ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №4, 2004 Механика

УДК 539.1

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ПРОНИКАНИЯ УЗКОГО КОНУСА В СЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

Багдоев А.Г., Машурян Г.М., Погосян С.М., Сафарян Ю.С.

Ա.Գ.Բագդոև, Գ.Մ.Մաշուրյան, Ս.Մ.Պողոսյան, Յու.Ս.Սաֆարյան

Ոչ գծային խնդիրներ բարակ կոնի թափանցման սեղմելի հեղուկի մեջ

Դիտարկված է տիպիկ դիֆրակցիոն ալիքային խնդիր, որը առաջանում է կիսատարածություն զբաղեցնող հեղուկի մեջ բարակ կոնի գերձայնային թափանցման ժամանակ: Որոշված են ասիմպտոտիկ գծային և ոչ գծային, ինչպես անալիտիկ, այնպես էլ թվային լուծումները տարբեր ալիքների շփման գծի շրջակայքում:

A.G. Bagdoev, G.M.Mashuryan, S.M.Pogosyan, Ju.S.Safaryan

Nonlinear Problems of Slender body penetration in compressible fluid

Рассматривается типично дифракционная волновая задача, которая возникает при сверхзвуковом проникании узкого конуса в сжимаемую жидкость, занимающую полупространство. Определяются асимптотические линейные и нелинейные как аналитические, так и численные решения в окрестности линии касания волн.

При проникании узкого конуса с углом раствора 2β в сжимаемую жидкость, занимающую полупространство, с постоянной сверхзвуковой скоростью V картина движения показана на фиг. 1.

Задача является осесимметричной и зависит от r, z. Выберем ось Or по поверхности жидкости, ось Oz – вглубь. Введем полярные координаты $r = r_1 \cos\varphi$, $z = r_1 \sin\varphi$. Тогда фронт линейной задачи AB соответствует сфере $r_1 = at$, а фронт BC – конусу с уравнением $r = \dfrac{Vt - z}{\sqrt{M^2 - 1}}$, $M = \dfrac{V}{a}$, a – начальная скорость звука. В линейной постановке имеем в области [1] вне сферы $ABB'A'$ для давления

$$P = \frac{\rho_0 \beta^2 V^2}{2} \int_{z_2}^{z_0} \frac{dx}{\sqrt{(x - z)^2 + r^2}} \tag{1}$$

где

$$z_{0,2} = \frac{M^2 z - Vt \pm \sqrt{\left(M^2 z - Vt\right)^2 - \left(M^2 - 1\right) M^2 \left(r_1^2 - a^2 t^2\right)}}{M^2 - 1}. \tag{2}$$

После несложных вычислений найдем

$$P = \frac{\rho_0 \beta^2 V^2}{2} \ln \frac{Vt - z + \sqrt{(Vt - z)^2 - \left(M^2 - 1\right) r^2}}{Vt - z - \sqrt{(Vt - z)^2 - \left(M^2 - 1\right) r^2}}$$

Вблизи фронта BC [2]

$$P=\sqrt{2}\rho_0\beta^2V^2\frac{\sqrt{Vt-z-r\sqrt{M^2-1}}}{\sqrt{z}\sqrt[4]{M^2-1}} \tag{3}$$

где ρ_0 — начальная плотность.

Пусть уравнение состояния жидкости $P=B\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n-B$, ρ — плотность, $B=\rho_0a^2$. Обозначим

$t-\frac{z}{V}-\frac{r\sqrt{M^2-1}}{V}=\tau$ и заменим согласно теории Уизема [3] линейную характеристику τ на нелинейную y_1, тогда (3) в нелинейном случае дает

$$P=\rho_0\beta^2V^2\frac{\sqrt{V}\sqrt{2}\sqrt{y_1}}{\sqrt{r}\sqrt[4]{M^2-1}} \tag{4}$$

вблизи B (фиг. 1) $r\approx at\cos\varphi$, $\sin\varphi_0=\frac{1}{M}$, а уравнение одномерной по нормали к BC характеристики [3] $y_1=\mathrm{const}$

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}=-\frac{n+1}{2}\frac{P}{\rho_0a^2},\ \tau=-A\frac{n+1}{2}2\sqrt{t}\sqrt{y_1}+y_1,\ A=\frac{\beta^2M^2\sqrt{2}}{\cos\varphi_0} \tag{5}$$

