ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №4, 2004 Механика

УДК 539.3.01

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТЕРМОПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСТВА

Бежанян В.А.

Վ.Ա. Բեժանյան
Ջերմապիեզոէլեկտրականության տեսության խնդիրների լուծման մասին

Շարադրված են ջերմապիեզոէլեկտրականության տեսության խնդիրների լուծման մաթեմատիկական հիմունքները մեխանիկական, էլեկտրական և ջերմային բեռնավորում ունեցող պիեզոկերամիկական մարմինների համար:
Տրված է փոխկապակցված եզրային խնդիրների ձևակերպումը, որը նկարագրում է ջերմաէլեկտրաառաձգական պրոցեսները տիպային նախնական բևեռացում ունեցող պիեզոկերամիկական մարմիններում:

V.A. Bezhanyan
To the solution of problems of thermopiezoelectricity theory

Изложены математические основы решения задач теории термопьезоэлектричества для пьезокерамических тел при механическом, электрическом и тепловом нагружениях.
Дана формулировка сопряженных краевых задач, описывающих термоэлектроупругие процессы в пьезокерамической среде, для типичных случаев поляризации керамики.

В связи с широким использованием пьезокерамических материалов возникает необходимость в продолжении углубленного исследования взаимодействия полей деформаций с электрическими и температурными полями.

В ряде работ исследованы взаимодействие в пьезокерамических телах механических и электрических полей [1-3]. Но почти отсутствуют исследования влияния температурных полей на поведение пьезокерамических тел.

В общем виде полная система уравнений статики теории термопьезоэлектричества для трансверсально-изотропных пьезокерамических тел включает:

а) декартовые координаты (поляризация вдоль оси $0z$):

I. Уравнения равновесия (без учета объемных сил)

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0$$
$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0 \qquad (1)$$
$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0$$

где σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} – компоненты тензора механических напряжений.

II.В работах [4,5,6] утверждается, что в механике пьезокерамических сред магнитными эффектами вообще можно пренебречь, а для изучения электрического поля использовать уравнения электростатики [7]:

$$\operatorname{div}\vec{D} = 0, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad}\psi \tag{2}$$

где $\vec{D}$ — вектор электрической индукции, $\vec{E}$ — вектор напряженности электрического поля, ψ — электростатический потенциал.

III. Уравнения теплопроводности [8,9]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{3}$$

где $T = \tilde{T} - T_0$ — соответственно относительная, абсолютная и начальная температура, $\lambda^2 = \frac{\lambda_{33}}{\lambda_{11}} = \frac{\lambda_{33}}{\lambda_{22}}$ — отношение коэффициентов теплопроводности тела в направлении оси $0z$ и перпендикулярном к ней ($\lambda_{11} = \lambda_{22}$).

IV. Когда в качестве термодинамического потенциала выбираем электрическую функцию Гиббса, уравнение состояния будет [10]:

$$\begin{aligned}
&\sigma_x = c_{11}^{E,T}\varepsilon_x + c_{12}^{E,T}\varepsilon_y + c_{13}^{E,T}\varepsilon_z - e_{31}^{T}E_z - \gamma_{11}^{E}T \\
&\sigma_y = c_{12}^{E,T}\varepsilon_x + c_{11}^{E,T}\varepsilon_y + c_{13}^{E,T}\varepsilon_z - e_{31}^{T}E_z - \gamma_{11}^{E}T \\
&\sigma_z = c_{13}^{E,T}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) + c_{33}^{E,T}\varepsilon_z - e_{33}^{T}E_z - \gamma_{33}^{E}T \\
&\tau_{zy} = \tau_{yz} = c_{44}^{E,T}\varepsilon_{yz} - e_{15}^{T}E_y, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = c_{44}^{E,T}\varepsilon_{xz} - e_{15}^{T}E_x \\
&\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{1}{2}\left(c_{11}^{E,T} - c_{12}^{E,T}\right)\varepsilon_{xy} \\
&D_x = \varepsilon_{11}^{s,T}E_x + e_{15}^{T}\varepsilon_{xz}, \quad D_y = \varepsilon_{11}^{s,T}E_y + e_{15}^{T}\varepsilon_{yz} \\
&D_z = \varepsilon_{33}^{s,T}E_z + e_{31}^{T}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) + e_{33}^{T}\varepsilon_z + g_3^{s}T
\end{aligned} \tag{4}$$

