также обзорн. ст. [24]) была найдена новая асимптотика для построения общей теории упругих тонких балок и стержней, пластин и оболочек при неклассических краевых условиях, которая позволила найти решения новых классов статических и динамических проблем тонких тел.

В работах [25,26] на основе асимптотического метода построена общая теория статической задачи тонких пластин на основе несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений. Построен внутренний итерационный процесс и погранслой. Показано существование четырех типов погранслоев-силовых (плоского и антиплоского) и моментных (плоского и антиплоского). Изучены свойства погранслойных решений, доказаны формулы обобщенной ортогональности. Изучено взаимодействие внутренней задачи и погранслоев с целью удовлетворения трехмерных граничных условий на боковой цилиндрической поверхности пластинки по несимметричной теории упругости, в результате которого трехмерные граничные условия расщепляются между внутренней задачей и задачами погранслоев. На основе исходного приближения асимптотической теории построена общая прикладная-двумерная теория статической задачи тонких пластин по несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений.

В работе [27] построена общая асимптотическая теория микрополярных упругих тонких балок и стержней. В работе [28] построена общая прикладная-двумерная динамическая теория микрополярных тонких пластин.

Будем рассматривать оболочку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое тело. Дифференциальные уравнения несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (НТУ с НППВ) будут иметь вид [4]:

Уравнения равновесия

$$\nabla_j \sigma^{ji} = 0, \qquad \nabla_j \mu^{ji} + e^{ijk} \cdot \sigma_{jk} = 0 \tag{1.1}$$

Соотношения упругости

$$\begin{cases} \sigma_{ji} = (\mu+\alpha)\gamma_{ji} + (\mu-\alpha)\gamma_{ij} + \lambda \cdot \gamma_{kk} \cdot \delta_{ij} \\ \mu_{ji} = (\gamma+\varepsilon)\varkappa_{ji} + (\gamma-\varepsilon)\varkappa_{ij} + \beta \cdot \varkappa_{kk} \cdot \delta_{ij} \end{cases} \tag{1.2}$$

Геометрические соотношения

$$\gamma_{ji} = \nabla_j u_i - e_{kji} \cdot \omega^k, \qquad \varkappa_{ji} = \nabla_j \omega_i \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1.3}$$

где σ^{ij}, μ^{ij} – соответственно контравариантные компоненты силового и моментного тензоров напряжений; $\vec{u}$ – вектор перемещения; $\vec{\omega}$ – вектор независимого поворота; γ_{ji}, $\varkappa_{ji}$ – соответственно ковариантные компоненты тензора деформации и тензора изгиба-кручения; $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – упругие константы материала оболочки.

Далее отнесем оболочку к триортогональной системе координат $\alpha_i \, (i = 1, 2, 3)$, принятой в теории оболочек [18].

К определяющим уравнениям НТУ с НППВ (1.1)–(1.3) присоединим соответствующие граничные условия. Для граничных условий на лицевых поверхностях оболочки примем граничные условия первой граничной задачи НТУ с НППВ, которые можем записать так:

$$\sigma_{3i} = \mp q_i^{\pm}, \quad \mu_{3i} = \mp m_i^{\pm} \quad \text{при} \quad \alpha_3 = \pm h \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.4}$$

Граничные условия на боковой поверхности оболочки (который представляет собой замкнутый торец) могут быть граничными условиями первой, второй или смешанной граничной задачи НТУ с НППВ; для определенности примем граничные условия первой граничной задачи:

$$\sigma_{i3} n_j = p_i^{*}, \quad \mu_{i3} n_j = m_i^{*} \quad \text{при} \quad \alpha_1 = \alpha_{10} \tag{1.5}$$

Займемся теперь построением внутреннего итерационного процесса поставленной краевой задачи НТУ с НГПВ.

Введем новые независимые переменные, положив [18]:

$$\alpha_i = R \cdot \lambda^{-p} \cdot \xi_i, \quad \alpha_3 = R \cdot \lambda^{-l} \cdot \zeta \qquad (i = 1,2) \tag{1.6}$$

где R – некоторый характерный радиус кривизны срединной поверхности, p, l – целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$l > p \geq 0,$$

а λ – большой постоянный параметр, определяемый формулой

$$h = R \cdot \lambda^{-l} \tag{1.7}$$

Сделаем также следующие замены искомых величин (далее будем считать, что индексы i, j принимают значения 1,2):

$$\begin{gathered}
V_i = \lambda^{l-p-c} \cdot \overset{*}{V}_i, \quad V_3 = \lambda^{l-2p} \cdot \overset{*}{V}_3, \quad \omega_i = \lambda^{l-p-c} \cdot \overset{*}{\omega}_i, \quad \omega_3 = \lambda^{l-2p} \cdot \overset{*}{\omega}_3 \\
\tau_{ij} = \lambda^{l-c} \cdot \overset{*}{\tau}_{ij}, \quad \tau_{33} = \lambda^{0} \cdot \overset{*}{\tau}_{33}, \quad \nu_{ij} = \lambda^{l-c} \cdot \overset{*}{\nu}_{ij}, \quad \nu_{33} = \lambda^{0} \cdot \overset{*}{\nu}_{33} \\
\tau_{i3} = \lambda^{l-p} \cdot \overset{*}{\tau}_{i3}, \quad \nu_{i3} = \lambda^{l-p} \cdot \overset{*}{\nu}_{i3} \qquad [3 \leftrightarrows i]
\end{gathered} \tag{1.8}$$

где $c = 0$ при $2p \leq l$ и $c = 2p - l$ при $2p \geq l$; τ_{ij} – несимметричный тензор силовых напряжений [18], ν_{ij} – аналогичный тензор для моментных напряжений.

Кроме того, введем формулы:

$$\begin{aligned}
L_i &= \frac{\lambda^{l+p-c}}{R} \cdot \overset{*}{L}_i, & L &= \frac{\lambda^{l-c}}{R} \cdot \overset{*}{L}, & F &= \frac{\lambda^{l}}{R} \cdot \overset{*}{F} \\
t_i &= \frac{\lambda^{l-c}}{R} \cdot \overset{*}{t}_i, & e_i &= \frac{\lambda^{l-c}}{R} \cdot \overset{*}{e}_i, & g_i &= \frac{\lambda^{l-p}}{R} \cdot \overset{*}{g}_i \\
K_i &= \frac{\lambda^{l+p-c}}{R} \cdot \overset{*}{K}_i, & K &= \frac{\lambda^{l-c}}{R} \cdot \overset{*}{K}, & \Phi &= \frac{\lambda^{l}}{R} \cdot \overset{*}{\Phi} \\
n_i &= \frac{\lambda^{l-c}}{R} \cdot \overset{*}{n}_i, & \varkappa_i &= \frac{\lambda^{l-c}}{R} \cdot \overset{*}{\varkappa}_i, & \theta_i &= \frac{\lambda^{l-p}}{R} \cdot \overset{*}{\theta}_i
\end{aligned} \tag{1.9}$$

где

$$\overset{*}{L} = R \cdot \left(\frac{\overset{*}{\tau}_{11}}{R_1} + \frac{\overset{*}{\tau}_{22}}{R_2} \right), \quad \overset{*}{K} = R \cdot \left(\frac{\overset{*}{\nu}_{11}}{R_1} + \frac{\overset{*}{\nu}_{22}}{R_2} \right)$$

$$\overset{*}{F} = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial \overset{*}{\tau}_{13}}{\partial \xi_1} + \frac{R \lambda^{-p}}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \cdot \overset{*}{\tau}_{13} + \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial \overset{*}{\tau}_{23}}{\partial \xi_2} + \frac{R \lambda^{-p}}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \cdot \overset{*}{\tau}_{23}$$

$$\dot{L}_i=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\dot{\tau}_{ii}}{\partial\xi_i}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\cdot\left(\dot{\tau}_{ii}-\dot{\tau}_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\cdot\frac{\partial\dot{\tau}_{ji}}{\partial\xi_j}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\left(\dot{\tau}_{ji}+\dot{\tau}_{ij}\right)$$

$$\dot{\iota}_i=\frac{1}{A_j}\cdot\frac{\partial\dot{V}_i}{\partial\xi_j}-\frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\cdot\dot{V}_j\ ,\qquad \dot{g}_i=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\dot{V}_3}{\partial\xi_i}-\lambda^{-c}\cdot\frac{R}{R_i}\cdot\dot{V}_i$$

$$\dot{e}_i=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\dot{V}_i}{\partial\xi_i}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\dot{V}_j+\lambda^{c-2p}\cdot\frac{R}{R_i}\cdot\dot{V}_3 \tag{1.10}$$

$$\dot{\Phi}=\frac{1}{A_1}\cdot\frac{\partial\dot{\nu}_{13}}{\partial\xi_1}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_1A_2}\cdot\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\cdot\dot{\nu}_{13}+\frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial\dot{\nu}_{23}}{\partial\xi_2}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_1A_2}\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\cdot\dot{\nu}_{23}$$

$$\dot{K}_i=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\dot{\nu}_{ii}}{\partial\xi_i}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\cdot\left(\dot{\nu}_{ii}-\dot{\nu}_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\cdot\frac{\partial\dot{\nu}_{ji}}{\partial\xi_j}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\left(\dot{\nu}_{ji}+\dot{\nu}_{ij}\right)$$

$$\dot{n}_i=\frac{1}{A_j}\cdot\frac{\partial\dot{\omega}_i}{\partial\xi_j}-\frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\cdot\dot{\omega}_j\ ,\qquad \dot{\theta}_i=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\dot{\omega}_3}{\partial\xi_i}-\lambda^{-c}\cdot\frac{R}{R_i}\cdot\dot{\omega}_i$$

$$\dot{\varkappa}_i=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\dot{\omega}_i}{\partial\xi_i}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\dot{\omega}_j+\lambda^{c-2p}\cdot\frac{R}{R_i}\cdot\dot{\omega}_3$$

Тогда, имея в виду (1.8)–(1.10), вместо исходной системы уравнений НТУ с НППВ (1.1)–(1.3) будем иметь:

$$\lambda^{2p-l-c}\cdot\frac{1}{a_i}\cdot\dot{L}_i+\frac{\partial\dot{\tau}_{3i}}{\partial\zeta}+\lambda^{-l}\cdot\frac{R}{a_i}\cdot\frac{\dot{\tau}_{i3}+\dot{\tau}_{3i}}{R_i}=0\ ,\quad -\lambda^{-c}\cdot\dot{L}+\dot{F}+\frac{\partial\dot{\tau}_{33}}{\partial\zeta}=0$$

$$\lambda^{2p-l-c}\frac{1}{a_i}\cdot\dot{K}_i+\frac{\partial\dot{\nu}_{3i}}{\partial\zeta}+\lambda^{-l}\frac{R}{a_i}\cdot\frac{\dot{\nu}_{i3}+\dot{\nu}_{3i}}{R_i}-(-1)^j\cdot\lambda^{-l}R\frac{a_j}{a_i}\cdot\left(\dot{\tau}_{3j}-\dot{\tau}_{j3}\right)=0 \tag{1.11}$$

$$-\lambda^{-c}\cdot\dot{K}+\dot{\Phi}+\frac{\partial\dot{\nu}_{33}}{\partial\zeta}+\lambda^{-c}R\cdot a_1\cdot\dot{\tau}_{12}-\lambda^{-c}R\cdot a_2\cdot\dot{\tau}_{21}=0$$

