

УДК 539.3

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИНОК
 ОСЛАБЛЕННЫХ ТРЕЩИНОЙ

Եգիազարյան Դ.Ա.

Տ.Հ. Նդիպարյան

Գարով բուլվարում սալի սեփական տատանումների ճառին

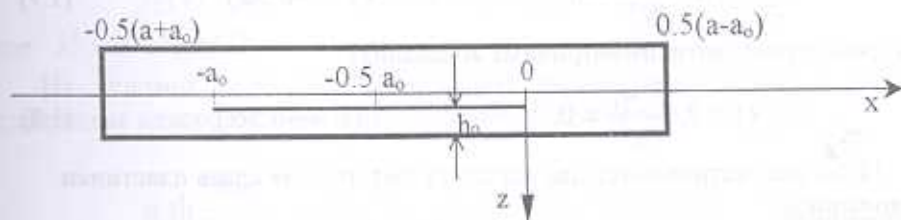
Աշխատանքում քննարկվում է ճառի ազդեցությունը սալի սեփական տատանումների համախառնության վրա: Դիտարկված են սալի երկու հանդիսակաց կողերը հողակապրեն կամ կոշտ ամրացման դեպքերը: Կատարված է խնդրի վերլուծություն՝ կախված սալի ներսում ճառի երկարությունից և դիրքից:

Yeghiazaryan T.H.

On own vibrations of plate impaired by crack

В работе обсуждается вопрос о влиянии трещины на частоты собственных колебаний пластинки. Рассмотрены случаи шарнирного и жесткого закрепления двух противоположных сторон пластинки. Проведен анализ задачи в зависимости от длины и расположения трещины внутри пластинки.

1. Пусть в прямоугольной пластинке размерами a , b , h , модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν , плотностью материала ρ , имеется трещина размерами $a_0 \in [0; a]$, b , расположенная на расстоянии $h_0 \in [0; 0.5h]$ от срединной плоскости (фиг. 1).



Փիգ. 1

В рассмотренном случае жесткость на изгиб пластинки представится в виде [1,2]

$$D(x) = \begin{cases} D_3 = D, & \text{при } \frac{x}{a} \in [-0.5(1 + \alpha); -\alpha) \\ D_1 = \delta^2 D & \text{при } \frac{x}{a} \in (-\alpha; 0) \\ D_2 = D & \text{при } \frac{x}{a} \in (0; 0.5(1 - \alpha)] \end{cases} \quad (1.1)$$

где

$$D = Eh^3/12(1 - \nu^2), \quad \delta^2 = 1 - 3\beta + 3\beta^2, \quad \beta = h_0/h \in [0, 0.5], \quad \alpha = a_0/a \in [0, 1] \quad (1.2)$$

Пусть на краях пластинки $y=0, y=b$ заданы условия скользящего контакта

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \tilde{T}_{13} = T_{13} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

где $w=w(x,y,t)$ —прогиб пластинки, \tilde{T}_{13} —обобщенное поперечное усилие, T_{13} —поперечное усилие, M_{12} —крутящий момент.

При условиях (1.3) изгиб пластинки происходит по цилиндрической поверхности $w=w(x,t)$ и уравнение колебаний пластинки представится в виде

$$D_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial \bar{x}^4} + \rho h l^4 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i=1,2,3) \quad \bar{x} = \frac{x}{a} \quad (1.4)$$

Причем в точках $\bar{x}=0, \bar{x}=-\alpha$ должны быть удовлетворены условия сопряжения решений

$$w_1 = w_3, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial w_3}{\partial \bar{x}}, \quad M_{11}^{(1)} = M_{11}^{(3)}, \quad T_{13}^{(1)} = T_{13}^{(3)} \quad (\bar{x} = -\alpha) \quad (1.5)$$

$$w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial w_2}{\partial \bar{x}}, \quad M_{11}^{(1)} = M_{11}^{(2)}, \quad T_{13}^{(1)} = T_{13}^{(2)} \quad (\bar{x} = 0) \quad (1.6)$$

Так как трещина симметрично расположена по длине пластинки, то можно отдельно рассматривать симметричные и антисимметричные колебания, при этом в первом случае (симметричные колебания) в центре пластинки имеются условия

$$\frac{\partial w_1}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_1}{\partial \bar{x}^3} = 0, \quad (\bar{x} = -0.5\alpha) \quad (1.7)$$