Уравнение ударной волны BC [3]

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}=-\frac{n+1}{4}\frac{P}{\rho_0a^2},\ \frac{\partial\tau}{\partial t}=-\frac{n+1}{4}\frac{A}{\sqrt{t}}\sqrt{y_1} \tag{6}$$

Подставляя (5) в (6), можно получить вдоль BC

$$\frac{\partial y_1}{\partial t}-\frac{n+1}{4}\frac{A}{\sqrt{t}}\sqrt{y_1}=A\frac{n+1}{2}2\sqrt{t}\frac{\partial\sqrt{y_1}}{\partial t} \tag{7}$$

Решение этого уравнения будет $\sqrt{y_1}=K\sqrt{t}\frac{n+1}{4}$

$$K=3A \tag{8}$$

и на ударной волне BC $P=P'$

$$\frac{P}{\rho_0a^2}=A\sqrt{\frac{y_1}{t}},\ \frac{P}{\rho_0a^2}=3\frac{n+1}{4}A^2,\ \frac{P'}{\rho_0a^2}=\frac{3}{2}(n+1)\beta^4M^6\left(M^2-1\right)^{-1} \tag{9}$$

Внутри сферы $r_1=at$ решение запишется [1]

$$P=\frac{\rho_0\beta^2V^2}{2}\int\limits_0^{z_0}\frac{dx}{\sqrt{(x-z)^2+r^2}}-\frac{\rho_0\beta^2V^2}{2}\int\limits_{z_1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{(x-z)^2+r^2}} \tag{10}$$

где $z_1<0$,

$$z_1=\frac{M^2z+Vt-\sqrt{\left(M^2z+Vt\right)^2-\left(M^2-1\right)M^2\left(r_1^2-a^2t^2\right)}}{M^2-1} \tag{11}$$

Вблизи участка линии $r_1=at$ AB (фиг.1)

$$P=\frac{\rho_0\beta^2V^2}{t}\left(t-\frac{r_1}{a}\right)\frac{M^2\sin\varphi}{1-M^2\sin^2\varphi} \tag{12}$$

Если в нелинейной задаче применить метод замены линейных характеристик уточненным нелинейным уравнением [3], решение на AB вдали от B будет экспоненциально мало. Вблизи точки B, где $\sin\varphi_0=\frac{1}{M}$, полученное решение не имеет места. Учитывая порядки $\varphi-\varphi_0\approx\beta^2$, $\frac{P}{\rho_0a^2}\approx\beta^4$, $t-\frac{r_1}{a}\approx\beta^4$, можно видеть, что второе слагаемое в правой части (10) можно отбросить, и получится из (10) линейное решение вблизи $B\left(t-\frac{r_1}{a}>0\right)$

$$\frac{P}{\rho_0a^2}=\frac{\beta^2M^3}{2}\frac{\varphi-\varphi_0+\sqrt{(\varphi-\varphi_0)^2+2\frac{t-\frac{r_1}{a}}{t}}}{\sqrt{M^2-1}} \tag{13}$$

Вводя в соответствии с [1], [2] переменные

$$\varphi-\varphi_0=\sqrt{\frac{n+1}{2}\frac{P'}{\rho_0a^2}}y,\ P=P'\mu,\ V_{r_1}=a\frac{P'}{\rho_0a^2}\mu,\ r_1=at+at\frac{n+1}{2}\frac{P'}{\rho_0a^2}\delta,$$

$$V_\varphi=a\sqrt{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{P'}{\rho_0a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\nu,$$

где V_{r_1},V_φ есть компоненты скорости частиц по r_1,φ, из (13) можно найти вблизи точки B позади AB

$$\mu=c\left(y+\sqrt{y^2-2\delta}\right),\quad c=\frac{1}{\sqrt{12}},\quad \nu=-\frac{\mu^2}{2c} \tag{14}$$

причем $\delta<0$. Уравнение коротких волн в нелинейной задаче [1], [2]

$$(\mu-\delta)\frac{\partial\mu}{\partial\delta}+\mu+\frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial y}=0,\ \frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{\partial\nu}{\partial\delta} \tag{15}$$

В линейном варианте μ в скобках в (15) следует отбросить. Введя функцию ϕ по формуле $\mu=\frac{\partial\phi}{\partial\delta}$, интегрируя (14) при условии $\delta=0,\ \ \phi=0$, можно получить в линейной задаче $\phi=\phi^0(\delta,y)$

$$\phi^0=c\delta y-c\left(y^2-2\delta\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{3}+\frac{c}{3}|y|^3 \tag{16}$$

