

УДК 539.3

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНКИ ИЗ  
НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА,  
ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО К СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ  
Амбарцумян С.А., Минасян М.М.

Ս.Ա. Ամբարժումյան, Մ.Մ. Մինասյան

Գեֆորմացիաների արագության նկատմամբ զգայուն ու զծային առաձգանածուցիկ նյութից պարամետրական տատանումները

Աշխատանքում ուսումնասիրված է գեֆորմացիաների արագության նկատմամբ զգայուն ու զծային առաձգանածուցիկ նյութից պարամետրական տատանումները: Սակերի դասական տեսության շրջանակներում, հեղինակների կողմից առաջադրված ու զծային առաձգանածուցիկ մոդելի հիման վրա ստացվել են սակի ծանց դիմանդիկական հախաարտանքը, երբ սակի վրա ազդում է առանցքային պարբերական ուժ: Կիրառվել է Քուրնով-Գուդայերիին մեթոդը: Ստացվել են տատանումների անվերջոտող նկարագրող ու զծային հախաարտանք: Ուսումնասիրվել է սակի կայունությունը գլխավոր պարամետրական սեզանանի շրջակայքում:

S.A. Ambartsunyan, M.M. Minasyan

Parametric Vibrations of a Plate made of Nonlinear Viscoelastic Strain-rate Sensitive Materials

В работе рассматриваются параметрически возбуждаемые изгибные колебания прямоугольной пластинки, изготовленной из нелинейно-вязкоупругого материала, чувствительного к скорости деформации при активном нагружении. В рамках классической теории пластин и на основе моделей нелинейно-вязкоупругого тела, предложенного авторами, выведено уравнение изгибных колебаний пластинки при действии осевого периодического усилия. Применена процедура Бубнова-Галеркина. Выведено наиболее полное уравнение для амплитуды колебаний. Исследована устойчивость в окрестности главного параметрического резонанса. Выявлены некоторые "нестандартные" особенности резонансной кривой.

Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях пластинки, изготовленной из нелинейно-вязкоупругого материала, чувствительного к скорости деформации в стадии активного нагружения. Одномерная модель такого тела предложена в работах [1,2]. В работе [3] дано трехмерное обобщение модели, а в работах [4,5] на основе термомеханики и вариационных принципов обоснована эта модель. Показано, что модель с достаточной точностью описывает особенности динамического поведения ряда полимерных материалов путем сравнения следствий из модели с данными известных одномерных испытаний.

Одномерная модель

$$\sigma = \sigma_s(\epsilon) [1 + \psi(\dot{\epsilon}/\alpha)] \quad (1)$$

где  $\sigma_s$  – квазистатическое напряжение,  $\dot{\epsilon}$  – скорость деформации и функция  $\psi$  – мера отклонения динамического нагружения от квазистатического, хорошо описывает главные особенности ряда полимеров (полиэтилен, винилпласт и др.), причем не все из этих особенностей вписываются в известные модели вязкоупругого тела. Важными свойствами, выявленными моделью, являются динамический гистерезис и рассеяние механической энергии, свойство запаздывания деформации, характерное для наследственного тела с сингулярным ядром ползучести.

Трехмерная модель описывается уравнениями

$$\sigma_{ij} = K\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G(1 + \psi(\dot{\varepsilon}_j/\alpha))(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk}\delta_{ij}/3) \quad (2)$$

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$$

где  $\dot{\varepsilon}_j$  — производная по времени от интенсивности деформаций. Считается, что  $\psi \equiv 0$  при  $\dot{\varepsilon}_j < 0$ , т.е. для разгрузки принимается модель линейно-упругого восстановления.