где $c_{11}^{E,T}$, $c_{12}^{E,T}$, $c_{13}^{E,T}$, $c_{33}^{E,T}$, $c_{44}^{E,T}$ — компоненты тензора модулей упругости, e_{31}^{T}, e_{33}^{T}, e_{15}^{T} — пьезоэлектрические постоянные, ε_{11}^{s}, ε_{33}^{s} — диэлектрические проницаемости, γ_{11}^{E}, γ_{33}^{E} — температурные коэффициенты механических напряжений, g_3^{s} — пироэлектрические коэффициенты, ε_x, ε_y, ε_z, ε_{xy}, ε_{yz}, ε_{zx} — компоненты тензора деформации.

Верхние индексы E, T, s указывают, что соответствующие постоянные должны быть экспериментально определены соответственно при постоянном электрическом (E) и температурном (T) полях, а также при постоянном уровне деформации (s).

V. Соотношения Коши [3]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \tag{5}$$

где u_x, u_y, u_z – компоненты вектора упругих перемещений.

Из (1)-(5) имеем 23 соотношения смешанного дифференциально-алгебраического типа, которые можно преобразовать в систему из пяти дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка:

$$c_{11}^{E,T}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\left(c_{11}^{E,T}-c_{12}^{E,T}\right)\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+c_{44}^{E,T}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\left(c_{11}^{E,T}+c_{12}^{E,T}\right)\right]\frac{\partial u_y}{\partial y}+$$
$$+\left(c_{13}^{E,T}+c_{44}^{E,T}\right)\frac{\partial u_z}{\partial z}\Bigg]+\left(e_{31}^{T}+e_{15}^{T}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}=\gamma_{11}^{E}\frac{\partial T}{\partial x} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2}\left(c_{11}^{E,T}-c_{12}^{E,T}\right)\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+c_{11}^{E,T}\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+c_{44}^{E,T}\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}\left(c_{11}^{E,T}+c_{12}^{E,T}\right)\right]\frac{\partial u_x}{\partial x}+$$
$$+\left(c_{13}^{E,T}+c_{44}^{E,T}\right)\frac{\partial u_z}{\partial z}\Bigg]+\left(e_{31}^{T}+e_{15}^{T}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z}=\gamma_{11}^{E}\frac{\partial T}{\partial y} \quad (7)$$

$$c_{44}^{E,T}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)+c_{33}^{E,T}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\left(c_{13}^{E,T}+c_{44}^{E,T}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)+$$
$$+e_{15}^{T}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)+e_{33}^{T}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\gamma_{33}^{E}\frac{\partial T}{\partial z} \quad (8)$$

$$\left(e_{31}^{T}+e_{15}^{T}\right)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial z}+\left(e_{31}^{T}+e_{15}^{T}\right)\frac{\partial^2 u_y}{\partial y\partial z}+e_{15}^{T}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)+e_{33}^{T}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}-$$
$$-\left[\varepsilon_{11}^{s,T}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)+\varepsilon_{33}^{s,T}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]=-g_3^{s}\frac{\partial T}{\partial z} \quad (9)$$

и уравнения теплопроводности (3).

Отметим, что алгебраическим путем исключить электрический потенциал ψ из (6)-(8) и перемещения u_x, u_y, u_z из уравнения (9), невозможно. Это означает, что задача электроупругости является взаимно связанной. Таким образом, используя в качестве основных неизвестных u_x, u_y, u_z, ψ, T, имеем полную систему уравнений статической теории термопьезоэлектричества (3), (6)-(9). Эта система является невзаимосвязанной относительно температуры.