Уравнение коротких волн можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\delta}-\delta\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial\delta^2}+\frac{\partial\phi}{\partial\delta}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \tag{17}$$

В случае $\delta>0$, т.е впереди волны BE, в линейной задаче согласно (1), (2)

$$\mu = 2c\sqrt{y^2 - 2\delta} \tag{18}$$

причем решение обращается в нуль на линейной волне BC $\delta = \frac{y^2}{2}$. Из второго уравнения (15) для ν получится согласно (18)

$$\frac{\partial \nu}{\partial \delta} = \frac{2cy}{\sqrt{y^2 - 2\delta}},\ \nu = -2cy\sqrt{y^2 - 2\delta}$$

Таким образом, линейное решение впереди параболической линии $\delta = 0$ имеет по (18) вид

$$\delta > 0,\ \delta = \frac{y^2}{2} - \frac{\mu^2}{8c^2},\ \ \nu = -y\mu \tag{19}$$

Решение уравнений (15) ищем в виде [1], [2]

$$\delta = -\frac{y^2}{2} f'(\mu) + F(\mu),\quad \nu = yf(\mu),\quad f(\mu) = \frac{A^2 - B^2 - \mu^2}{A + \mu} \tag{20}$$

$$F(\mu) = \mu - \frac{(\mu + A)^2 - B^2}{2B} \ln\frac{\mu + A - B}{\mu + A + B} + C(\mu + A)^2 - CB^2 \tag{21}$$

Уравнения (15) можно записать в виде

$$\mu - \delta + \mu\frac{\partial \delta}{\partial \mu} + \frac{1}{2}\frac{\partial \nu}{\partial y}\frac{\partial \delta}{\partial \mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta}{\partial y}\right)^2 = 0,\quad -\frac{\partial \delta}{\partial y} = \frac{\partial \nu}{\partial \mu} \tag{22}$$

Можно показать, что (20), (21) удовлетворяют (22).

Уравнение ударной волны BC согласно (5)-(9)

$$Vt - z - r\sqrt{M^2 - 1} = -\frac{3}{8}(n+1)^2 M^8 \left(M^2 - 1\right)^{-\frac{3}{2}} \beta^4 V$$

или в переменных δ, μ на BC

$$\mu = 1,\ \ \delta = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} \tag{23}$$

Уравнение нелинейной параболической линии BE будет $\delta = \mu$.

Точка их пересечения B будет иметь координаты

$$y_B = 1,\ \ \mu_B = 1,\ \ \delta_B = 1 \tag{24}$$

Для того, чтобы (20) переходило в (19), для больших y должно быть $A = 0$, $B = 0$ и (20), (21) дают после раскрытия логарифма

$$\delta = \frac{y^2}{2} + \mu - \frac{(\mu + A)^2 - B^2}{2B}\left(-\frac{2B}{\mu + A}\right) + C\mu^2 \text{ или}$$

$$C = -\frac{1}{8c^2}, \delta = \frac{y^2}{2} + 2\mu_1 - \frac{3}{2}\mu_1^2,\ \ \nu_1 = -y\mu_1 \tag{25}$$

где впереди BE обозначены μ, ν через μ_1, ν_1.

Уравнение ударной волны BB'' будет

$$\frac{d\delta}{dy} = \sqrt{2\delta - \mu} \tag{26}$$

Можно найти решение уравнений (22), переходящее для больших δ, μ в (14) в виде [1], [2]

$$\delta = \frac{\mu y}{c} - \mu \ln \mu - \frac{\mu^2}{2c^2} + \left(1 - \frac{1}{c} + \frac{1}{2c^2}\right)\mu, \quad \nu = -\frac{\mu^2}{2c} - 1 + \frac{1}{2c} \tag{27}$$