Из (2) следует параллельность девиаторов напряжений и деформаций, а также существование "единой" динамической зависимости интенсивности напряжений, интенсивности деформаций и скорости изменения последней

$$\sigma_j = 2G(1 + \psi(\dot{\varepsilon}_j/\alpha)) \quad (3)$$

В работе [3] показано, что при колебаниях пластинки в диапазоне главных частот можно принять

$$\psi(\dot{\varepsilon}_j/\alpha) \approx (\dot{\varepsilon}_j/\alpha)^k \quad k < 1 \quad (4)$$

Представляя прогиб пластинки в форме

$$w(x, y, t) = F(t)\Phi(x, y) \quad (5)$$

получим

$$\psi(x, y, z, t) = \left(\frac{3z^2}{2\alpha^2}\right)^{k/2} F^k(t)\psi_1(x, y) \quad (6)$$

$$\psi_1(x, y) = \left[ \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)^2 \right]^k$$

Для изгибающих и крутящего моментов получаются

$$M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{3\psi_1}{k+3} \left(\frac{3h^2 F^2}{8\alpha^2}\right)^{k/2} \left( A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \right) \right] \quad (7)$$

$$M_y = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{3\psi_1}{k+3} \left(\frac{3h^2 F^2}{8\alpha^2}\right)^{k/2} \left( A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \quad (8)$$

$$H = -D(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{3\psi_1}{k+3} \left(\frac{3h^2 F^2}{8\alpha^2}\right)^{k/2} \frac{\partial^2 w}{\partial x} \right] \quad (9)$$

$$A_0 = \frac{2(\nu^2 - \nu + 1)}{3(1-\nu)}, \quad B_0 = \frac{4\nu - \nu^2 - 1}{3(1-\nu)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

где  $E, \nu$  — упругие константы при  $\psi = 0$ .

Пусть пластинка нагружена осевой периодической силой, действующей вдоль оси  $x$ . Для прогиба пластинки имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + hP_0 \cos pt \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

Для шарнирно опертого по всему контуру пластинки, приняв

$$\Phi(x, y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad x \in [0; a] \quad y \in [0; b] \quad (11)$$

и применив метод Галеркина, получим уравнение для амплитуды колебаний в окрестности главного параметрического резонанса в безразмерной форме

$$f''(\tau) + f(\tau)(1 + \lambda \cos 2\tau) + sf(\tau) + \gamma |f'(\tau)|^k f(\tau) H(ff') = 0 \quad (12)$$

где

$$\tau = \omega_0 t, \quad f(\tau) = h^{-1} F(t), \quad \omega_0^2 = \frac{\pi^4 D}{\rho h} \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right), \quad \lambda = \frac{\pi^2 n^2 P_0}{\rho a^2 \omega_0^2}$$

$$\gamma = \frac{12 \left[ \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{\pi \omega_0}{\alpha} \frac{mnh^2}{ab} \right]^k}{\pi^2 (k+3) (\mu + 2 + \mu^{-1})} \left\{ J_1 [A_0 (\mu + \mu^{-1}) + 2B_0] + 2(1-\nu) J_2 \right\}$$

$$J_1 = \int_0^\pi \int_0^\pi \left[ (\mu - 1 + \mu^{-1}) \sin^2 \xi \sin^2 \eta + 3 \cos^2 \xi \cos^2 \eta \right]^{k/2} \sin^2 \xi \sin^2 \eta d\xi d\eta$$

$$J_2 = \int_0^\pi \int_0^\pi \left[ (\mu - 1 + \mu^{-1}) \sin^2 \xi \sin^2 \eta + 3 \cos^2 \xi \cos^2 \eta \right]^{k/2} \cos^2 \xi \cos^2 \eta d\xi d\eta$$

$$\mu = \left( \frac{n b}{m a} \right)^2$$

В уравнении (12)  $H(x)$  — функция Хевисайда,  $s$  — частотная расстройка.

Порождающее решение в первом приближении имеет вид

$$f(\tau) = a \sin \tau + b \cos \tau = A \sin(\tau + \varphi) \quad (14)$$

$$\varphi = \arctg(b/a)$$

Подставив (14) в уравнение (12), получим

$$-\sin \tau \left( \frac{a\lambda}{2} + s a \right) + \cos \tau \left( \frac{b\lambda}{2} - s b \right) + \gamma H(\sin 2(\tau + \varphi)) A^{k+1} |\cos(\tau + \varphi)|^k \sin(\tau + \varphi) + \frac{\lambda a}{2} \sin 3\tau + \frac{\lambda b}{2} \cos 3\tau = 0 \quad (15)$$