Для ее однозначной разрешимости в некоторой пространственной области V, в каждой точке поверхности S этой области необходимо знать искомые функции или определенные комбинации их первых производных.

Граничные условия для механических переменных формулируются аналогично условиям в задачах теории упругости. Так, если на поверхности S (или на ее части) задан вектор перемещения, то искомые решения для перемещений из системы (3), (6)-(9) должны подчиняться условиям

$$u_x\big|_S=u_0,\quad u_y\big|_S=V_0,\quad u_z\big|_S=W_0 \quad (10)$$

Если же на поверхности тела S задан вектор внешних сил $\vec{F}_n$, то граничные условия имеют вид:

$$F_{nx} = e_{31}^{T} n_x \frac{\partial\psi}{\partial z} + e_{15}^{T} n_z \frac{\partial\psi}{\partial x} + n_x \left(c_{11}^{E,T} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{12}^{E,T} \frac{\partial u_y}{\partial y} + c_{13}^{E,T} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} n_y \left(c_{11}^{E,T} - c_{12}^{E,T} \right) \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + n_z c_{44}^{E,T} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) - \gamma_{11}^{E} n_x T$$

$$F_{ny} = e_{31}^{T} n_y \frac{\partial\psi}{\partial z} + e_{15}^{T} n_z \frac{\partial\psi}{\partial y} + n_y \left(c_{12}^{E,T} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{11}^{E,T} \frac{\partial u_y}{\partial y} + c_{13}^{E,T} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \tag{11}$$

$$+ \frac{1}{2} n_x \left(c_{11}^{E,T} - c_{12}^{E,T} \right) \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + n_z c_{44}^{E,T} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) - \gamma_{11}^{E} n_y T$$

$$F_{nz} = e_{15}^{T} \left(n_x \frac{\partial\psi}{\partial x} + n_y \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) + e_{33}^{T} n_z \frac{\partial\psi}{\partial z} + n_x c_{44}^{E,T} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) +$$

$$+ n_y c_{44}^{E,T} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + n_z \left[c_{13}^{E,T} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) - c_{33}^{E,T} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] - \gamma_{33}^{E} n_z T$$

где F_{nx}, F_{ny}, F_{nz} – проекция вектора $\vec{F}_n$ на декартовые координаты, n_x, n_y, n_z – проекции орта нормали к поверхности S.

Остается записать краевые условия, отображающие конкретные условия электрического и температурного нагружения тела.

В случае нагружения тела, заданной разностью электрического потенциала на электродах, частично покрывающих тело $S_1^{\pm}$, задается значение искомого потенциала ψ. В этом случае [3]:

$$\psi\Big|_{S_1^{\pm}} = \pm V_0 \tag{12}$$

Если внешней средой пьезокерамических элементов является воздух и диэлектрики, то приближенно принимается [3]:

$$\vec{n} \cdot \vec{D}\Big|_{S - S_1^{+} - S_1^{-}} = 0 \tag{13}$$

Поэтому в дальнейшем понадобятся выражения для нормальной составляющей вектора электрической индукции. Она определяется по формуле:

$$D_n = \vec{n} \cdot \vec{D} = n_x D_x + n_y D_y + n_z D_z =$$

$$= n_x \left[e_{15}^{T} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) - \varepsilon_{11}^{\varepsilon,T} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right] + n_y \left[e_{15}^{T} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) - \varepsilon_{11}^{\varepsilon,T} \frac{\partial\psi}{\partial y} \right] + \tag{14}$$

$$+ n_z \left[e_{31}^{T} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + e_{33}^{T} \frac{\partial u_z}{\partial z} + g_3^{\varepsilon} T - \varepsilon_{33}^{\varepsilon,T} \frac{\partial\psi}{\partial z} \right]$$

Для температурного поля рассмотрим случаи, когда на поверхности пьезокерамического тела задано распределение температуры [5]

$$T|_S = P(x,y,z) \tag{15}$$

или известен тепловой поток

$$\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_S = q(x,y,z) \tag{16}$$

Кроме условий (10)-(16) возможны и другие виды граничных условий.

