

УДК 539.3

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА С ЧАСТИЧНО ЭЛЕКТРОДИРОВАННЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ТУННЕЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Бардзокас Д.И., Фильштинский М.Л.

Գ.Ի. Բարձոկաս, Մ.Լ. Ֆիլշտինսկի

Մասամբ էլեկտրոդավորված անցքով և բունելային ճարով պլեզոկերամիկ տարածության էլեկտրական զրգոտմ

Գիտարկվում է էլեկտրոստատիկականության հակահարթ խառը եզրային խնդիր անցքի և ճարի տեսքով բունելային անհամասեռություններով պլեզոկերամիկ տարածության տատանումների մասին: Էլեկտրական դաշտի զրգոտմը տեղի է ունենում էլեկտրական պոտենցիալների տարբերության հաշվին, որոնք հաղորդվում են լարումներից ազատ անցքի մակերևույթի վրա տեղավորված էլեկտրոդների համակարգին: Ճարի ծայրակետերում սահրի լարումների ուժգնության գործակիցների համար ստացված է բանաձև և բվային վերլուծության միջոցով բացահայտված են բնութագրիչ մեծությունների փոփոխման օրինաչափությունները:

D.Bardzokas, M.L. Filshinsky

Electric excitation of a piezoceramic space with a partially electroded opening and tunnel crack

Рассматривается антиплоская смешанная граничная задача электроупругости о колебаниях пьезокерамического пространства с туннельными однородностями. Получена формула для коэффициента интенсивности сдвиговых напряжений в вершинах трещины и посредством численного анализа выяснены закономерность изменения характерных величин.

1. Введение

Многие актуальные научные и технологические проблемы современной инженерии связаны с исследованиями процессов распространения волн в пьезоэлектриках и с определением динамической прочности в окрестности различных типов неоднородностей. Решение возникающих в этом случае сложных проблем требует применения современных математических средств и методов, в частности, методов динамической теории упругости. Развитие этих методов отражено в монографиях [1-6], которые появились в последние десятилетия.

В пьезоэлектрических средах с неоднородностями взаимодействие электрических и механических полей может приводиться к электрическому, механическому или смешанному электромеханическому разрушению. Края электродов являются источниками концентрации компонентов электроупругого поля, и следовательно, в этих областях возможно зарождение микротрещин или развитие пробоя [7]. Некоторые аспекты механики разрушения пьезокерамических тел рассмотрены в [8,9].

В предположении, что электроды невесомы и имеют пренебрежимо малую жесткость, были рассмотрены многие статические и динамические граничные задачи электроупругости для пьезоэлектриков с поверхностными электродами [6,10-11]. При этом, в основном, изучались случаи, когда расположение электродов на поверхности тела имеет либо периодический (бесконечное число электродов), либо симметричный характер, что позволяло применять для решения задач эффективные в этих случаях методы рядов и интегральных преобразований.

Подход, опирающийся на метод граничных интегральных уравнений, к исследованию гармонических колебаний бесконечного пьезокерамического цилиндра, возбуждаемого произвольной системой электродов, был предложен в [12]. При помощи специальных интегральных представлений решений антиплоская граничная задача электроупругости была сведена к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений с разрывными ядрами. Для ее решения была разработана модифицированная схема метода квадратур. Указанным подходом были рассмотрены антиплоские задачи электроупругости о гармонических колебаниях пьезокерамической среды с туннельным вдоль оси симметрии материала отверстием [13,14]. Нестационарная динамическая задача о возбуждении сдвиговых волн в пьезосреде с электродированной полостью электрическим импульсом рассмотрена в [15]. Дифракция волны сдвига на туннельных полостях, трещинах и цилиндрических включениях в пьезокерамическом полупространстве и полуслое методом сингулярных интегральных уравнений исследовалась в [16-19]. Статические и динамические антиплоские задачи электроупругости для крутового цилиндра с одним и двумя симметрично расположенными электродами методом рядов изучались в [6]. Колебания бесконечных пьезокерамических цилиндров с дефектами типа туннельных трещин и линейных включений (стрингеров) в условиях прямого пьезоэлектрического эффекта рассматривались в [13].