Умножив (15) поочередно на  $\sin \tau$  и  $\cos \tau$  и проинтегрировав полученные уравнения в промежутке  $[\varphi; \varphi + 2\pi]$ , получим уравнения для определения параметров разветвления  $a$  и  $b$ :

$$\begin{aligned} \pi a (s + \lambda/2) - \gamma A^k (a I_1 - b I_2) &= 0 \\ \pi b (s - \lambda/2) - \gamma A^k (a I_2 + b I_1) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$I_1(k) = 2 \int \cos^k \tau \sin^2 \tau d\tau, \quad I_2(k) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{k+1} \tau \sin \tau d\tau = \frac{2}{k+2}$$

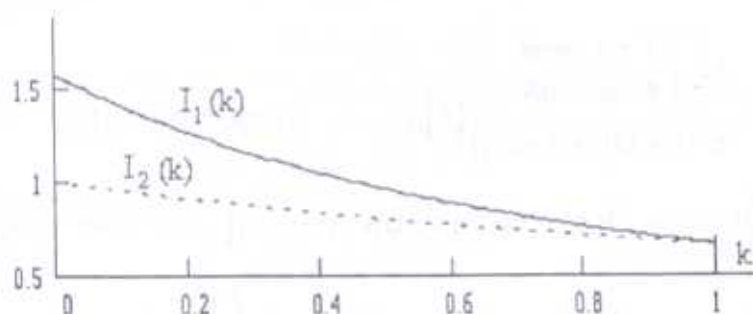
Учитывая формулы [7]

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{\mu-1} x dx = 2^{\mu-2} B[\mu/2, \mu/2], \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (17)$$

где  $B(x, y)$  – Бэта-функция,  $\Gamma(x)$  – Гамма-функция, получим

$$I_1(k) = \frac{2^k \Gamma^2\left(\frac{k+1}{2}\right)}{(k+2)\Gamma(k+1)}$$

Фиг.1 представляет графики функций  $I_1(k)$  и  $I_2(k)$



Фиг.1

Условие существования нетривиального решения системы приводит к амплитудному соотношению

$$\frac{\gamma^2 A^{2k}}{\pi^2} (I_1^2 + I_2^2) - 2s \frac{\gamma A^k I_1}{\pi} + s^2 - \frac{\lambda^2}{4} = 0 \quad (18)$$

Записав решение (18) в виде

$$\frac{\gamma I_1}{\pi} A^k = \frac{s \pm \sqrt{(1+\beta^2)\lambda^2/4 - s^2\beta^2}}{1+\beta^2} \quad (\beta = I_2/I_1) \quad (19)$$

видно, что нетривиальное решение существует в диапазоне

$$-\frac{\lambda}{2}\sqrt{1+\beta^{-2}} \leq s \leq \frac{\lambda}{2}\sqrt{1+\beta^{-2}} \quad (20)$$

частотной расстройки.

Опорные значения частотной расстройки (при  $A=0$ ) равны  $-\lambda/2$  и  $\lambda/2$ . Уравнение "скелетной" кривой (точек, равноудаленных от ветвей резонансной кривой на уровнях  $A = \text{const}$ ) (фиг.2)

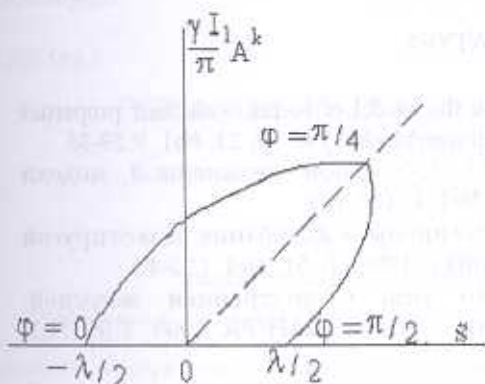
$$\frac{\gamma I_1}{\pi} A^k = s \quad (21)$$

Максимум амплитуды достигается на этой кривой при  $s = \lambda/2\beta$ .