а во втором случае (антисимметричные колебания)

$$w_1(\bar{x}) = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \bar{x}^2} = 0, \quad (\bar{x} = -0.5\alpha) \quad (1.8)$$

2. Ниже рассматриваются два варианта закрепления краев пластинки:

шарнирное

$$w_2(\bar{x}) = 0, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial \bar{x}^2} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{x} = 0.5(1 - \alpha) \quad (2.1)$$

$$w_3(\bar{x}) = 0, \quad \frac{\partial^2 w_3}{\partial \bar{x}^2} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{x} = -0.5(1 + \alpha) \quad (2.2)$$

жесткое

$$\frac{\partial w_2}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_2}{\partial \bar{x}^3} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{x} = 0.5(1 - \alpha) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_3}{\partial \bar{x}^3} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{x} = -0.5(1 + \alpha) \quad (2.4)$$

Уравнение собственных колебаний

$$D \frac{\partial^4 w_i}{\partial \bar{x}^4} + \rho h a^4 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0, \quad (i=1,2,3), \quad \bar{x} = \frac{x}{a} \quad (2.5)$$

подстановкой $w_i(\bar{x}, t) = f_i(\bar{x})e^{i\omega t}$ приводится к уравнению

$$D_i f_i^{IV}(\bar{x}) - \rho h a^4 \omega^2 f_i(\bar{x}) = 0, \quad (i=1,2,3) \quad (2.6)$$

где ω – искомая частота собственных колебаний пластинки.

Рассмотрим симметричные колебания шарнирно опертой по двум противоположным сторонам пластинки. В этом случае

$$f_1^{IV}(\bar{x}) - \frac{1}{\delta^2} \omega^2 f_1(\bar{x}) = 0 \quad \text{при } \bar{x} \in [-0.5\alpha; 0] \quad (2.7)$$

$$f_2^{IV}(\bar{x}) - \omega^2 f_2(\bar{x}) = 0 \quad \text{при } \bar{x} \in [0; 0.5(1-\alpha)]$$

При условиях симметрии в точке $\bar{x} = -0.5\alpha$, сопряжения решений в точке $\bar{x} = 0$ и шарнирного закрепления в точке $\bar{x} = 0.5(1-\alpha)$

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}) = 0, f_1'''(\bar{x}) = 0 & \quad \text{при } \bar{x} = -0.5\alpha \\ f_1(\bar{x}) = f_2(\bar{x}), f_1'(\bar{x}) = f_2'(\bar{x}), \delta^2 f_1''(\bar{x}) = f_2''(\bar{x}), \delta^2 f_1'''(\bar{x}) = f_2'''(\bar{x}) & \\ & \quad \text{при } \bar{x} = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$f_2(\bar{x}) = 0, f_2''(\bar{x}) = 0 \quad \text{при } \bar{x} = 0.5(1-\alpha)$$

которые получаются из (1.6), (1.7), (2.2).

Решения (2.7) имеют вид

$$f_1(\bar{x}) = a_1 \operatorname{ch} \frac{\lambda \bar{x}}{\sqrt{\delta}} + a_2 \operatorname{sh} \frac{\lambda \bar{x}}{\sqrt{\delta}} + a_3 \cos \frac{\lambda \bar{x}}{\sqrt{\delta}} + a_4 \sin \frac{\lambda \bar{x}}{\sqrt{\delta}} \quad (2.9)$$

$$f_2(\bar{x}) = b_1 \operatorname{ch} \lambda \bar{x} + b_2 \operatorname{sh} \lambda \bar{x} + b_3 \cos \lambda \bar{x} + b_4 \sin \lambda \bar{x}$$

где $\lambda^4 = a^4 \omega^2 \rho h / D$.

Из условий (2.8) для определения восьми постоянных получается следующая однородная система алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} a_1 \operatorname{sh} \frac{\lambda \bar{x}}{2\sqrt{\delta}} - a_2 \operatorname{ch} \frac{\lambda \bar{x}}{2\sqrt{\delta}} - a_3 \sin \frac{\lambda \bar{x}}{2\sqrt{\delta}} - a_4 \cos \frac{\lambda \bar{x}}{\sqrt{\delta}} &= 0 \\ a_1 \operatorname{sh} \frac{\lambda \bar{x}}{2\sqrt{\delta}} - a_2 \operatorname{ch} \frac{\lambda \bar{x}}{2\sqrt{\delta}} + a_3 \sin \frac{\lambda \bar{x}}{2\sqrt{\delta}} + a_4 \cos \frac{\lambda \bar{x}}{\sqrt{\delta}} &= 0 \\ a_1 + a_3 - b_1 - b_3 = 0, \quad a_2 + a_4 - \sqrt{\delta} b_2 - \sqrt{\delta} b_4 &= 0 \\ \delta a_1 - \delta a_3 - b_1 + b_3 = 0, \quad \delta a_2 - \delta a_4 - b_2 + b_4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$b_1 \operatorname{ch} \frac{1-\alpha}{2} \lambda + b_2 \operatorname{sh} \frac{1-\alpha}{2} \lambda + b_3 \cos \frac{1-\alpha}{2} \lambda + b_4 \sin \frac{1-\alpha}{2} \lambda = 0$$