$$\dot{\tau}_{ii}=\frac{1}{R}\cdot\frac{a_j}{a_i}\cdot\frac{\lambda'+2\mu'}{4\mu'\cdot(\lambda'+\mu')}\cdot\dot{e}_i-\frac{1}{R}\cdot\frac{\lambda'}{4\mu'\cdot(\lambda'+\mu')}\cdot\dot{e}_j-\lambda^{c-l}\frac{1}{a_i}\cdot\frac{\lambda'}{2\cdot(\lambda'+\mu')}\cdot\dot{\tau}_{33} \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial\dot{V}_3}{\partial\zeta}=\lambda^{2p-2l}\frac{R}{a_1a_2}(\lambda'+2\mu')\cdot\dot{\tau}_{33}+\lambda^{2p-l-c}\frac{R}{a_2}\cdot\lambda'\cdot\dot{\tau}_{11}+\lambda^{2p-l-c}\cdot\frac{R}{a_1}\cdot\lambda'\cdot\dot{\tau}_{22}$$

$$\frac{\partial\dot{V}_i}{\partial\zeta}=(-1)^j\cdot\lambda^{-l}R\cdot\dot{\omega}_j+\lambda^{c-l}\frac{R}{a_j}(\mu'+\alpha')\cdot\dot{\tau}_{3i}+\lambda^{c-l}\frac{R}{a_j}(\mu'-\alpha')\cdot\dot{\tau}_{i3}$$

$$\dot{\tau}_{i3}=\frac{1}{R}\cdot\frac{a_j}{a_i}\cdot\frac{1}{\mu'+\alpha'}\cdot\dot{g}_i+(-1)^j\cdot\lambda^{-c}\frac{a_j}{\mu'+\alpha'}\cdot\dot{\omega}_j-\frac{\mu'-\alpha'}{\mu'+\alpha'}\cdot\dot{\tau}_{3i}$$

$$\dot{\tau}_{ij}=\frac{1}{R}\cdot\frac{a_j}{a_i}\cdot\frac{\mu'+\alpha'}{4\mu'\cdot\alpha'}\cdot\dot{\iota}_j-\frac{1}{R}\cdot\frac{\mu'-\alpha'}{4\mu'\cdot\alpha'}\cdot\dot{\iota}_i-(-1)^j\cdot\lambda^{c-2p}\frac{a_j}{2\alpha'}\cdot\dot{\omega}_3$$

$$\dot{\nu}_{ii}=\frac{1}{R}\cdot\frac{a_j}{a_i}\cdot\frac{2\gamma'+\beta'}{4\gamma'\cdot(\gamma'+\beta')}\cdot\dot{\varkappa}_i-\frac{1}{R}\cdot\frac{\beta'}{4\gamma'\cdot(\gamma'+\beta')}\cdot\dot{\varkappa}_j-\lambda^{c-l}\frac{1}{a_i}\cdot\frac{\beta'}{2\cdot(\gamma'+\beta')}\cdot\dot{\nu}_{33} \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial\dot{\omega}_3}{\partial\zeta}=\lambda^{2p-2l}\frac{R}{a_1a_2}(2\gamma'+\beta')\cdot\dot{\nu}_{33}+\lambda^{2p-l-c}\frac{R}{a_2}\cdot\beta'\cdot\dot{\nu}_{11}+\lambda^{2p-l-c}\cdot\frac{R}{a_1}\cdot\beta'\cdot\dot{\nu}_{22}$$

$$\frac{\partial\dot{\omega}_i}{\partial\zeta}=\lambda^{c-l}\frac{R}{a_j}(\gamma'+\varepsilon')\cdot\dot{\nu}_{3i}+\lambda^{c-l}\frac{R}{a_j}(\gamma'-\varepsilon')\cdot\dot{\nu}_{i3}\ ,\quad a_i=1+\frac{R\lambda^{-l}}{R_i}\cdot\zeta$$

$$\dot{\nu}_{i3}=\frac{1}{R}\cdot\frac{a_j}{a_i}\cdot\frac{1}{\gamma'+\varepsilon'}\cdot\dot{\theta}_i-\frac{\gamma'-\varepsilon'}{\gamma'+\varepsilon'}\cdot\dot{\nu}_{3i}\ ,\quad \dot{\nu}_{ij}=\frac{1}{R}\cdot\frac{a_j}{a_i}\cdot\frac{\gamma'+\varepsilon'}{4\gamma'\cdot\varepsilon'}\cdot\dot{n}_j-\frac{1}{R}\cdot\frac{\gamma'-\varepsilon'}{4\gamma'\cdot\varepsilon'}\cdot\dot{n}_i$$

Наша цель теперь будет заключаться в том, чтобы приближенно свести трехмерные (с независимыми переменными ξ_1, ξ_2, ζ) уравнения НТУ с НППВ (1.11),(1.12) к двумерным (с независимыми переменными ξ_1, ξ_2) уравнениям. Для этого, в частности, необходимо избавиться в (1.11), (1.12) от дифференцирования по ζ. Эту операцию будем выполнять так, чтобы в коэффициентах получаемых уравнений был явно виден характер их зависимости от параметра λ и переменной ζ. В результате, на уровне асимптотической точности $0\left(\lambda^{2p-2l}\right)$ получим:

$$\dot{V}_i=\overset{0}{V}_i(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{V}_i(\xi_1,\xi_2)}\ ,\quad \dot{\omega}_i=\overset{0}{\omega}_i(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\omega}_i(\xi_1,\xi_2)}$$

$$\dot{V}_3=\overset{0}{V}_3(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{V}_3(\xi_1,\xi_2)\ ,\quad \dot{\omega}_3=\overset{0}{\omega}_3(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\omega}_3(\xi_1,\xi_2)$$

$$\dot{\iota}_i=\overset{0}{\iota}_i(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\iota}_i(\xi_1,\xi_2)}\ ,\quad \dot{n}_i=\overset{0}{n}_i(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{n}_i(\xi_1,\xi_2)}$$

$$\dot{e}_i=\overset{0}{e}_i(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{e}_i(\xi_1,\xi_2)}\ ,\quad \dot{\varkappa}_i=\overset{0}{\varkappa}_i(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\varkappa}_i(\xi_1,\xi_2)}$$

$$\dot{g}_i=\overset{0}{g}_i(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{g}_i(\xi_1,\xi_2)\ ,\quad \dot{\theta}_i=\overset{0}{\theta}_i(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\theta}_i(\xi_1,\xi_2) \quad (1.13)$$

$$\dot{\tau}_{ii}=\overset{0}{\tau}_{ii}(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{ii}(\xi_1,\xi_2)}\ ,\quad \dot{\nu}_{ii}=\overset{0}{\nu}_{ii}(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\nu}_{ii}(\xi_1,\xi_2)}$$

$$\dot{\tau}_{ij}=\overset{0}{\tau}_{ij}(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{ij}(\xi_1,\xi_2)}\ ,\quad \dot{\nu}_{ij}=\overset{0}{\nu}_{ij}(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\nu}_{ij}(\xi_1,\xi_2)}$$

$$\dot{\tau}_{3i}=\overset{0}{\tau}_{3i}(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{3i}(\xi_1,\xi_2)\ ,\quad \dot{\nu}_{3i}=\overset{0}{\nu}_{3i}(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\nu}_{3i}(\xi_1,\xi_2)$$

$$\dot{\tau}_{i3}=\overset{0}{\tau}_{i3}(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{i3}(\xi_1,\xi_2)\ ,\quad \dot{\nu}_{i3}=\overset{0}{\nu}_{i3}(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\nu}_{i3}(\xi_1,\xi_2)$$

$$\dot{L}_i=\overset{0}{L}_i(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{L}_i(\xi_1,\xi_2)}\ ,\quad \dot{K}_i=\overset{0}{K}_i(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{K}_i(\xi_1,\xi_2)}$$

$$\overset{*}{L}=\overset{0}{L}(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{L}(\xi_1,\xi_2)}, \quad \overset{*}{K}=\overset{0}{K}(\xi_1,\xi_2)+\underline{\lambda^{c-l}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{K}(\xi_1,\xi_2)}$$

$$\overset{*}{F}=\overset{0}{F}(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{F}(\xi_1,\xi_2), \quad \overset{*}{\Phi}=\overset{0}{\Phi}(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\Phi}(\xi_1,\xi_2) \quad (1.13)$$

$$\overset{*}{\tau}_{33}=\overset{0}{\tau}_{33}(\xi_1,\xi_2)+\zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{33}(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta^2\cdot\overset{2}{\tau}_{33}(\xi_1,\xi_2)$$

$$\overset{*}{\nu}_{33}=\overset{0}{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2)+\zeta\cdot\overset{1}{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta^2\cdot\overset{2}{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2)$$

Здесь, основные функции, зависящие от ξ_1 и ξ_2, представляют собой $\overset{0}{V}_1(\xi_1,\xi_2)$, $\overset{0}{V}_3(\xi_1,\xi_2)$, $\overset{0}{\omega}_1(\xi_1,\xi_2)$ и $\overset{0}{\omega}_3(\xi_1,\xi_2)$; остальные величины будут определяться через указанные функции по соответствующим формулам. Для получения формул для искомых величин поставленной задачи следует (1.13) подставить в выражения (1.8).

Отметим, что на уровне асимптотической точности $0(\lambda^{p-l})$ подчеркнутые члены пренебрегаются.

Специфические свойства внутреннего итерационного процесса для трехмерного тонкого упругого тела оболочки состоят в том, что полученная в асимптотических приближениях система уравнений НТУ с НППВ, как убедились, допускает интегрирование по переменной ζ, и в описании внутреннего напряженно-деформированного состояния остается выяснить роль переменных (ξ_1,ξ_2), задающих положение точки на срединной поверхности оболочки. С этой точки зрения целесобразно введение вместо силовых и моментных напряжений статически им эквивалентные усилия и моменты [11, 25, 2], которые можем представить следующими формулами:

$$T_{ii}=\int_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\cdot\sigma_{ii}d\alpha_3, \qquad S_{ij}=\int_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\cdot\sigma_{ij}d\alpha_3$$

$$N_{3i}=-\int_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\cdot\sigma_{3i}d\alpha_3, \quad L_{3i}=-\int_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\cdot\nu_{3i}d\alpha_3 \qquad [3\leftrightarrows i]$$

$$L_{ii}=\int_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\cdot\nu_{ii}d\alpha_3, \qquad L_{ij}=\int_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\cdot\nu_{ij}d\alpha_3$$

Используем также понятия перемещений и поворотов точек срединной поверхности оболочки:

$$u_i=V_i\,\big|_{\zeta=0}, \quad w=-V_3\big|_{\zeta=0}, \quad \Omega_i=\omega_i\big|_{\zeta=0}, \quad \Omega_3=-\omega_3\big|_{\zeta=0}$$

На основе построенной асимптотики, для поставленной краевой задачи (1.1)–(1.5), на уровне асимптотической точности $0(\lambda^{2p-2l})$ приходим к следующей разрешающей системе двумерных уравнений:

Уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial T_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\cdot(T_{ii}-T_{jj})+\frac{1}{A_j}\cdot\frac{\partial S_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot(S_{ij}+S_{ji})-$$

$$-\underline{\frac{N_{i3}}{R_i}}-\left(1+\underline{\frac{h^2}{R_iR_j}}\right)(q_i^++q_i^-)-\underline{h\left(\frac{1}{R_i}+\frac{1}{R_j}\right)(q_i^+-q_i^-)}=0$$

$$\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2N_{13})+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1N_{23})\right]+$$

$$+\left(1+\frac{h^2}{R_1R_2}\right)\left(q_3^{+}+q_3^{-}\right)+h\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(q_3^{+}-q_3^{-}\right)=0 \qquad (1.14)$$

$$\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial L_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\cdot(L_{ii}-L_{jj})+\frac{1}{A_j}\cdot\frac{\partial L_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot(L_{ij}+L_{ji})-\frac{L_{i3}}{R_i}+$$

$$+(-1)^j\cdot(N_{3j}-N_{j3})-\left(1+\frac{h^2}{R_iR_j}\right)\left(m_i^{+}+m_i^{-}\right)-h\left(\frac{1}{R_i}+\frac{1}{R_j}\right)\left(m_i^{+}-m_i^{-}\right)=0$$

$$\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2L_{13})+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1L_{23})\right]-(S_{12}-S_{21})+$$

$$+\left(1+\frac{h^2}{R_1R_2}\right)\left(m_3^{+}+m_3^{-}\right)+h\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(m_3^{+}-m_3^{-}\right)=0$$