Уравнения (3), (6)-(9) являются сложной системой взаимосвязанных относительно функций $u_x,\ u_y,\ u_z,\ \psi$ и невзаимосвязанных относительно температурных уравнений.

При $T \equiv 0$ система линейных уравнений (6)-(9) совпадает с системой уравнений статической электроупругости. Поэтому общее решение системы (3), (6)-(9) представим в виде суммы частного решения уравнения термопьезоэлектричества и общего решения уравнений электроупругости. Частное решение системы (3), (6)-(9) ищем в виде [11]:

$$\begin{aligned} &u_x^{(v)} = \frac{\partial\phi}{\partial x},\quad u_y^{(v)} = \frac{\partial\phi}{\partial y},\quad u_z^{(v)} = k\frac{\partial\phi}{\partial z} \\ &\psi^{(v)} = l\frac{\partial\phi}{\partial z},\quad T = d\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{17}$$

где k, l и d постоянные определяются по формулам:

$$k = \frac{\Delta_1}{\Delta},\quad l = \frac{\Delta_2}{\Delta},\quad d = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &a_{11} = c_{13}^{E,T} + c_{44}^{E,T},\quad a_{12} = e_{31}^{T} + e_{15}^{T},\quad a_{13} = -\gamma_{11}^{E}, \\ &a_{21} = c_{33}^{E,T} - \lambda^2 c_{44}^{E,T},\quad a_{22} = e_{33}^{T} - \lambda^2 e_{15}^{T},\quad a_{23} = -\gamma_{33}^{E}, \\ &a_{31} = e_{33}^{T} - \lambda^2 e_{15}^{T},\quad a_{32} = \lambda^2 \varepsilon_{11}^{s,T} - \varepsilon_{33}^{s,T},\quad a_{33} = g_3^{s}, \\ &b_1 = \lambda^2 c_{11}^{E,T} - c_{44}^{E,T},\quad b_2 = \lambda^2\left(c_{44}^{E,T} + c_{13}^{E,T}\right),\quad b_3 = \lambda^2\left(e_{15}^{T} + e_{31}^{T}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

При этом потенциальная функция ϕ удовлетворяет уравнению (3).

Относительно уравнений состояния (4) сделаем следующие замечания. Для этих уравнений не учтены незначительные магнитные эффекты, сопровождающие процесс деформирования. В приведенной выше форме записи уравнений пьезоэффекта предполагается, что направление вектора предварительной поляризации в каждой точке тела совпадает с направлением $0z$ декартовой системы координат. Если же направление поляризации меняется от точки к точке внутри тела, то приведенные уравнения следует рассматривать как локальные уравнения состояния с совмещенными направлениями поляризации оси $0z$. В этом случае коэффициенты в уравнениях (4) будут переменными функциями координат.

Однако, если внешнее электростатическое поле предварительной поляризации обладает определенным характером симметрии, то удается записать уравнения состояния с постоянными коэффициентами по всему объему тела в криволинейных координатах, подобранных соответствующим образом.