Условие непрерывности решения на BE по (25), (27) дает

$$\frac{y^2}{2} + 2\mu - \frac{3}{2}\mu^2 = \mu y 2\sqrt{3} - \mu \ln \mu - 6\mu^2 + \left(7 - 2\sqrt{3}\right)\mu$$

$$-\mu y = \sqrt{3} - 1 - \mu^2\sqrt{3} \tag{28}$$

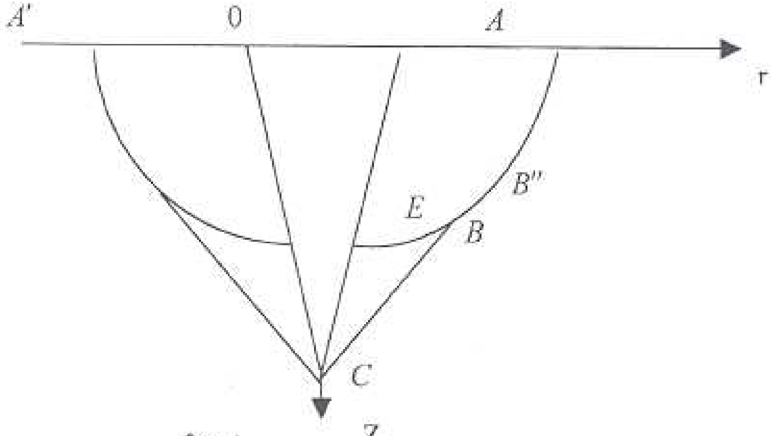
Равенства (28) точно выполнены в точке B даваемой (24), а на всей линии BE вплоть до точки y=1.6, удовлетворены с погрешностью не превышающей 10%. Уравнение на ударной волне BB'' с учетом (27) дает

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{-2\sqrt{3}\mu + \sqrt{4\sqrt{3}\mu(y-1) - 2\mu \ln \mu - 12\mu^2 + 13\mu}}{2\sqrt{3}y - \ln \mu - 12\mu - 2\sqrt{3} + 6} \tag{29}$$

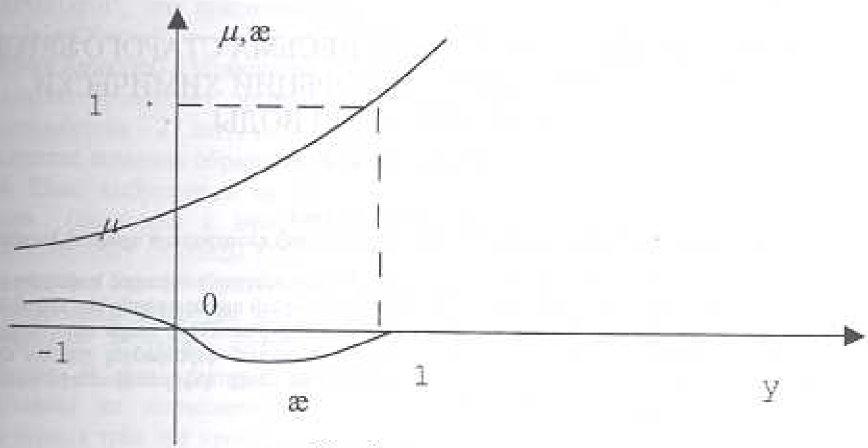
которое следует решать для $y \le 1$ при условиях (24). Должно выполняться условие малости функции

$$æ = \sqrt{3} - 1 - \mu^2\sqrt{3} + \mu\sqrt{4\sqrt{3}\mu(y-1) - 2\mu \ln \mu - 12\mu^2 + 13\mu}$$

В точке B (24) $æ = 0$. Вблизи B, полагая $y = 1 + \bar{y}$, $\mu = 1 + \bar{\mu}$, из (29) получим $\bar{\mu} = 0{,}4\bar{y}$; $æ = -0.2\bar{y}$, т.е. æ мало. Расчеты (29), (24) приведены на фиг. 2, при этом до точки y=-1 æ мало и использованное частное решение (27) дает удовлетворительные результаты.



Фиг.1



Фиг.2

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г. Движение конуса в сжимаемой жидкости// Докл. АН Арм. ССР. Механика. 1967. Т. XLV. №3. С.101-106.
2. Багдоев А.Г., Гургенян А.А. Приближенное решение ряда нелинейных задач определения ударных волн в сжимаемой жидкости // Изв. АН Арм ССР. Механика. 1968. Т.XXI. №3. С.39-56.
3. Багдоев А.Г. Распространение волн в сплошных средах. Ереван: Изд. АН Арм ССР. 1981. 307 с.

Институт механики
НАН Армении
Горисский филиал государственного
инженерного университета Армении

Поступила в редакцию
3.06.2004