Соотношения упругости

$$T_{ii}=2h\cdot\frac{\lambda'+2\mu'}{4\mu'\cdot(\lambda'+\mu')}\cdot\left(\Gamma_{ii}-\frac{\lambda'}{\lambda'+2\mu'}\cdot\Gamma_{jj}\right)+h\cdot\frac{\lambda'}{2\cdot(\lambda'+\mu')}\cdot\left(q_3^{+}-q_3^{-}\right)$$

$$S_{ij}=2h\cdot\left(\frac{\mu'+\alpha'}{4\mu'\cdot\alpha'}\cdot\Gamma_{ij}-\frac{\mu'-\alpha'}{4\mu'\cdot\alpha'}\cdot\Gamma_{ji}\right),\quad N_{i3}=-2h\cdot\frac{1}{\mu'+\alpha'}\cdot\Gamma_{i3}-\frac{\mu'-\alpha'}{\mu'+\alpha'}\cdot N_{3i} \qquad (1.15)$$

$$L_{ii}=2h\cdot\frac{2\gamma'+\beta'}{4\gamma'\cdot(\gamma'+\beta')}\cdot\left(\chi_{ii}-\frac{\beta'}{2\gamma'+\beta'}\cdot\chi_{jj}\right)+h\cdot\frac{\beta'}{2\cdot(\gamma'+\beta')}\cdot\left(m_3^{+}-m_3^{-}\right)$$

$$L_{ij}=2h\cdot\left(\frac{\gamma'+\varepsilon'}{4\gamma'\cdot\varepsilon'}\cdot\chi_{ij}-\frac{\gamma'-\varepsilon'}{4\gamma'\cdot\varepsilon'}\cdot\chi_{ji}\right),\quad L_{i3}=-2h\cdot\frac{1}{\gamma'+\varepsilon'}\cdot\chi_{i3}-\frac{\gamma'-\varepsilon'}{\gamma'+\varepsilon'}\cdot L_{3i}$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot u_j-\frac{w}{R_i},\qquad \chi_{ii}=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\Omega_j-\frac{\Omega_3}{R_i}$$

$$\Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot u_i+(-1)^j\cdot\Omega_3,\quad \chi_{ij}=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\Omega_i \qquad (1.16)$$

$$\Gamma_{i3}=-\left(\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_i}\right)+(-1)^j\cdot\Omega_j,\qquad \chi_{i3}=-\left(\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}+\frac{\Omega_i}{R_i}\right)$$

Здесь следует учесть, что

$$N_{3i}=h\cdot\left[\left(q_i^{+}-q_i^{-}\right)+\frac{h}{R_j}\cdot\left(q_i^{+}+q_i^{-}\right)\right],\quad L_{3i}=h\cdot\left[\left(m_i^{+}-m_i^{-}\right)+\frac{h}{R_j}\cdot\left(m_i^{+}+m_i^{-}\right)\right] \qquad (1.17)$$

Система уравнений $(1.14)-(1.17)$ представляет собой разрешающую систему уравнений прикладной-двумерной теории микрополярных упругих тонких оболочек на уровне асимптотического приближения $0\left(\lambda^{2p-2l}\right)$.

Отметим,что к разрешающей системе уравнений прикладной-двумерной теории микрополярных упругих тонких оболочек можем прийти также на уровне асимптотической точности $0\left(\lambda^{p-l}\right)$. Эта система опять представляет систему $(1.14)-(1.17)$, где следует пренебречь подчеркнутыми членами. При этом подчеркнутыми членами следует пренебречь также в формулах (1.13).

После решения основной разрешающей системы уравнений $(1.14)-(1.17)$ все расчетные величины трехмерной задачи $(1.1)-(1.5)$ будут определяться по соответствующим формулам.

2. Обратимся к изучению краевых упругих явлений и будем снова исходить из уравнений трехмерной теории НТУ с НППВ $(1.1)-(1.3)$.

Будем считать, что край оболочки, вблизи которого надо исследовать напряженное состояние, задается уравнением $\alpha_1=\alpha_{10}$, и введем замену независимых переменных по формулам [18]:

$$\alpha_1-\alpha_{10}=R\lambda^{-l}\cdot\xi_1, \qquad \alpha_2=R\lambda^{-p}\cdot\xi_2, \qquad \alpha_3=R\lambda^{-l}\cdot\zeta \tag{2.1}$$

где величины $R,\ \lambda,\ l,\ p$ имеют тот же смысл, что и в (1.6).

Будем считать, что в краевом напряженно-деформированном состоянии искомые величины не меняют своего асимптотического поведения при дифференцировании по ξ_1,ξ_2,ζ.

Так же, как и в предыдущем пункте, введем несимметричные силовые напряжения [18] и аналогичным образом введем несимметричные моментные напряжения , при этом, при изучении погранслойной задачи букву τ заменяем на букву P, а ν –на Q.

Кроме того, преобразуем компоненты перемещений и вращений по формулам:

$$W==h^{-1}\cdot V_3\ ,\ U_k=h^{-1}\cdot V_k\ \ (k=1,2)\ ,\ \ \Omega_m=h^{-1}\cdot\omega_m\ \ (m=1,2,3) \tag{2.2}$$

После подстановки $(2.1),(2.2)$ в $(1.1)-(1.3)$, уравнения НТУ с НППВ можем представить в виде четырех групп уравнений, которые при отбрасывании величин порядка λ^{p-l} можем записать так:

Группа А

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial P_{12}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial P_{32}}{\partial\zeta}=0\ ,\qquad \frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial U_2}{\partial\xi_1}-\left[(\mu'+\alpha')\cdot P_{12}+(\mu'-\alpha')\cdot P_{21}\right]=0$$

$$-\left[(\mu'+\alpha')\cdot P_{21}+(\mu'-\alpha')\cdot P_{12}\right]=0\ ,\ -\left[(\mu'+\alpha')\cdot P_{23}+(\mu'-\alpha')\cdot P_{32}\right]=0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial\zeta}-\left[(\mu'+\alpha')\cdot P_{32}+(\mu'-\alpha')\cdot P_{23}\right]=0$$

Группа В

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial Q_{12}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial Q_{32}}{\partial\zeta}=0\ ,\ \frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial\Omega_2}{\partial\xi_1}-\left[(\gamma'+\varepsilon')\cdot Q_{12}+(\gamma'-\varepsilon')\cdot Q_{21}\right]=0$$

$$-\left[(\gamma'+\varepsilon')\cdot Q_{21}+(\gamma'-\varepsilon')\cdot Q_{12}\right]=0\,,\quad -\left[(\gamma'+\varepsilon')\cdot Q_{23}+(\gamma'-\varepsilon')\cdot Q_{32}\right]=0 \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \zeta}-\left[(\gamma'+\varepsilon')\cdot Q_{32}+(\gamma'-\varepsilon')\cdot Q_{23}\right]=0$$

Группа C

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial P_{11}}{\partial \xi_1}+\frac{\partial P_{31}}{\partial \zeta}=0\,,\quad \frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial P_{13}}{\partial \xi_1}+\frac{\partial P_{33}}{\partial \zeta}=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial U_1}{\partial \xi_1}-\left[(2\mu'+\lambda')\cdot P_{11}+\lambda'\cdot(P_{22}+P_{33})\right]=0 \qquad (2.5)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \zeta}-\left[(2\mu'+\lambda')\cdot P_{33}+\lambda'\cdot(P_{11}+P_{22})\right]=0\,,\quad -\left[(2\mu'+\lambda')\cdot P_{22}+\lambda'\cdot(P_{11}+P_{33})\right]=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial W}{\partial \xi_1}-\left[(\mu'+\alpha')\cdot P_{13}+(\mu'-\alpha')\cdot P_{31}\right]=0,\ \frac{\partial U_1}{\partial \zeta}-\left[(\mu'+\alpha')\cdot P_{31}+(\mu'-\alpha')\cdot P_{13}\right]=0$$

Группа D

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial Q_{11}}{\partial \xi_1}+\frac{\partial Q_{31}}{\partial \zeta}=0\,,\quad \frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial Q_{13}}{\partial \xi_1}+\frac{\partial Q_{33}}{\partial \zeta}=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial \Omega_1}{\partial \xi_1}-\left[(2\gamma'+\beta')\cdot Q_{11}+\beta'\cdot(Q_{22}+Q_{33})\right]=0 \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial \Omega_3}{\partial \zeta}-\left[(2\gamma'+\beta')\cdot Q_{33}+\beta'\cdot(Q_{11}+Q_{22})\right]=0\,,\quad -\left[(2\gamma'+\beta')\cdot Q_{22}+\beta'\cdot(Q_{11}+Q_{33})\right]=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial \Omega_3}{\partial \xi_1}-\left[(\gamma'+\varepsilon')\cdot Q_{13}+(\gamma'-\varepsilon')\cdot Q_{31}\right]=0$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \zeta}-\left[(\gamma'+\varepsilon')\cdot Q_{31}+(\gamma'-\varepsilon')\cdot Q_{13}\right]=0$$

Величины $S=(P_{12}\,,\,P_{21}\,,\,P_{23}\,,\,P_{32}\,,\,U_2)$ и $H=(Q_{11}\,,\,Q_{22}\,,\,Q_{33}\,,\,Q_{13}\,,\,Q_{31}\,,\,\Omega_1\,,\,\Omega_3)$ удовлетворяют соответственно однородным двумерным уравнениям (2.3) и (2.6) – так называемой [25, 26] силовой и моментной антиплоских задач несимметричной теории упругости. Их исходные решения обозначим соответственно $S(a)=S^0(a)$ и $H(a)=H^0(a)$. Величины $L=(P_{11}\,,\,P_{22}\,,\,P_{33}\,,\,P_{13}\,,\,P_{31}\,,\,U_1\,,\,W)$ и $R=(Q_{12}\,,\,Q_{21}\,,\,Q_{23}\,,\,Q_{32}\,,\,\Omega_2)$ удовлетворяют соответственно однородным двумерным уравнениям (2.5) и (2.4) – так называемой [25, 26] силовой и моментной плоской задачи несимметричной теории упругости. Их исходные решения обозначим соответственно $L(b)=L^0(b)$ и $R(b)=R^0(b)$. Основываясь на этом, будем называть решения типа (a) и (b) силовым и моментным антиплоским и плоским решениями уравнений несимметричной теории упругости соответственно [25, 26].

Описанное исходное приближение можно уточнять методом итерации и, помимо главных, строить следующее приближение для напряжений (силовых и моментных), перемещений и поворотов. Тогда получим:

a-решения

$$S(a)=S^0(a)+\lambda^{p-l}\cdot S^1(a)\,,\quad L(a)=0+\lambda^{p-l}\cdot L^1(a) \qquad (2.7)$$

$$H(a)=H^0(a)+\lambda^{p-1}\cdot H^1(a)\,,\quad R(a)=0+\lambda^{p-1}\cdot R^1(a)$$

b -решения

$$L(b)=L^0(b)+\lambda^{p-1}\cdot L^1(b)\,,\quad S(b)=0+\lambda^{p-1}\cdot S^1(b)$$
$$R(b)=R^0(b)+\lambda^{p-1}\cdot R^1(b)\,,\quad H(b)=0+\lambda^{p-1}\cdot H^1(b) \tag{2.8}$$

Отметим, что нас будут интересовать только такие решения уравнений НТУ с НППВ (2.3)–(2.6) типа (a) и (b), которые на лицевых поверхностях удовлетворяют однородным граничным условиям и, кроме того, затухают при удалении от края $\alpha_1=\alpha_{10}$. Такие решения будем называть $[25,26]$ силовым плоским погранслоем, силовым антиплоским погранслоем и моментным плоским погранслоем, моментным антиплоским погранслоем.