Приведем уравнения состояния (4) в цилиндрических и сферических координатах с постоянными коэффициентами для типичных случаев поляризации керамики [10]:

б) цилиндрические координаты $r,\ z,\ \varphi\ \left(x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi\right)$

1) поляризация вдоль оси $0z$ (осевая поляризация)

$$
\begin{aligned}
\sigma_r &= c_{11}^{E,T}\varepsilon_r + c_{12}^{E,T}\varepsilon_\varphi + c_{13}^{E,T}\varepsilon_z - e_{13}^{T}E_z - \gamma_{11}^{E}T \\
\sigma_\varphi &= c_{11}^{E,T}\varepsilon_r + c_{11}^{E,T}\varepsilon_\varphi + c_{13}^{E,T}\varepsilon_z - e_{13}^{T}E_z - \gamma_{11}^{E}T \\
\sigma_z &= c_{13}^{E,T}\left(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi\right) + c_{33}^{E,T}\varepsilon_z - e_{33}^{T}E_z - \gamma_{33}^{E}T \\
\tau_{r\varphi} &= \frac{1}{2}\left(c_{11}^{E,T} - c_{12}^{E,T}\right)\gamma_{r\varphi} \\
\tau_{\varphi z} &= c_{44}^{E,T}\gamma_{\varphi z} - e_{15}^{T}E_\varphi \\
\tau_{zr} &= c_{44}^{E,T}\gamma_{zr} - e_{15}^{T}E_r \\
D_r &= \varepsilon_{11}^{s,T}E_r + e_{15}^{T}\gamma_{rz} \\
D_\varphi &= \varepsilon_{11}^{s,T}E_\varphi + e_{15}^{T}\gamma_{\varphi z} \\
D_z &= \varepsilon_{33}^{s,T}E_z + e_{13}^{T}\left(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi\right) + e_{33}^{T}\varepsilon_z + g_3^{s}T
\end{aligned}
\tag{19}
$$

2) поляризация вдоль оси $0r$ (радиальная поляризация)

$$
\begin{aligned}
\sigma_r &= c_{33}^{E,T}\varepsilon_r + c_{13}^{E,T}\left(\varepsilon_\varphi + \varepsilon_z\right) - e_{33}^{T}E_r - \gamma_{33}^{E}T \\
\sigma_\varphi &= c_{13}^{E,T}\varepsilon_r + c_{11}^{E,T}\varepsilon_\varphi + c_{12}^{E,T}\varepsilon_z - e_{13}^{T}E_r - \gamma_{11}^{E}T \\
\sigma_z &= c_{13}^{E,T}\varepsilon_r + c_{12}^{E,T}\varepsilon_\varphi + c_{11}^{E,T}\varepsilon_z - e_{13}^{T}E_r - \gamma_{11}^{E}T \\
\tau_{r\varphi} &= c_{44}^{E,T}\gamma_{r\varphi} - e_{15}^{T}E_\varphi \\
\tau_{\varphi z} &= \frac{1}{2}\left(c_{11}^{E,T} - c_{12}^{E,T}\right)\gamma_{\varphi z} \\
\tau_{zr} &= c_{44}^{E,T}\gamma_{zr} - e_{15}^{T}E_z \\
D_r &= \varepsilon_{33}^{s,T}E_r + e_{13}^{T}\left(\varepsilon_\varphi + \varepsilon_z\right) + e_{33}^{T}\varepsilon_r + g_3^{s}T \\
D_\varphi &= \varepsilon_{11}^{s,T}E_\varphi + e_{15}^{T}\gamma_{\varphi r} \\
D_z &= \varepsilon_{11}^{s,T}E_z + e_{15}^{T}\gamma_{zr}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

3) поляризация вдоль оси φ (окружная поляризация)