$$b_1 \operatorname{ch} \frac{1-\alpha}{2} \lambda + b_2 \operatorname{sh} \frac{1-\alpha}{2} \lambda - b_3 \cos \frac{1-\alpha}{2} \lambda - b_4 \sin \frac{1-\alpha}{2} \lambda = 0$$

Условие существования ненулевого решения системы (2.10) приводит к определению корней трансцендентного уравнения

$$\frac{4}{\delta} \operatorname{th} \frac{\alpha \lambda}{2\sqrt{\delta}} \operatorname{tg} \frac{\alpha \lambda}{2\sqrt{\delta}} - 4 \operatorname{cth} \frac{1-\alpha}{2} \lambda \operatorname{ctg} \frac{1-\alpha}{2} \lambda + \sqrt{\delta} \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)^2 \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha \lambda}{2\sqrt{\delta}} \operatorname{cth} \frac{(1-\alpha)\lambda}{2} - \operatorname{th} \frac{\alpha \lambda}{2\sqrt{\delta}} \operatorname{ctg} \frac{(1-\alpha)\lambda}{2} \right) + \sqrt{\delta} \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)^2 \left(\operatorname{th} \frac{\alpha \lambda}{2\sqrt{\delta}} \operatorname{cth} \frac{(1-\alpha)\lambda}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha \lambda}{2\sqrt{\delta}} \operatorname{ctg} \frac{(1-\alpha)\lambda}{2} \right) = 0 \quad (2.11)$$

Корни этого уравнения определяют нечетные по номеру частоты собственных колебаний

$$\omega_m = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \frac{\lambda^2 m}{a^2} \quad (m=1,3,5,\dots)$$

В частном случае, когда $\alpha=0$ или $\delta=1$ ($\beta=0$), т.е. в случае отсутствия трещины

$$\lambda_m = m\pi, \quad \omega_m = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \frac{m^2 \pi^2}{l^2}$$

В случае антисимметричных колебаний, взамен первых двух уравнений системы (2.10) из условий (1.8) получаются уравнения

$$\begin{aligned} a_1 \operatorname{ch} \frac{\lambda \alpha}{2\sqrt{\delta}} - a_2 \operatorname{sh} \frac{\lambda \alpha}{2\sqrt{\delta}} + a_3 \cos \frac{\lambda \alpha}{2\sqrt{\delta}} - a_4 \sin \frac{\lambda \alpha}{2\sqrt{\delta}} &= 0 \\ a_1 \operatorname{ch} \frac{\lambda \alpha}{2\sqrt{\delta}} - a_2 \operatorname{sh} \frac{\lambda \alpha}{2\sqrt{\delta}} + a_3 \sin \frac{\lambda \alpha}{2\sqrt{\delta}} + a_4 \cos \frac{\lambda \alpha}{2\sqrt{\delta}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

В случае симметричных колебаний жестко закрепленной по краям $\bar{x} = -0.5(1+\alpha)$ и $\bar{x} = 0.5(1-\alpha)$ пластинки, взамен последних двух уравнений системы (2.10), из условий (2.3), (2.4) получаются уравнения

$$\begin{aligned} b_1 \operatorname{ch} \frac{1-\alpha}{2} \lambda + b_2 \operatorname{sh} \frac{1-\alpha}{2} \lambda + b_3 \cos \frac{1-\alpha}{2} \lambda + b_4 \sin \frac{1-\alpha}{2} \lambda &= 0 \\ b_1 \operatorname{ch} \frac{1-\alpha}{2} \lambda + b_2 \operatorname{sh} \frac{1-\alpha}{2} \lambda - b_3 \cos \frac{1-\alpha}{2} \lambda - b_4 \sin \frac{1-\alpha}{2} \lambda &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

В случае же антисимметричных колебаний жестко закрепленной по краям $\bar{x} = -0.5(1+\alpha)$ и $\bar{x} = 0.5(1-\alpha)$ пластинки, в системе (2.10) взамен первых двух уравнений необходимо взять два уравнения (2.12), а взамен последних двух—два уравнения (2.13).