Заметим, что как и в случае пластин $[25,26]$, в отличие от классической теории упругости (где проявляются два погранслоя–силовой плоский и силовой антиплоский погранслои), по теории НТУ с НППВ проявляются четыре типа погранслоев. Это один из существенных проявлений теории НТУ с НППВ.

На основании уравнений силового и моментного погранслоев получим, что их решения удовлетворяют следующим важным равенствам:

$$\int_{-1}^{1}\overset{b\,(0)}{P}_{11}\Big|_{\xi_1=0}d\zeta=0\,,\quad \int_{-1}^{1}\overset{a\,(0)}{P}_{12}\Big|_{\xi_1=0}d\zeta=0\,,\quad \int_{-1}^{1}\overset{b\,(0)}{P}_{13}\Big|_{\xi_1=0}d\zeta=0$$
$$\int_{-1}^{1}\overset{b\,(0)}{U}_{1}\Big|_{\xi_1=0}d\zeta-\frac{2\mu'\lambda'}{2\mu'+\lambda'}\cdot\int_{-1}^{1}\zeta\cdot P_{13}\Big|_{\xi_1=0}d\zeta=0\,,\quad \int_{-1}^{1}\overset{a\,(0)}{U}_{2}\Big|_{\xi_1=0}d\zeta=0$$
$$\int_{-1}^{1}\overset{b\,(0)}{W}\Big|_{\xi_1=0}d\zeta-(\mu'-\alpha')\cdot\int_{-1}^{1}\zeta\cdot\overset{b\,(0)}{P}_{11}\Big|_{\xi_1=0}d\zeta=0 \tag{2.9}$$
$$\int_{-1}^{1}\overset{a\,(0)}{Q}_{11}\Big|_{\xi_1=0}d\zeta=0\,,\quad \int_{-1}^{1}\overset{b\,(0)}{Q}_{12}\Big|_{\xi_1=0}d\zeta=0,\quad \int_{-1}^{1}\overset{a\,(0)}{Q}_{13}\Big|_{\xi_1=0}d\zeta=0$$
$$\int_{-1}^{1}\overset{a\,(0)}{\Omega}_{1}\Big|_{\xi_1=0}d\zeta-\frac{2\gamma'\beta'}{2\gamma'+\beta'}\cdot\int_{-1}^{1}\zeta\cdot\overset{a\,(0)}{Q}_{13}\Big|_{\xi_1=0}d\zeta=0\,,\quad \int_{-1}^{1}\overset{b\,(0)}{\Omega}_{2}\Big|_{\xi_1=0}d\zeta=0$$
$$\int_{-1}^{1}\overset{a\,(0)}{\Omega}_{3}\Big|_{\xi_1=0}d\zeta-(\gamma'-\varepsilon')\cdot\int_{-1}^{1}\zeta\cdot\overset{a\,(0)}{Q}_{11}\Big|_{\xi_1=0}d\zeta=0$$

Равенства (2.9) назовем условиями затухания. Очевидно, что они необходимы для того, чтобы существовали затухающие решения типа (a) и (b), а следовательно, и для того, чтобы существовали силовой антиплоский и плоский и моментный антиплоский и плоский погранслои.

3. В дальнейшем будем исходить из предположения, что напряженное состояние трехмерного тела оболочки по НТУ с НППВ составляется из внутреннего напряженного состояния и погранслоев:

$$(\text{НДС})_{\text{полн}}=(\text{НДС})_{\text{вн}}+\lambda^{r}\cdot(\text{НДС})^{a}_{\text{кр}}+\lambda^{\theta}\cdot(\text{НДС})^{b}_{\text{кр}} \tag{3.1}$$

где числа r, θ назовем показателями интенсивности плоского и антиплоского погранслоев, которые пока произвольны. Погранслои, как уже говорилось, локализуются вблизи бокового края оболочки, а под внутренним понимается напряженное состояние, не обладающее свойством затухания, и захватывающее, вообще говоря, всю область тела оболочки.

Отметим, что внутреннее напряженное состояние и погранслои в совокупности содержат достаточно произволов для выполнения трехмерных граничных условий (1.5) на боковой поверхности оболочки.

Для того, чтобы осуществить сращивание внутренней задачи и погранслоев по НТУ с НППВ, следует подставить (3.1) в граничные условия (1.5). При этом, показатели r и θ будем выбирать так, чтобы получился удобный итерационный процесс для выполнения граничных условий (1.5).

Единственно приемлемые значения r и θ в случае нагруженного края оболочки на уровне асимптотической точности $0\left(\lambda^{2p-2l}\right)$ определяются так:

$$r = p - c\ , \quad \theta = p - c \tag{3.2}$$

С учетом (3.2), в результате подстановки (3.1) в условия (1.5), получим граничные условия в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\overset{*}{\tau}_{11}+\lambda^{p-l}\cdot\overset{b\,0}{P}_{11}+\lambda^{2p-2l}\cdot\left[\overset{a\,1}{P}_{11}+\overset{b\,1}{P}_{11}\right]=\lambda^{p-l}\left(1+\frac{R}{R_2}\lambda^{-l}\zeta\right)\cdot\widetilde{p}_1^*\\
\overset{*}{\tau}_{12}+\lambda^{p-l}\cdot\overset{a\,0}{P}_{12}+\lambda^{2p-2l}\cdot\left[\overset{a\,1}{P}_{12}+\overset{b\,1}{P}_{12}\right]=\lambda^{p-l}\left(1+\frac{R}{R_2}\lambda^{-l}\zeta\right)\cdot\widetilde{p}_2^*\\
\overset{*}{\tau}_{13}+\lambda^{2p-l-c}\cdot\overset{b\,0}{P}_{13}+\lambda^{3p-2l-c}\cdot\left[\overset{a\,1}{P}_{13}+\overset{b\,1}{P}_{13}\right]=\lambda^{2p-l-c}\left(1+\frac{R}{R_2}\lambda^{-l}\zeta\right)\cdot\widetilde{p}_3^*\\
\overset{*}{\nu}_{11}+\lambda^{p-l}\cdot\overset{a\,0}{Q}_{11}+\lambda^{2p-2l}\cdot\left[\overset{a\,1}{Q}_{11}+\overset{b\,1}{Q}_{11}\right]=\lambda^{p-l}\left(1+\frac{R}{R_2}\lambda^{-l}\zeta\right)\cdot\widetilde{m}_1^*\\
\overset{*}{\nu}_{12}+\lambda^{p-l}\cdot\overset{b\,0}{Q}_{12}+\lambda^{2p-2l}\cdot\left[\overset{a\,1}{Q}_{12}+\overset{b\,1}{Q}_{12}\right]=\lambda^{p-l}\left(1+\frac{R}{R_2}\lambda^{-l}\zeta\right)\cdot\widetilde{m}_2^*\\
\overset{*}{\nu}_{13}+\lambda^{2p-l-c}\cdot\overset{a\,0}{Q}_{13}+\lambda^{3p-2l-c}\cdot\left[\overset{a\,1}{Q}_{13}+\overset{b\,1}{Q}_{13}\right]=\lambda^{2p-l-c}\left(1+\frac{R}{R_2}\lambda^{-l}\zeta\right)\cdot\widetilde{m}_3^*\\
\left(\alpha_1=\alpha_{10}\right)
\end{gathered}\tag{3.3}$$

(здесь принимаются обозначения $p_i^* = \lambda^{p-c}\cdot\widetilde{p}_i^*,\quad m_i^* = \lambda^{p-c}\cdot\widetilde{m}_i^*\quad (i=1,2,3)$).

Ограничиваясь соответствующей асимптотической точностью и используя условия затухания (2.9), получим, что граничные условия трехмерной теории НТУ с НППВ (1.5) расщепляются между внутренней задачей (прикладной-двумерной теории оболочек) и погранслойными задачами.

Для прикладной-двумерной теории микрополярных оболочек (определяющая система уравнений (1.14)–(1.17)), получим граничные условия следующего вида:

$$T_{11}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_1^*d\alpha_3\ ,\qquad S_{12}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_2^*d\alpha_3$$

$$N_{13}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = -\int_{-h}^{h} p_3^{*} d\alpha_3 + \tilde{f}_1 \tag{3.4}$$

$$L_{11}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^{h} m_1^{*} d\alpha_3\,, \qquad L_{12}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = \int_{-h}^{h} m_2^{*} d\alpha_3$$

$$L_{13}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}} = -\int_{-h}^{h} m_3^{*} d\alpha_3 + \tilde{f}_2$$

где

$$\tilde{f}_1 = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad p=0 \\ \dfrac{\mu'-\alpha'}{\mu'+\alpha'}\cdot\left[\dfrac{1}{A_{20}}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\alpha_2}\right]\displaystyle\int_{-h}^{h} p_2^{*}\cdot\alpha_3\, d\alpha_3 \quad \text{при} \quad p>0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1\to 2, \quad p\to m, \\ \mu'\to\gamma', \alpha'\to\varepsilon', \end{pmatrix}$$

Граничные условия каждого из четырех типов погранслоев будут выражаться так:

Для задачи (2.3)

$$\overset{a\,0}{P}_{12}\Big|_{\xi_1=0} = \tilde{p}_2^{*} - \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}\tilde{p}_2^{*} d\zeta - \lambda^{l-p}\cdot\varphi_2 \tag{3.5}$$

Для задачи (2.4)

$$\overset{b\,0}{Q}_{12}\Big|_{\xi_1=0} = \tilde{m}_2^{*} - \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}\tilde{m}_2^{*} d\zeta - \lambda^{l-p}\cdot\psi_2 \tag{3.6}$$

Для задачи (2.5)

$$\overset{b\,0}{P}_{11}\Big|_{\xi_1=0} = \tilde{p}_1^{*} - \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}\tilde{p}_1^{*} d\zeta - \lambda^{l-p}\cdot\varphi_1 \tag{3.7}$$

$$\overset{b\,0}{P}_{13}\Big|_{\xi_1=0} = \tilde{p}_3^{*} - \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}\tilde{p}_3^{*} d\zeta - \zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{13}(\xi_1,\xi_2)\Big|_{\xi_1=0}$$

Для задачи (2.6)

$$\overset{a\,0}{Q}_{11}\Big|_{\xi_1=0} = \tilde{m}_1^{*} - \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}\tilde{m}_1^{*} d\zeta - \lambda^{l-p}\cdot\psi_1 \tag{3.8}$$

$$\overset{a\,0}{Q}_{13}\Big|_{\xi_1=0} = \tilde{m}_3^{*} - \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}\tilde{m}_3^{*} d\zeta - \zeta\cdot\overset{1}{\nu}_{13}(\xi_1,\xi_2)\Big|_{\xi_1=0}$$

где

$$\varphi_i = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad 2p\ge l \\ \lambda^{c-l}\zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{1i}(\xi_1,\xi_2)\Big|_{\xi_1=0} \quad \text{при} \quad 2p<l\,, \end{cases} \qquad \begin{matrix}(i=1,\ 2)\\ (\varphi\to\psi,\ \tau\to\nu)\end{matrix}$$

Применяемый асимптотический метод позволил построить прикладную двумерную теорию тонких оболочек на основе НТУ с НППВ (уравнения (1.14)–(1.17) и граничные условия (3.4)) и изучить краевое напряженное состояние (по уравнениям (2.3)-(2.6) и граничным условиям (3.5)–(3.8)).

4. Оказывается, что если будем ставить ограничения на некоторые упругие константы материала оболочки, то для поставленной краевой задачи (1.1)–(1.5) будет применима так называемая, обобщенная классическая асимптотика (т. е. силовая часть и перемещения будут иметь асимптотику классического случая [18], моментные напряжения и повороты будут иметь соответствующую асимптотику).