$$
\begin{aligned}
&\sigma_r = c_{11}^{E,T}\varepsilon_r + c_{13}^{E,T}\varepsilon_\varphi + c_{12}^{E,T}\varepsilon_z - e_{13}^{T}E_\varphi - \gamma_{11}^{E}T\\
&\sigma_\varphi = c_{13}^{E,T}\left(\varepsilon_r + \varepsilon_z\right) + c_{33}^{E,T}\varepsilon_\varphi - e_{33}^{T}E_\varphi - \gamma_{33}^{E}T\\
&\sigma_z = c_{12}^{E,T}\varepsilon_r + c_{13}^{E,T}\varepsilon_\varphi + c_{11}^{E,T}\varepsilon_z - e_{13}^{T}E_\varphi - \gamma_{11}^{E}T\\
&\tau_{r\varphi} = c_{44}^{E,T}\gamma_{r\varphi} - e_{15}^{T}E_r\\
&\tau_{\varphi z} = c_{44}^{E,T}\gamma_{\varphi z} - e_{15}^{T}E_z\\
&\tau_{zr} = \frac{1}{2}\left(c_{11}^{E,T} - c_{12}^{E,T}\right)\gamma_{rz}\\
&D_r = \varepsilon_{11}^{s,T}E_r + e_{15}^{T}\gamma_{r\varphi}\\
&D_\varphi = \varepsilon_{33}^{s,T}E_\varphi + e_{13}^{T}\left(\varepsilon_r + \varepsilon_z\right) + e_{33}^{T}\varepsilon_\varphi + g_3^{s}T\\
&D_z = \varepsilon_{11}^{s,T}E_z + e_{15}^{T}\gamma_{z\varphi}
\end{aligned}
\qquad (21)
$$

в) сферические координаты

$$
r,\theta,\varphi\ \left(x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta\right)
$$

Радиальная поляризация

$$
\begin{aligned}
&\sigma_r = c_{33}^{E,T}\varepsilon_r + c_{13}^{E,T}\left(\varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi\right) - e_{33}^{T}E_r - \gamma_{33}^{E}T\\
&\sigma_\theta = c_{13}^{E,T}\varepsilon_r + c_{11}^{E,T}\varepsilon_\theta + c_{12}^{E,T}\varepsilon_\varphi - e_{13}^{T}E_r - \gamma_{11}^{E}T\\
&\sigma_\varphi = c_{13}^{E,T}\varepsilon_r + c_{12}^{E,T}\varepsilon_\theta + c_{11}^{E,T}\varepsilon_\varphi - e_{13}^{T}E_r - \gamma_{11}^{E}T\\
&\tau_{r\theta} = c_{44}^{E,T}\gamma_{r\theta} - e_{15}^{T}E_\theta\\
&\tau_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}\left(c_{11}^{E,T} - c_{12}^{E,T}\right)\gamma_{\theta\varphi}\\
&\tau_{\varphi r} = c_{44}^{E,T}\gamma_{\varphi r} - e_{15}^{T}E_\varphi\\
&D_r = \varepsilon_{33}^{s,T}E_r + e_{13}^{T}\left(\varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi\right) + e_{33}^{T}\varepsilon_z - g_3^{s}T\\
&D_\theta = \varepsilon_{11}^{s,T}E_\theta + e_{15}^{T}\gamma_{\theta r}\\
&D_\varphi = \varepsilon_{11}^{s,T}E_\varphi + e_{15}^{T}\gamma_{\varphi r}
\end{aligned}
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 160с.
2. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электроупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472с.
3. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. Киев.: Наукова Думка, 1989. 279с.
4. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях //Физическая акустика/. Под. ред. У. Мезона. М.: Мир. 1996. Том 1. Ч. А. С. 204-326.
5. Holland R. Eer Nisse E. Design of resonant piezoelectric devices // Cambridge: MIT. Press. 1969. 257p.
6. Tiersten H.F. Linear piezoelectric plate vibrations. New York: Plenum press. 1969. 211p.
7. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука. 1976. 616с.
8. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд. АН СССР, 1962. 364с.
9. Уздалов А.И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Саратов: Изд. Сарат. ун-та, 1967. 167с.
10. Кудрявцев Б.А., Механика пьезоэлектрических материалов – М.Д.Т. (ВИНИТИ. 1978г. 11. С.5-66).
11. Goodier J.N. On the Integration of the Thermoelastic Equations. Phil. Maq. 7. 23. 1937.

Ереванский государственный
Университет Архитектуры и Строительства

Поступила в редакцию
26.02.2004