Расчеты по определению приведенных значений первых двух частот (симметричных и антисимметричных) собственных колебаний

$$\bar{\omega}_m = a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega_m = \lambda_m^2, \quad (m=1,2) \quad (2.14)$$

для двух вариантов граничных условий приводятся в таблицах 1-4

Таблица 1

Шарнирно закрепленная пластинка (симметричные колебания)

$\beta \alpha$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	9.53	9.23	8.99	8.79	8.65	8.55	8.48	8.45	8.43
0.2	9.07	8.47	8.02	7.68	7.45	7.29	7.19	7.14	7.12
0.3	8.53	7.66	7.06	6.65	6.38	6.20	6.08	6.03	6.01
0.4	8.02	6.98	6.32	5.89	5.60	5.41	5.30	5.25	5.23
0.5	7.81	6.70	6.03	5.59	5.31	5.12	5.01	4.96	4.94

Таблица 2

Шарнирно закрепленная пластинка (антисимметричные колебания)

$\beta \alpha$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	39.43	39.13	38.43	37.40	36.25	35.20	34.42	33.95	33.76
0.2	39.36	38.61	36.97	34.77	32.58	30.78	29.53	28.80	28.51
0.3	39.26	37.90	35.14	31.82	28.87	26.66	25.20	24.39	24.06
0.4	39.15	37.15	33.35	29.24	25.92	23.52	22.08	21.26	20.94
0.5	39.10	36.79	32.55	28.18	24.76	22.40	20.91	20.10	19.79

Таблица 3

Жестко закрепленная пластинка (симметричные колебания)

$\beta \alpha$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	21.82	21.40	21.15	21.03	21.01	21.00	20.89	20.59	20.01
0.2	21.12	20.33	19.93	19.78	19.77	19.71	19.41	18.71	17.58
0.3	20.32	19.30	18.85	18.74	18.73	18.55	17.95	16.83	15.31
0.4	19.63	18.55	18.10	18.03	17.99	17.65	16.75	15.32	13.59
0.5	19.35	18.20	17.82	17.77	17.71	17.28	16.26	14.72	12.94

Таблица 4

Жестко закрепленная пластинка (антисимметричные колебания)

$\beta \alpha$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	61.56	60.90	59.55	57.92	56.58	55.89	55.74	55.64	54.82
0.2	61.40	59.79	56.74	53.52	51.30	50.37	50.27	49.88	48.04
0.3	61.18	58.30	53.38	48.98	46.43	45.62	45.55	44.64	41.83
0.4	60.93	56.73	50.31	45.33	42.86	42.27	42.13	40.63	37.17
0.5	60.80	56.00	49.00	43.89	41.52	41.04	40.82	39.06	35.39

Следует отметить, что при $\alpha=0$ или $\beta=0$, т.е. при отсутствии трещины, $\bar{\omega}_1 = \pi^2$, $\bar{\omega}_2 = 4\pi^2$ для случая шарнирно закрепления и $\bar{\omega}_1 = 2.69\pi^2$, $\bar{\omega}_2 = 6.25\pi^2$ для случая жесткого закрепления.

Из приведенных таблиц видно уменьшение частот при увеличении относительной длины трещины и расстояния трещины от лицевой плоскости пластинки. Случай $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ соответствует трещине, расположенной в срединной плоскости пластинки.

В заключение отметим, что расчеты приведенных значений частот собственных колебаний (2.14) были проведены двумя способами: определением корней соответствующих трансцендентных уравнений и определением собственных значений матриц (8x8) для соответствующих условий закрепления в случаях симметричных и антисимметричных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнуни В.Ц. К устойчивости сжатой длинной пластинки, ослабленной трещиной. Сб. Исследование современных научных проблем в вузах. Том 2, Ер.: Изд. "Айастан", 2000г, с.130-133.
2. Гнуни В.Ц., Егиазарян Т.А. Об устойчивости пластинок ослабленных трещиной. В сб. Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем. Ер.: Изд. ЕГУ, 2002, с. 37-41.

Институт механики
НАН РА

Поступила в редакцию
24.11.2004