Заранее отметим, что в этом случае приходим к теории микрополярных оболочек со стесненным вращением.

В трехмерных уравнениях (1.1)–(1.3) перейдем к безразмерным величинам:

$$\bar{\tau}_{ij}=\frac{1}{E}\cdot\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\cdot\sigma_{ij}\ ,\qquad \bar{\nu}_{ij}=\frac{1}{R\cdot E}\cdot\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\cdot\mu_{ij}$$

$$\bar{\tau}_{33}=\frac{1}{E}\cdot\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\cdot\sigma_{33}\ ,\qquad \bar{\nu}_{33}=\frac{1}{R\cdot E}\cdot\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\cdot\mu_{33}$$

$$\bar{\tau}_{i3}=\frac{1}{E}\cdot\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\cdot\sigma_{i3}\ ,\qquad \bar{\nu}_{i3}=\frac{1}{R\cdot E}\cdot\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\cdot\mu_{i3}\qquad \left[3\leftrightarrows 1\right] \tag{4.1}$$

$$\bar{V}_i=\frac{1}{R}\cdot V_i\quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

$$\bar{\gamma}'=R^2\cdot E\cdot\gamma'\ ,\ \ \bar{\beta}'=R^2\cdot E\cdot\beta'\ ,\ \ \bar{\varepsilon}'=R^2\cdot E\cdot\varepsilon'\ ,\ \ \bar{R}_i=R_i/R\ \ (i=1,2)$$

$$\bar{\mu}'=E\cdot\mu'\ ,\qquad \bar{\alpha}'=E\cdot\alpha'\ ,\qquad \bar{\lambda}'=E\cdot\lambda'\ ;$$

и выполним замену независимых переменных (1.6). Сделаем также следующие замены искомых величин:

$$\bar{\tau}_{ij}=\lambda^{l}\cdot\dot{\tau}_{ij}\ ,\qquad \bar{\nu}_{ij}=\lambda^{2p-l-c}\cdot\dot{\nu}_{ij}\qquad (i=1,2;\ j=1,2)$$

$$\bar{\tau}_{i3}=\lambda^{p}\cdot\dot{\tau}_{i3}\ ,\qquad \bar{\nu}_{i3}=\lambda^{p-l}\cdot\dot{\nu}_{i3}\qquad (i=1,2),\ \ [\mathrm{i}\leftrightarrows 3]$$

$$\bar{\tau}_{33}=\lambda^{c}\cdot\dot{\tau}_{33}\ ,\qquad \bar{\nu}_{33}=\lambda^{2p-l-c}\cdot\dot{\nu}_{33}\ , \tag{4.2}$$

$$\bar{V}_i=\lambda^{l-p}\cdot\dot{V}_i\ ,\qquad \omega_i=\lambda^{p+l-c}\cdot\dot{\omega}_i\qquad (i=1,2)$$

$$\bar{V}_3=\lambda^{l-c}\cdot\dot{V}_3\ ,\qquad \omega_3=\lambda^{l}\cdot\dot{\omega}_3$$

Кроме того, введем формулы:

$$L_i=\frac{\lambda^{l+p}}{R}\cdot\dot{L}_i\ ,\qquad L=\frac{\lambda^{l}}{R}\cdot\dot{L}\ ,\qquad F=\frac{\lambda^{2p}}{R}\cdot\dot{F}$$

$$t_i=\frac{\lambda^{l}}{R}\cdot\dot{t}_i\ ,\qquad e_i=\frac{\lambda^{l}}{R}\cdot\dot{e}_i\ ,\qquad g_i=\frac{\lambda^{l+p-c}}{R}\cdot\dot{g}_i \tag{4.3}$$

$$K_i=\frac{\lambda^{3p-l-c}}{R}\cdot\dot{K}_i\ ,\qquad K=\frac{\lambda^{2p-l-c}}{R}\cdot\dot{K}\ ,\qquad \Phi=\frac{\lambda^{2p-l}}{R}\cdot\dot{\Phi}$$

$$n_i=\frac{\lambda^{2p+l-c}}{R}\cdot\dot{n}_i\ ,\qquad \varkappa_i=\frac{\lambda^{2p+l-c}}{R}\cdot\dot{\varkappa}_i\ ,\qquad \theta_i=\frac{\lambda^{l+p}}{R}\cdot\dot{\theta}_i$$

где $\dot{L}_i$, $\dot{L}$, $\dot{F}$, $\dot{t}_i$, $\dot{e}_i$, $\dot{g}_i$, $\dot{K}_i$, $\dot{K}$, $\dot{\Phi}$, $\dot{n}_i$, $\dot{\varkappa}_i$, $\dot{\theta}_i$ определяются по формулам (1.10).

Ставим следующие ограничения на упругие константы материала оболочки:

$$\overline{\gamma}' = \lambda^{2l} \cdot \overline{\overline{\gamma}}', \quad \overline{\beta}' = \lambda^{2l} \cdot \overline{\overline{\beta}}', \quad \overline{\varepsilon}' = \lambda^{2l} \cdot \overline{\overline{\varepsilon}}'$$

где велечины $\overline{\overline{\gamma}}'$, $\overline{\overline{\beta}}'$, $\overline{\overline{\varepsilon}}'$ считаются величинами порядка λ^0.

Тогда, имея в виду (4.1)–(4.3), вместо исходной системы уравнений НТУ со НППВ (1.1)–(1.3) будем иметь:

$$\frac{1}{a_i}\cdot\dot{L}_i+\frac{\partial\dot{\tau}_{3i}}{\partial\zeta}+\lambda^{-l}\cdot\frac{R}{a_i}\cdot\frac{\dot{\tau}_{i3}+\dot{\tau}_{3i}}{R_i}=0\,, \qquad -\lambda^{-c}\cdot\dot{L}+\lambda^{2p-l-c}\cdot\dot{F}+\frac{\partial\dot{\tau}_{33}}{\partial\zeta}=0$$

$$\lambda^{2p-l-c}\frac{1}{a_i}\cdot\dot{K}_i+\frac{\partial\dot{\nu}_{3i}}{\partial\zeta}+\lambda^{-l}\frac{R}{a_i}\cdot\frac{\dot{\nu}_{i3}+\dot{\nu}_{3i}}{R_i}-(-1)^j\cdot\frac{a_j}{a_i}\cdot\left(\dot{\tau}_{3j}-\dot{\tau}_{j3}\right)=0 \qquad (4.4)$$

$$\dot{\tau}_{ii}=\frac{a_j}{a_i}\cdot\frac{\overline{\lambda}'+2\overline{\mu}'}{4\overline{\mu}'\cdot\left(\overline{\lambda}'+\overline{\mu}'\right)}\cdot\dot{e}_i-\frac{\overline{\lambda}'}{4\overline{\mu}'\cdot\left(\overline{\lambda}'+\overline{\mu}'\right)}\cdot\dot{e}_j-\lambda^{c-l}\frac{1}{a_i}\cdot\frac{\overline{\lambda}'}{2\cdot\left(\overline{\lambda}'+\overline{\mu}'\right)}\cdot\dot{\tau}_{33}$$

$$\frac{\partial\dot{V}_3}{\partial\zeta}=\lambda^{2c-2l}\frac{1}{a_1a_2}\left(\overline{\lambda}'+2\overline{\mu}'\right)\cdot\dot{\tau}_{33}+\lambda^{c-l}\frac{1}{a_2}\cdot\overline{\lambda}'\cdot\dot{\tau}_{11}+\lambda^{c-l}\cdot\frac{1}{a_1}\cdot\overline{\lambda}'\cdot\dot{\tau}_{22}$$

$$\frac{\partial\dot{V}_i}{\partial\zeta}=-\lambda^{2p-l-c}\cdot\frac{1}{a_i}\cdot\dot{g}_i+\lambda^{2p-2l}\cdot2\overline{\mu}'\cdot\frac{1}{a_j}\cdot\left(\dot{\tau}_{3i}+\dot{\tau}_{i3}\right)$$

$$\dot{\tau}_{ij}=\frac{1}{4\overline{\mu}'}\cdot\left(\dot{t}_i+\frac{a_j}{a_i}\cdot\dot{t}_j\right)-\lambda^{2p-l-c}\cdot(-1)^j\cdot\left(\frac{\partial\dot{\nu}_{33}}{\partial\zeta}-\lambda^{c-l}\cdot\left(\lambda^c\cdot\dot{K}-\dot{\Phi}\right)\right)$$

$$\dot{\nu}_{ii}=\frac{a_j}{a_i}\cdot\frac{2\overline{\overline{\gamma}}'+\overline{\overline{\beta}}'}{4\overline{\overline{\gamma}}'\cdot\left(\overline{\overline{\gamma}}'+\overline{\overline{\beta}}'\right)}\cdot\dot{\varkappa}_i-\frac{\overline{\overline{\beta}}'}{4\overline{\overline{\gamma}}'\cdot\left(\overline{\overline{\gamma}}'+\overline{\overline{\beta}}'\right)}\cdot\dot{\varkappa}_j-\frac{\overline{\overline{\beta}}'}{2\cdot\left(\overline{\overline{\gamma}}'+\overline{\overline{\beta}}'\right)}\cdot\frac{1}{a_i}\cdot\dot{\nu}_{33}$$

$$\frac{\partial\dot{\omega}_3}{\partial\zeta}=\lambda^{2p-l-c}\cdot\left[\frac{\overline{\overline{\gamma}}'\cdot\left(2\overline{\overline{\gamma}}'+3\overline{\overline{\beta}}'\right)}{\overline{\overline{\gamma}}'+\overline{\overline{\beta}}'}\cdot\frac{1}{a_1a_2}\cdot\dot{\nu}_{33}+\frac{\overline{\overline{\beta}}'}{2\left(\overline{\overline{\gamma}}'+\overline{\overline{\beta}}'\right)}\cdot\left(\frac{1}{a_1}\cdot\dot{\varkappa}_1+\frac{1}{a_2}\cdot\dot{\varkappa}_2\right)\right]$$

$$\frac{\partial\dot{\omega}_i}{\partial\zeta}=\lambda^{c-l}\cdot\frac{1}{a_j}\cdot\left(\left(\overline{\overline{\gamma}}'+\overline{\overline{\varepsilon}}'\right)\cdot\dot{\nu}_{3i}+\left(\overline{\overline{\gamma}}'-\overline{\overline{\varepsilon}}'\right)\cdot\dot{\nu}_{i3}\right) \qquad (4.5)$$

$$\dot{\nu}_{i3}=\frac{a_j}{a_i}\cdot\frac{1}{\overline{\overline{\gamma}}'+\overline{\overline{\varepsilon}}'}\cdot\dot{\theta}_i-\frac{\overline{\overline{\gamma}}'-\overline{\overline{\varepsilon}}'}{\overline{\overline{\gamma}}'+\overline{\overline{\varepsilon}}'}\cdot\dot{\nu}_{3i}\,, \qquad \dot{\nu}_{ij}=\frac{a_j}{a_i}\cdot\frac{\overline{\overline{\gamma}}'+\overline{\overline{\varepsilon}}'}{4\overline{\overline{\gamma}}'\overline{\overline{\varepsilon}}'}\cdot\dot{n}_j-\frac{\overline{\overline{\gamma}}'-\overline{\overline{\varepsilon}}'}{4\overline{\overline{\gamma}}'\overline{\overline{\varepsilon}}'}\cdot\dot{n}_i$$

$$\dot{\omega}_i=(-1)^j\cdot\left(\frac{1}{a_j}\cdot\dot{g}_j-\lambda^{c-l}\cdot\frac{1}{a_i}\cdot\left(\left(\mu'-\alpha'\right)\cdot\dot{\tau}_{3j}+\left(\mu'+\alpha'\right)\cdot\dot{\tau}_{j3}\right)\right)$$

$$\dot{\omega}_3=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a_1}\cdot\dot{t}_2-\frac{1}{a_2}\cdot\dot{t}_1\right)-\alpha'\cdot\left(\frac{1}{a_2}\cdot\dot{\tau}_{12}-\frac{1}{a_1}\cdot\dot{\tau}_{21}\right)$$