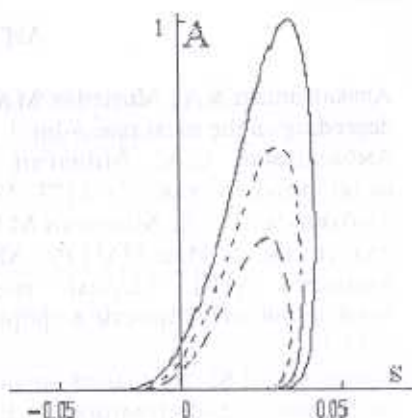
Из системы (16) для фазовой расстройки  $\varphi$  получим

$$\varphi = \text{arctg} \sqrt{\frac{s+\lambda/2-y}{y-s+\lambda/2}}, \quad y = \frac{\gamma I_1}{\pi} A^k \quad (22)$$

откуда следует, что  $\varphi$  монотонно меняется вдоль резонансной кривой в промежутке  $[0, \pi/2]$ , двигаясь слева направо со значением  $\pi/4$  в точке  $y_{\max}$ .



Фиг.2



Фиг.3

Для ширины резонансной области получим

$$\Delta\omega = \lambda\omega_0 \sqrt{1 - \frac{4\gamma^2 A^{2k} I_2^2}{\lambda^2 \pi^2}} \quad (23)$$

откуда видно, что опорная ширина области (при  $A=0$ ) пропорциональна глубине модуляции  $\lambda$  и не зависит от нелинейности  $\gamma$ . Отметим, что перечисленные свойства резонансной кривой характерны параметрическим колебаниям с нелинейным демпфированием и с нелинейной восстанавливающей силой. Для сравнения приведем пример дифференциального уравнения колебаний с указанными механизмами [6]

$$\ddot{u} + u(1 + \lambda \cos 2\tau) + su + \gamma u^2 \dot{u} - ku^3 = 0 \quad (24)$$

Резонансная кривая для этого уравнения получается в виде

$$\left(\frac{3}{4}kA^2\right)^2 (1 + \beta^2) - 2s\left(\frac{3}{4}kA^2\right) + s^2 - \frac{\lambda^2}{4} = 0, \quad \left(\beta = \frac{\gamma}{3k}\right) \quad (25)$$

и полностью совпадает с уравнением (18) с заменой  $\gamma A^k I_1 / \pi$  на  $3kA^2/4$ . Сравнение показывает, что динамическое перенапряжение в модели вязкоупругого тела играет одновременно роль нелинейного демпфирования и нелинейной консервативной силы. Резонансная кривая в плоскости  $(3kA^2/4, s)$  также имеет вид, показанный на фиг.2, однако в плоскости  $(A, s)$  эти кривые качественно отличаются в следующем: если для уравнения (25) резонансная кривая в опорных точках имеет вертикальные касательные, то для уравнения (18) из-за значения  $k < 1$  резонансная кривая касается оси частот.

В качестве примера построим резонансную кривую для винипласта, для которого имеем [1,2]

$$\alpha = 50 \text{сек}^{-1}, \quad \nu = 0.25, \quad \sqrt{E/\rho} = 2.27 \cdot 10^3 \text{ м/с}, \quad k = 0.25$$

Примем

$$h/l = 0.01, \quad m = n = 1, \quad a = b = l, \quad hP_0 = \lambda \cdot 4\pi^2 D/l^2$$

Резонансные кривые для трех значений глубины модуляций показаны на фиг.3:  $\lambda = 0.04; 0.045; 0.05$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ambartsumian S.A., Minassian M.M. On the model of bodies with their properties depending on the stress rate. // *Int. J. Nonlinear Mech.* 1986. V. 21. №1. P.27-36
2. Амбарцумян С.А., Минасян М.М. Об одной нелинейной модели вязкоупругого тела. // *МТГ.* 1991. №4. С.165-172
3. Амбарцумян С.А., Минасян М.М. Нелинейные колебания вязкоупругой пластинки. // *Изв. НАН РА. Механика.* 1998. Т. 51. №4. С.3-10
4. Минасян М.М. Модель твердого тела с внутренней энергией, зависящей от скорости деформаций. // *Докл. НАН РА.* 1999. Т.99. №1. С.11-15
5. Минасян М.М. К модели нелинейного вязкоупругого тела, зависящей от скорости деформаций. // В кн. "Проблемы механики деформируемых твердых тел". Изд. Гитутюн НАН РА. 2003. С.233-140.
6. Шмидт Г. Параметрические колебания. М.: Мир, 1978.
7. Градштейн И.М., Рыжик И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов. М.: Изд. Физматгиз. 1963.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
26.11.2004