На уровне асимптотической точности $0\left(\lambda^{p-l}\right)$ из систем (4.4), (4.5) часть величин можно получить интегрированием по переменной ζ, в результате получим:

$$\begin{gathered}
\overset{\bullet}{V}_i=\overset{0}{V}_i(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\zeta\cdot\overset{1}{V}_i(\xi_1,\xi_2)\,, \qquad \overset{\bullet}{V}_3=\overset{0}{V}_3(\xi_1,\xi_2) \\
\overset{\bullet}{\omega}_i=\overset{0}{\omega}_i(\xi_1,\xi_2)\,,\quad \overset{\bullet}{\varkappa}_i=\overset{0}{\varkappa}_i(\xi_1,\xi_2)\,,\quad \overset{\bullet}{n}_i=\overset{0}{n}_i(\xi_1,\xi_2)\,,\quad \overset{\bullet}{\nu}_{ij}=\overset{0}{\nu}_{ij}(\xi_1,\xi_2) \\
\overset{\bullet}{t}_i=\overset{0}{t}_i(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\zeta\cdot\overset{1}{t}_i(\xi_1,\xi_2)\,,\overset{\bullet}{e}_i=\overset{0}{e}_i(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\zeta\cdot\overset{1}{e}_i(\xi_1,\xi_2) \\
\overset{\bullet}{\tau}_{ii}=\overset{0}{\tau}_{ii}(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{ii}(\xi_1,\xi_2)\,, \qquad \overset{\bullet}{g}_i=\overset{0}{g}_i(\xi_1,\xi_2) \\
\overset{\bullet}{L}=\overset{0}{L}(\xi_1,\xi_2)+\lambda^{2p-l-c}\zeta\cdot\overset{1}{L}(\xi_1,\xi_2)
\end{gathered} \tag{4.6}$$

Здесь основные функции, зависящие от ξ_1 и ξ_2, представляют собой $\overset{0}{V}_i(\xi_1,\xi_2)$ и $\overset{0}{V}_3(\xi_1,\xi_2)$; остальные величины будут определяться через указанные функции по соответствующим формулам.

Остальная часть величин выражаются через вышеотмеченные величины и через величину $\overset{\bullet}{\nu}_{33}$, для определения которой приходим к дифференциальному уравнению (относительно координаты ζ) с соответствующими граничными условиями при $\zeta=\pm1$:

$$\begin{gathered}
\overline{\alpha}'\cdot\frac{\partial^2\overset{\bullet}{\nu}_{33}}{\partial\zeta^2}-\frac{\tilde{\overline{\gamma}}'\cdot\left(2\tilde{\overline{\gamma}}'+3\overline{\overline{\beta}}'\right)}{\tilde{\overline{\gamma}}'+\overline{\overline{\beta}}'}\cdot\overset{\bullet}{\nu}_{33}=-\frac{\tilde{\overline{\gamma}}'\cdot\left(2\tilde{\overline{\gamma}}'+3\overline{\overline{\beta}}'\right)}{\tilde{\overline{\gamma}}'+\overline{\overline{\beta}}'}\cdot\overset{0}{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2) \\
\overset{0}{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{4\tilde{\overline{\gamma}}'}\cdot\left[\overset{1}{t}_2(\xi_1,\xi_2)-\overset{1}{t}_1(\xi_1,\xi_2)-\lambda^{c-2p}\cdot\left(\frac{\overset{0}{t}_2(\xi_1,\xi_2)}{\overline{R}_1}-\frac{\overset{0}{t}_1(\xi_1,\xi_2)}{\overline{R}_2}\right)\right] \\
\left.\overset{\bullet}{\nu}_{33}\right|_{\zeta=\pm1}=\mp\tilde{m}_3^{\pm}\qquad\left(\tilde{m}_3^{\pm}=\lambda^{c+l-2p}\cdot m_3^{\pm}\right)
\end{gathered} \tag{4.7}$$

После решения граничной задачи (4.7) и определения $\overset{\bullet}{\nu}_{33}$:

$$\overset{\bullet}{\nu}_{33}=\begin{cases}\overset{0}{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2) & \text{при}\quad \overline{\alpha}'=0\\ \overset{0}{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2)+\tilde{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2,\zeta) & \text{при}\quad \overline{\alpha}'\neq0\end{cases} \tag{4.8}$$

при этом

$$\tilde{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2,\zeta)=-\frac{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\mathrm{k}}\cdot\zeta\right)}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\mathrm{k}}\right)}\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\tilde{m}_3^{-}-\tilde{m}_3^{-}\right)+\overset{0}{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2)\right]-\frac{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\mathrm{k}}\cdot\zeta\right)}{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\mathrm{k}}\right)}\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\tilde{m}_3^{+}+\tilde{m}_3^{-}\right)\right]$$

$$\overline{\mathrm{k}}=\frac{1}{\overline{\alpha}'}\cdot\frac{\tilde{\overline{\gamma}}'\cdot\left(2\tilde{\overline{\gamma}}'+3\overline{\overline{\beta}}'\right)}{\tilde{\overline{\gamma}}'+\overline{\overline{\beta}}'}$$

для остальных величин получим:

$$\dot{\omega}_3 = \overset{0}{\omega}_3(\xi_1,\xi_2) + \lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\omega}_3(\xi_1,\xi_2) + \lambda^{2p-l-c}\cdot\tilde{\omega}_3(\xi_1,\xi_2,\zeta)$$

$$\dot{\theta}_i = \overset{0}{\theta}_i(\xi_1,\xi_2) + \lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\theta}_i(\xi_1,\xi_2) + \lambda^{2p-l-c}\cdot\tilde{\theta}_i(\xi_1,\xi_2,\zeta)$$

$$\dot{\tau}_{ij} = \overset{0}{\tau}_{ij}(\xi_1,\xi_2) + \lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{ij}(\xi_1,\xi_2) + \lambda^{2p-l-c}\cdot\tilde{\tau}_{ij}(\xi_1,\xi_2,\zeta) \tag{4.9}$$

$$\dot{L}_i = \overset{0}{L}_i(\xi_1,\xi_2) + \lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta\cdot\overset{1}{L}_i(\xi_1,\xi_2) + \lambda^{2p-l-c}\cdot\tilde{L}_i(\xi_1,\xi_2,\zeta)$$

$$\dot{\nu}_{ii} = \overset{0}{\nu}_{ii}(\xi_1,\xi_2) + \tilde{\nu}_{ii}(\xi_1,\xi_2,\zeta), \qquad \dot{K}_i = \overset{0}{K}_i(\xi_1,\xi_2) + \tilde{K}_i(\xi_1,\xi_2,\zeta)$$

$$\dot{\tau}_{3i} = \overset{0}{\tau}_{3i}(\xi_1,\xi_2) + \zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{3i}(\xi_1,\xi_2) + \lambda^{2p-l-c}\cdot\zeta^2\cdot\overset{2}{\tau}_{3i}(\xi_1,\xi_2) + \lambda^{2p-l-c}\cdot\tilde{\tau}_{3i}(\xi_1,\xi_2,\zeta)$$

Отметим, что относительно величин $\dot{\nu}_{3i}$ тоже приходим к отдельным дифференциальным уравнениям (относительно координата ζ) с соответствующими граничными условиями при $\zeta = \pm 1$:

$$(\overline{\mu}' + \overline{\alpha}')\cdot\frac{\partial^2 \dot{\nu}_{3i}}{\partial\zeta^2} - \frac{4\tilde{\overline{\gamma}}'\tilde{\overline{\varepsilon}}'}{\tilde{\overline{\gamma}}' + \tilde{\overline{\varepsilon}}'}\cdot\dot{\nu}_{3i} = \frac{\tilde{\overline{\gamma}}' - \tilde{\overline{\varepsilon}}'}{\tilde{\overline{\gamma}}' + \tilde{\overline{\varepsilon}}'}\cdot\dot{\theta}_i +$$

$$+(-1)^j\cdot\left[2(\overline{\mu}' + \overline{\alpha}')\cdot\frac{\partial\dot{\tau}_{3j}}{\partial\zeta} - \overline{\lambda}'\cdot\frac{1}{A_j}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\dot{\tau}_{11} + \dot{\tau}_{22}\right)\right] - \lambda^{2p-l-c}\cdot(\overline{\mu}' + \overline{\alpha}')\cdot\frac{\partial\dot{K}_j}{\partial\zeta}$$

$$\dot{\nu}_{3i}\Big|_{\zeta=\pm1} = \mp\tilde{m}_i^{\pm} \qquad \left(\tilde{m}_i^{\pm} = \lambda^{l-p}\cdot m_i^{\pm}\right) \tag{4.10}$$

После решения уравнений (4.10) остальные величины (связанные с $\dot{\nu}_{3i}$) определяются по следующим формулам:

$$\dot{\nu}_{i3} = \frac{1}{\tilde{\overline{\gamma}}' + \tilde{\overline{\varepsilon}}'}\cdot\dot{\theta}_i - \frac{\tilde{\overline{\gamma}}' - \tilde{\overline{\varepsilon}}'}{\tilde{\overline{\gamma}}' + \tilde{\overline{\varepsilon}}'}\cdot\dot{\nu}_{3i}\ , \quad \dot{\tau}_{i3} = \dot{\tau}_{i3} + (-1)^j\cdot\left(\lambda^{2p-l-c}\cdot\dot{K}_j + \frac{\partial\dot{\nu}_{3j}}{\partial\zeta}\right)$$

$$\dot{\tau}_{33} = \overset{0}{\tau}_{33}(\xi_1,\xi_2) + \int_0^{\zeta}\left(\lambda^{-c}\cdot\dot{L} - \lambda^{2p-l-c}\cdot\dot{F}\right)d\zeta \tag{4.11}$$

$$\dot{\tau}_{33}\Big|_{\zeta=\pm1} = \pm\tilde{q}_3^{\pm} \qquad \left(\tilde{q}_3^{\pm} = \lambda^{-c}\cdot q_3^{\pm}\right)$$

Далее, переходим к следующим осредненным по толщине оболочки силовым и моментным характеристикам [11, 25, 26]:

$$T_{ii} = \int_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\cdot\sigma_{ii}\,d\alpha_3\ , \qquad S_{ij} = \int_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\cdot\sigma_{ij}\,d\alpha_3$$

$$G_{ii} = \int_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\cdot\sigma_{ii}\cdot\alpha_3\,d\alpha_3\ , \quad H_{ij} = \int_{-h}^{h}(1+\alpha_3/R_j)\cdot\sigma_{ij}\cdot\alpha_3\,d\alpha_3$$

$$N_{3i}=-\int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\cdot\sigma_{3i}\,d\alpha_3\ ,\qquad L_{3i}=-\int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\cdot\mu_{3i}\,d\alpha_3\qquad\left[3\leftrightarrows i\right]$$

$$L_{ii}=\int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\cdot\mu_{ii}\,d\alpha_3\ ,\qquad L_{ij}=\int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\cdot\mu_{ij}\,d\alpha_3$$

$$L_{33}=\int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_1\right)\left(1+\alpha_3/R_2\right)\cdot\mu_{33}\,d\alpha_3$$

Используя понятия перемещений и поворотов точек срединной поверхности оболочки, на уровне асимптотической точности $0\left(\lambda^{p-l}\right)$ переходим к следующей разрешающей системе двумерных уравнений:

Уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial T_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\cdot\left(T_{ii}-T_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\cdot\frac{\partial S_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\left(S_{ij}+S_{ji}\right)-\left(q_i^{+}+q_i^{-}\right)=0$$

$$\frac{1}{A_1}\cdot\frac{\partial\left(G_{11}-L_{12}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\cdot\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\cdot\left(\left(G_{11}-L_{12}\right)-\left(G_{22}+L_{21}\right)\right)-\frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial\left(H_{21}+L_{22}\right)}{\partial\alpha_2}-$$

$$-\frac{1}{A_1A_2}\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\cdot\left(\left(H_{12}-L_{11}\right)+\left(H_{21}+L_{22}\right)\right)-N_{13}+\left[h\left(q_1^{+}-q_1^{-}\right)-\left(m_2^{+}+m_2^{-}\right)\right]=0$$

$$\frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial\left(G_{22}+L_{21}\right)}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\cdot\left(\left(G_{22}+L_{21}\right)-\left(G_{11}-L_{12}\right)\right)-\frac{1}{A_1}\cdot\frac{\partial\left(H_{12}-L_{11}\right)}{\partial\alpha_1}-$$

$$-\frac{1}{A_1A_2}\cdot\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\cdot\left(\left(H_{21}+L_{22}\right)+\left(H_{12}-L_{11}\right)\right)-N_{23}+\left[h\left(q_2^{+}-q_2^{-}\right)+\left(m_1^{+}+m_1^{-}\right)\right]=0$$

$$\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2N_{13}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1N_{23}\right)\right]+\left(q_3^{+}+q_3^{-}\right)=0\qquad(4.12)$$

Соотношения упругости

$$T_{ii}=2h\cdot\frac{\lambda'+2\mu'}{4\mu'\cdot\left(\lambda'+\mu'\right)}\cdot\left(\Gamma_{ii}-\frac{\lambda'}{\lambda'+2\mu'}\cdot\Gamma_{jj}\right)$$

$$G_{ii}=-\frac{2}{3}h^3\cdot\frac{\lambda'+2\mu'}{4\mu'\cdot\left(\lambda'+\mu'\right)}\cdot\left(\mathrm{K}_{ii}-\frac{\lambda'}{\lambda'+2\mu'}\cdot\mathrm{K}_{jj}\right)$$

$$S_{ij}=2h\cdot\frac{1}{4\mu'}\cdot\left(\Gamma_{ij}+\Gamma_{ji}\right)+\frac{(-1)^j}{2}\cdot\left(\mathrm{m}_3^{+}+m_3^{-}\right)$$

$$H_{ij}=\frac{2}{3}h^3\cdot\frac{1}{4\mu'}\cdot\left(\mathrm{K}_{ij}+\mathrm{K}_{ji}\right)+\frac{(-1)^j}{2}\cdot\left(1-\frac{h\sqrt{k}}{\mathrm{th}\left(h\sqrt{k}\right)}\right)\cdot\widetilde{L}_{33}\qquad(4.13)$$

$$L_{ii}=2h\cdot\frac{1}{2\gamma'}\cdot\chi_{ii}-\frac{\beta'}{2(\gamma'+\beta')}\cdot\widetilde{L}_{33}\ ,\qquad L_{ij}=2h\cdot\left(\frac{\gamma'+\varepsilon'}{4\gamma'\cdot\varepsilon'}\cdot\chi_{ij}-\frac{\gamma'-\varepsilon'}{4\gamma'\cdot\varepsilon'}\cdot\chi_{ji}\right)$$

$$\widetilde{L}_{33}=-2h\cdot\frac{\operatorname{th}\left(h\sqrt{k}\right)}{h\sqrt{k}}\left[\frac{m_3^+-m_3^-}{2}+\frac{1}{4\gamma'}\cdot\left(K_{12}-K_{21}-\left(\frac{\Gamma_{12}}{R_1}-\frac{\Gamma_{21}}{R_2}\right)\right)\right]$$

$$k=\frac{1}{\alpha'}\cdot\frac{\gamma'\cdot(2\gamma'+3\beta')}{\gamma'+\beta'}\quad\left(k=h^{-2}\cdot\bar{k}\right)$$

(здесь $\widetilde{L}_{33}$ та часть L_{33}, которая обусловлена величиной $\widetilde{\nu}_{33}(\xi_1,\xi_2,\zeta)$).

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot u_j-\frac{w}{R_i},\qquad \mathrm{K}_{ii}=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\beta_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\beta_j$$

$$\Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot u_i,\qquad \mathrm{K}_{ij}=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\beta_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\beta_i$$

$$\chi_{ii}=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\Omega_j-\frac{\Omega_3}{R_i},\quad \chi_{ij}=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\cdot\Omega_i \tag{4.14}$$

$$\beta_i=\frac{1}{A_i}\cdot\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_i},\qquad \Omega_i=(-1)^j\cdot\beta_j$$

$$\Omega_3=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{A_1}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\cdot u_1-\frac{1}{A_2}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\cdot\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\cdot u_2\right)$$

После решения основной разрешающей системы уравнений (4.12)–(4.14), остальные искомые величины будут определяться по соответствующим формулам.

Уравнения (4.12)–(4.14) представляют собой уравнения разрешающей системы двумерных уравнений прикладной–двумерной теории микрополярных упругих тонких оболочек, когда вращения выражаются через перемещения.

Отметим, что при $\alpha\to+\infty$ $(\alpha'\to 0)$ уравнения (4.12)–(4.14) полностью переходят к разрешающей системе уравнений микрополярных оболочек, когда в основу будем принимать трехмерную теорию несимметричной упругости со стесненным вращением (эта часть работы будет опубликована отдельно).

5. Обратимся к изучению краевых упругих явлений и будем снова исходить из уравнений трехмерной теории НТУ с НППВ (1.1)–(1.3).

Будем считать, что край оболочки, вблизи которого надо исследовать напряженное состояние, опять задается уравнением $\alpha_1=\alpha_{10}$, и введем замену независимых переменных по формулам (2.1).

В трехмерных уравнениях (1.1)–(1.3) перейдем к безразмерным величинам (4.1) и выполним следующие замены искомых величин:

$$\bar{\tau}_{ij}=P_{ij},\quad \bar{\nu}_{ij}=\lambda^{-l}\cdot\mathrm{Q}_{ij},\quad \Omega_i=\omega_i\quad (i=1,2,3;\ j=1,2,3)$$

$$U_i=\lambda^l\cdot\bar{V}_i,\quad W=\lambda^l\cdot\bar{V}_3\quad (i=1,2)$$

Кроме того, на упругие константы материала оболочки $\bar{\gamma}'$, $\bar{\beta}'$, $\bar{\varepsilon}'$ ставим такие же ограничения, как и в предыдущем пункте.

После этого, уравнения НТУ с НППВ можем представить в виде двух групп уравнений, которые при отбрасывании величин порядка λ^{p-l} можем записать так:

Группа А

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial Q_{11}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial Q_{31}}{\partial\zeta}+\left(P_{23}-P_{32}\right)=0\ ,\quad \frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial Q_{13}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial Q_{33}}{\partial\zeta}+\left(P_{12}-P_{21}\right)=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial P_{12}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial P_{32}}{\partial\zeta}=0,\qquad -\left[\left(2\tilde{\tilde{\gamma}}'+\tilde{\tilde{\beta}}'\right)\cdot Q_{22}+\tilde{\tilde{\beta}}'\cdot\left(Q_{11}+Q_{33}\right)\right]=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial\Omega_1}{\partial\xi_1}-\left[\left(2\tilde{\tilde{\gamma}}'+\tilde{\tilde{\beta}}'\right)\cdot Q_{11}+\tilde{\tilde{\beta}}'\cdot\left(Q_{22}+Q_{33}\right)\right]=0$$

$$\frac{\partial\Omega_3}{\partial\zeta}-\left[\left(2\tilde{\tilde{\gamma}}'+\tilde{\tilde{\beta}}'\right)\cdot Q_{33}+\tilde{\tilde{\beta}}'\cdot\left(Q_{11}+Q_{22}\right)\right]=0 \qquad (5.1)$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial\Omega_3}{\partial\xi_1}-\left[\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'+\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{13}+\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'-\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{31}\right]=0,\ \ \Omega_1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial U_2}{\partial\zeta}-\bar{\alpha}'\cdot\left[P_{32}-P_{23}\right]=0$$

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial\zeta}-\left[\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'+\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{31}+\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'-\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{13}\right]=0,\qquad \frac{\partial U_2}{\partial\zeta}-2\bar{\mu}'\cdot\left[P_{23}+P_{32}\right]=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial U_2}{\partial\xi_1}-2\bar{\mu}'\cdot\left[P_{12}+P_{21}\right]=0,\ \ \Omega_3-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial U_2}{\partial\xi_1}-\bar{\alpha}'\cdot\left[P_{21}-P_{12}\right]=0$$

Группа В

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial P_{11}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial P_{31}}{\partial\zeta}=0,\qquad \frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial Q_{12}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial Q_{32}}{\partial\zeta}+\left(P_{31}-P_{13}\right)=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial P_{13}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial P_{33}}{\partial\zeta}=0,\quad -\left[\left(2\bar{\mu}'+\bar{\lambda}'\right)\cdot P_{22}+\bar{\lambda}'\cdot\left(P_{11}+P_{33}\right)\right]=0 \qquad (5.2)$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial U_1}{\partial\xi_1}-\left[\left(2\bar{\mu}'+\bar{\lambda}'\right)\cdot P_{11}+\bar{\lambda}'\cdot\left(P_{22}+P_{33}\right)\right]=0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial\zeta}-\left[\left(2\bar{\mu}'+\bar{\lambda}'\right)\cdot P_{33}+\bar{\lambda}'\cdot\left(P_{11}+P_{22}\right)\right]=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial W}{\partial\xi_1}+\frac{\partial U_1}{\partial\zeta}-2\bar{\mu}'\cdot\left(P_{13}+P_{31}\right)=0,\quad -\left[\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'+\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{21}+\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'-\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{12}\right]=0$$

$$\frac{\partial\Omega_2}{\partial\zeta}-\left[\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'+\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{32}+\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'-\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{23}\right]=0,\ -\left[\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'+\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{23}+\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'-\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{32}\right]=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial\Omega_2}{\partial\xi_1}-\left[\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'+\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{12}+\left(\tilde{\tilde{\gamma}}'-\tilde{\tilde{\varepsilon}}'\right)\cdot Q_{21}\right]=0$$

$$\Omega_2-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\partial U_1}{\partial\zeta}-\frac{1}{A_{10}}\cdot\frac{\partial W}{\partial\xi_1}\right]-\bar{\alpha}'\cdot\left[P_{13}-P_{31}\right]=0$$

Величины $A=\left(P_{12}, P_{21}, P_{23}, P_{32}, U_2, Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}, Q_{13}, Q_{31}, \Omega_1, \Omega_3\right)$ удовлетворяют однородным двумерным уравнениям (5.1), так называемой смешанной силовой-моментной антиплоской задачи несимметричной теории упругости. Их исходные решения обозначим $A(a)=A^0(a)$. А величины $B=\left(P_{11}, P_{22}, P_{33}, P_{13}, P_{31}, U_1, W, Q_{12}, Q_{21}, Q_{23}, Q_{32}, \Omega_2\right)$ удовлетворяют однородным двумерным уравнениям (5.2), так называемой смешанной силовой

-моментной плоской задачи несимметричной теории упругости. Их исходные решения обозначим $B(b) = B^0(b)$.

Описанное исходное приближение можно уточнять методом итерации и, помимо главных, строить следующие приближения для напряжений, перемещений и *поворотов. Тогда получим:*

a -решения

$$A(a) = A^0(a) + \lambda^{p-l} \cdot A^1(a)\,, \qquad B(a) = 0 + \lambda^{p-l} \cdot B^1(a) \tag{5.3}$$

b -решения

$$B(b) = B^0(b) + \lambda^{p-l} \cdot B^1(b), \qquad A(b) = 0 + \lambda^{p-l} \cdot A^1(b) \tag{5.4}$$

Отметим, что нас будут интересовать только такие решения уравнений НТУ с НППВ (5.1)–(5.2) типа (a) и (b), которые на лицевых поверхностях удовлетворяют однородным граничным условиям и, кроме того, затухают при удалении от края $\alpha_1 = \alpha_{10}$. Такие решения будем называть смешанным силовым–моментным плоским погранслоем и силовым-моментным антиплоским погранслоем.

На основании уравнений плоского и антиплоского погранслоев получим, что их решения удовлетворяют следующим важным равенствам:

$$\int_{-1}^{1} \overset{b\,(0)}{P}_{11}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0\,, \qquad \int_{-1}^{1} \overset{a\,(0)}{P}_{12}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0\,, \qquad \int_{-1}^{1} \overset{b\,(0)}{P}_{13}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0$$

$$\int_{-1}^{1} \overset{b\,(0)}{U}_{1}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{2\overline{\mu}'\overline{\lambda}'}{2\overline{\mu}' + \overline{\lambda}'} \cdot \int_{-1}^{1} \zeta \cdot \overset{b\,(0)}{P}_{13}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0$$

$$\int_{-1}^{1} \overset{a\,(0)}{Q}_{11}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta - 2 \cdot \int_{-1}^{1} \zeta \cdot \overset{a\,(0)}{P}_{12}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{1}{2\overline{\mu}'} \cdot \int_{0}^{+\infty} \left[\overset{a}{U}_2\right]_{-1}^{1} \cdot A_{10} d\xi_1 = 0 \tag{5.5}$$

$$\int_{-1}^{1} \overset{b\,(0)}{Q}_{12}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta + \int_{-1}^{1} \zeta \cdot \overset{b\,(0)}{P}_{11}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^{1} \overset{a\,(0)}{Q}_{13}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{1}{2\overline{\mu}'} \cdot \int_{-1}^{1} \overset{a\,(0)}{U}_{2}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0$$

Равенства (5.5) назовем условиями затухания. Очевидно, что они необходимы для того, чтобы существовали затухающие решения типа (a) и (b), а следовательно, и для того, чтобы существовали антиплоский и плоский погранслои.

6. Будем исходить из предположения, что напряженное состояние трехмерного тела оболочки по НТУ с НППВ составляется из внутреннего напряженного состояния и погранслоев:

$$(\text{НДС})_{\text{полн}} = (\text{НДС})_{\text{вн}} + \lambda^{r} \cdot (\text{НДС})^{a}_{\text{кр}} + \lambda^{\theta} \cdot (\text{НДС})^{b}_{\text{кр}} \tag{6.1}$$

где числа r, $\theta -$ показатели интенсивности плоского и антиплоского погранслоев, которые пока произвольны.

Величины r и θ должны быть подобраны таким образом, чтобы стало возможным удовлетворение трехмерных граничных условий НТУ с НППВ на боковой поверхности оболочки:

$$\begin{matrix} \sigma_{ji} n_j = p_i^* & (i = 1,\ 2,\ 3) \\ \mu_{ji} n_j = m_i^* & (i = 1,\ 2) \end{matrix} \qquad \text{при} \quad \alpha_1 = \alpha_{10} \tag{6.2}$$

Единственно приемлемые значения r и θ в случае нагруженного края оболочки определяются так:

$$r = 2p - c, \qquad \theta = 2p - c \tag{6.3}$$

С учетом (6.3), в результате подстановки (6.1) в условия (6.2), получим граничные условия в следующем виде:

$$\overset{*}{\tau}_{1i} + \lambda^{2p-l-c} \cdot \overset{b\,0}{P}_{1i} + \lambda^{3p-2l-c} \cdot \left[\overset{a\,1}{P}_{1i} + \overset{b\,1}{P}_{1i} \right] = \lambda^{2p-l-c} \left(1 + \frac{R}{R_2} \lambda^{-l} \zeta \right) \cdot \widetilde{p}_i^* \quad \begin{pmatrix} i = 1,\ 2 \\ a \leftrightarrows b \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{c-p} \cdot \overset{*}{\tau}_{13} + \overset{b\,0}{P}_{13} + \lambda^{p-l} \cdot \left[\overset{a\,1}{P}_{13} + \overset{b\,1}{P}_{13} \right] = \lambda^{c-p} \left(1 + \frac{R}{R_2} \lambda^{-l} \zeta \right) \cdot \widetilde{p}_3^* \tag{6.4}$$

$$\overset{*}{\nu}_{1i} + \overset{a\,0}{Q}_{1i} + \lambda^{p-l} \cdot \left[\overset{a\,1}{Q}_{1i} + \overset{b\,1}{Q}_{1i} \right] = \left(1 + \frac{R}{R_2} \lambda^{-l} \zeta \right) \cdot \widetilde{m}_i^* \quad \begin{pmatrix} i = 1,\ 2 \\ a \leftrightarrows b \end{pmatrix} \quad (\alpha_1 = \alpha_{10})$$

(здесь принимаются обозначения $p_i^* = \lambda^{2p-c} \cdot \widetilde{p}_i^*$, $m_i^* = \lambda^{2p-l-c} \cdot \widetilde{m}_i^*$ $(i = 1, 2)$, $p_3^* = \lambda^p \cdot \widetilde{p}_3^*$).

Здесь, ограничиваясь асимптотической точностью $0\left(\lambda^{p-l}\right)$ и используя условия затухания (5.5), получим, что граничные условия трехмерной теории НТУ с НППВ (6.2) расщепляются между внутренней задачей (прикладной-двумерной теории оболочек) и погранслойными задачами.

Для прикладной-двумерной теории оболочек получим граничные условия следующего вида:

$$T_{11} \Big|_{\alpha_1 = \alpha_{10}} = \int_{-h}^{h} p_1^* d\alpha_3, \qquad S_{12} \Big|_{\alpha_1 = \alpha_{10}} = \int_{-h}^{h} p_2^* d\alpha_3$$

$$\left(-N_{13} + \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(H_{12} - L_{11} \right) \right) \Bigg|_{\alpha_1 = \alpha_{10}} = \int_{-h}^{h} \left(p_3^* + \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\alpha_3 \cdot p_2^* - m_1^* \right) \right) d\alpha_3$$

$$\left(L_{12} - G_{11} \right) \Big|_{\alpha_1 = \alpha_{10}} = \int_{-h}^{h} \left(m_2^* + \alpha_3 \cdot p_1^* \right) d\alpha_3 \tag{6.5}$$

Граничные условия каждого из двух типов погранслоев будут выражаться так:

$$\overset{b\,0}{P}_{11} \Big|_{\xi_1 = 0} = \widetilde{p}_1^* - \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \widetilde{p}_1^* d\zeta - \zeta \cdot \overset{1}{\tau}_{11} \left(\xi_1, \xi_2 \right) \Big|_{\xi_1 = 0}$$

$$\overset{b\,0}{P}_{13} \Big|_{\xi_1 = 0} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 2p \geq l \\ \lambda^{c-p} \cdot \left(\widetilde{p}_3^* - \overset{*}{\tau}_{13} \Big|_{\xi_1 = 0} \right) & \text{при} \quad 2p < l \end{cases} \tag{6.6}$$

$$\overset{b\,0}{Q}_{12} \Big|_{\xi_1 = 0} = \widetilde{m}_2^* - \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \widetilde{m}_2^* d\zeta - \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \zeta \cdot \widetilde{p}_1^* d\zeta + \frac{1}{3} \cdot \overset{1}{\tau}_{11} \left(\xi_1, \xi_2 \right) \Big|_{\xi_1 = 0}$$

$$\overset{a\,0}{P}_{12}\Big|_{\xi_1=0}=\widetilde{p}_2^*-\frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}\widetilde{p}_2^* d\zeta-\zeta\cdot\overset{1}{\tau}_{12}(\xi_1,\xi_2)\Big|_{\xi_1=0}-$$

$$-\left(\widetilde{\tau}_{12}(\xi_1,\xi_2,\zeta)-\frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}\widetilde{\tau}_{12}(\xi_1,\xi_2,\zeta)d\zeta\right)\Bigg|_{\xi_1=0} \qquad (6.7)$$

$$\overset{a\,0}{Q}_{11}\Big|_{\xi_1=0}=\widetilde{m}_1^*-\overset{*}{v}_{11}\Big|_{\xi_1=0}$$

Применяемый асимптотический метод позволил построить прикладную-двумерную теорию микрополярных тонких оболочек со стесненным вращением (уравнения (4.12)-(4.14) и граничные условия (6.5)) и изучить краевое напряженное состояние (по уравнениям (5.1), (5.2) и соответствующим граничным условиям (6.7), (6.6)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. Herrman. Paris. 1909. 226p.
2. Аэро Э.Л. Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред в вращательным взаимодействием частиц // ФТТ. 1960. Т. 2. Вып. 7. С. 1399-1409.
3. Пальмов В.А. Основные уравнение теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401-408.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 862с.
5. Морозов. Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука. 1984. 256с.
6. Eringen A. Cemal. Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids. Springer. 1998. P.325.
7. Ильюшин А.А., Ломакин В.А. Моментные теории в механике твердых деформируемых тел // В сб.: Прочность и пластичность. М.: Наука. 1971. С. 54-59.
8. Савин Г.Н. Основы плоской моментной теории упругости. Киев: Изд-во Киевск. ун-та. 1965. 162с.
9. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ. 1999. 327с.
10. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука. 1975. 416с.
11. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении. 1999. 214с.
12. Жилин П.А. Основные уравнения неклассических теории упругих оболочек // Динамика и прочность машин / Тр. ЛПИ. № 386. Л.: Изд-во ЛПИ. 1982. С. 29-42.
13. Пальмов В.А. Простейшая непротиворечивая система уравнений теории тонких упругих оболочек // Сб.: Механика деформируемого тела. М.: Наука, 1986. С.102-112.
14. Palmov V.A., Altenbach H. Uber eine cosseratsche theorie fur elastische platen // Thechn. Mech. 1982. H. 3. S. 3-9.
15. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1967. 266с.
16. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974. 446с.
17. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. II Всесоюзн. съезда по теор. и прикл. механике. Вып. 3. М.: Наука. 1966. С.116-136.
18. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510с.
19. Friedrichs K.O. and Dressler R.F.A. Boundary Layer Theory for Elastic Plates // Comm. Pure and Apll. Math. 1961. Vol. N1. P. 1-33.
20. Green A.E. On the Linear Theory of Ohin Elastic Shells // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1962. Vol. 266. N1325.

21. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек М: Наука. 1997. 414с.
22. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во АН Армении. 1992. 260с.
23. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of Thin Wolled Elastic Bodies. Academic Press. 1998. 225p.
24. Агаловян Л.А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел // ПМ. 2002.Т.38. № 7. С.3-24.
25. Саркисян С.О. О некоторых результатах внутреннего и краевого расчетов тонких пластин по несимметричной теории упругости // Сборник научных трудов посвященных к 80-летию академика НАН РА С.А. Амбарцумяна. Ереван: Изд-во НАН РА. 2002. С. 285-296.
26. Sargsyan S.H. On Sone Interior and Boundary Effects in Thin Plates Based on the Asymmetric Theory of Elasticity // Theories of Plates and Shells. Critical Review and New Applications. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Vol.16. Springer. 2004. P. 201-210.
27. Мутафян М.Н., Саркисян С.О. Асимптотические решения краевых задач тонкого прямоугольника по несимметричной теории упругости // Известия НАН Армении. Механика. 2004.Т.7. №1. С. 41-58.
28. Атоян А.А., Саркисян С.О. Динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин // Экологический Вестник Научных Центров Черноморского Экономического Сотрудничества. 2004. № 1. С. 18-29.

Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна

Поступила в редакцию 24.12.2004