В данной статье рассматривается антиплоская смешанная граничная задача электроупругости о колебаниях пьезокерамического пространства с туннельными неоднородностями типа отверстия и трещины. Возбуждение электроупругого поля происходит за счет разностей электрических потенциалов, подаваемых на систему электродов, расположенных на свободной от напряжений поверхности отверстия. Даются корректные интегральные представления решений, с учетом которых граничная задача сводится к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений второго рода с разрывными ядрами. Получена формула для коэффициента интенсивности сдвиговых напряжений в вершинах трещины. Приводятся результаты численной реализации алгоритма, характеризующие поведение компонентов электроупругого поля в области и на границе кусочно-однородного пространства в условиях обратного пьезоэлектрического эффекта.

2. Постановка задачи

Рассмотрим отнесенное к декартовой системе координат Ox_1, x_2, x_3 пьезокерамическое пространство, содержащее туннельные вдоль оси x_3 отверстие и криволинейную трещину L . На свободной от механических усилий поверхности отверстия располагаются $2n$ бесконечно длинных в направлении оси x_3 тонких электродов с заданными разностями электрического потенциала. Незлектродированные участки поверхности отверстия сопряжены с вакуумом (воздухом). Границы k -го электрода определены величинами β_{2k-1} и β_{2k} ($k = \overline{1, 2n}$), а электрический потенциал на нем задан величиной $\phi_k^* = \text{Re}(\Phi_k^* e^{-i\omega t})$ (ω – круговая частота, t – время).

Предполагается, что кривизны контуров L и C являются функциями класса Гельдера [20], а электроды – идеально проводящие и абсолютно гибкие. Взаимное расположение неоднородностей, их конфигурации, а

также расположение поверхностных электродов не могут быть вполне произвольными: налагаемые на них требования будут указаны ниже.

В данных условиях в кусочно-однородном пространстве имеет место электроупругое поле, соответствующее состоянию антиплоской деформации [6]. Полная система дифференциальных уравнений в квазистатическом приближении включает следующие соотношения: уравнение движения

$$\partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.1)$$

материальные уравнения среды

$$\sigma_{m3} = c_{44}^E \partial_m u_3 - e_{15} E_m, \quad D_m = e_{15} \partial_m u_3 + \varepsilon_{11}^E E_m \quad (m=1,2) \quad (2.2)$$

и уравнения электростатики

$$\operatorname{div} D = 0, \quad E = -\operatorname{grad} \phi \quad (2.3)$$

В (2.1)–(2.3) σ_{m3} ($m=1,2$) – компоненты тензора напряжения, u_3 – компонента вектора упругого перемещения в направлении, параллельном оси x_3 ; E и D – векторы напряженности и индукции электрического поля; ϕ – электрический потенциал; c_{44}^E , e_{15} и ε_{11}^E – модуль сдвига, измеренный при постоянном значении электрического поля, пьезоэлектрическая константа и диэлектрическая проницаемость, измеренная при фиксированных деформациях, соответственно; ρ – массовая плотность материала.

Систему уравнений (2.1)–(2.3) сведем к дифференциальным уравнениям относительно перемещения u_3 и электрического потенциала ϕ :

$$c_{44}^E \nabla^2 u_3 + e_{15} \nabla^2 \phi = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad e_{15} \nabla^2 u_3 - \varepsilon_{11}^E \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.4)$$

Из (2.4) следуют соотношения

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_3 - c^{-2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= 0, \quad \nabla^2 F = 0 \\ \phi &= \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^E} u_3 + F, \quad c = \sqrt{\frac{c_{44}^E (1 + k_{15}^2)}{\rho}}, \quad k_{15} = \frac{e_{15}}{\sqrt{c_{44}^E \varepsilon_{11}^E}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где c – скорость волны сдвига в пьезокерамической среде, k_{15} – коэффициент электромеханической связи [5].

Механические и электрические величины при учете (2.2), (2.3) и (2.5) можно выразить через функции u_3 и F по формулам [13]

$$\sigma_{13} - i\sigma_{23} = 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[c_{44}^E (1 + k_{15}^2) u_3 + e_{15} F \right] \quad (2.6)$$

$$D_1 - iD_2 = -2 \varepsilon_{11}^E \frac{\partial F}{\partial z}, \quad E_1 - iE_2 = -2 \frac{\partial}{\partial z} \left(F + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^E} u_3 \right), \quad z = x_1 + ix_2$$

Полагая $u_3 = \operatorname{Re}(U_3 e^{-i\omega t})$, $\phi = \operatorname{Re}(\Phi e^{-i\omega t})$ и $F = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} F^*)$, запишем уравнения (2.5) относительно амплитудных величин:

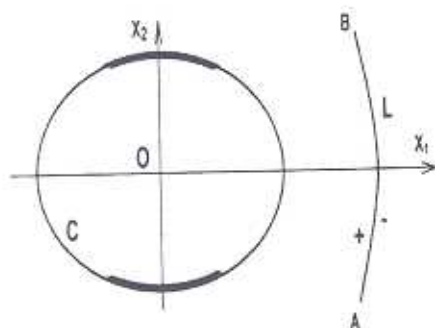
$$\nabla^2 U_3 + \gamma^2 U_3 = 0, \quad \nabla^2 F^* = 0, \quad \Phi = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} U_3 + F^*, \quad \gamma = \frac{\omega}{c} \quad (2.7)$$

где γ — волновое число.

Считая, что берега трещины свободны от механических напряжений, представим механические и электрические граничные условия на контуре L следующим образом [6]:

$$(\sigma_{13} \cos \psi + \sigma_{23} \sin \psi)^{\pm} = 0 \quad (2.8)$$

$$E_3^+ = E_3^-, \quad D_n^+ = D_n^- \quad (2.9)$$



Фиг. 1. Среда с частично электродированным отверстием и криволинейной трещиной.

Здесь E_3 и D_n представляют собой касательную компоненту вектора электрической напряженности и нормальную компоненту вектора электрической индукции соответственно; ψ — угол между нормалью к левому берегу L и осью Ox_1 ; знаки «плюс» и «минус» относятся к левому и правому берегам разреза при движении от его начала a к концу b (фиг.1). Условия (2.9) выражают то обстоятельство, что соответствующие компоненты электрического поля не претерпевают

скачков при переходе через разрез L .

С учетом представлений (2.5), (2.6) граничные условия на поверхностях отверстия и трещины можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial n} \{c_{44}^E (1 + k_{15}^2) U_3 + e_{15} F^*\} = 0 \text{ на } C$$

$$F^* + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} U_3 = \Phi^*(\zeta^*), \quad \zeta^* \in C_\phi, \quad D_n^* = -\varepsilon_{11} \frac{\partial F^*}{\partial n} = 0 \text{ на } C \setminus C_\phi \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \{c_{44}^E (1 + k_{15}^2) U_3 + e_{15} F^*\}^{\pm} = 0 \text{ на } L$$

где C_ϕ — часть контура C , соответствующая электродированной поверхности отверстия; оператор $\partial/\partial n$ обозначает производную по нормали к граничному контуру.

Таким образом, задача заключается в определении функций U_3 и F^* из уравнений (2.7), граничных условий (2.10) и электрических условий (2.9) на L .

3. Сведение граничной задачи электроупругости к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений

Следуя [13], представим амплитуды искомых функций в виде

$$U_3(z) = \int_C p(\zeta^*) H_0^{(1)}(\gamma r_1) ds - \frac{i}{4} \int_L [U_3] \frac{\partial H_0^{(1)}(\gamma r)}{\partial n_\zeta} ds$$

$$F^*(z) = \int_C f(\zeta^*) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \ln r_1 ds + \frac{e_{15}}{2\pi \varepsilon_{11}^c} \int_L \left[\frac{dU_3}{ds} \right] \arg(z - \zeta) ds \quad (3.1)$$

$$r = |z - \zeta|, \quad r_1 = |\zeta^* - z|, \quad \zeta \in L, \quad \zeta \in C$$

Здесь $H_\nu^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля первого рода порядка ν , ds — элемент длины дуги контура, по которому производится интегрирование.

Интегральные представления (3.1) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (2.7), обеспечивают наличие скачка перемещения и непрерывность вектора напряжения на L , а также автоматическое выполнение электрических условий (2.9).

Подставляя предельные значения функций (3.1) и их производных при $z \rightarrow \zeta_0 \in L$ и $z \rightarrow \zeta_0^* \in C$ в граничные условия (2.10), приходим к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений второго рода

$$2ip(\zeta_0^*) + \int_C p(\zeta^*) g_1(\zeta^*, \zeta_0^*) ds + \int_C f'(\zeta^*) g_2(\zeta^*, \zeta_0^*) ds +$$

$$+ \int_L \left[\frac{dU_3}{ds} \right] g_3(\zeta, \zeta_0^*) ds + \int_L [U_3] g_4(\zeta, \zeta_0^*) ds = 0$$

$$- \pi f(\zeta_0^*) + \int_C p(\zeta^*) g_5(\zeta^*, \zeta_0^*) ds + \int_C f(\zeta^*) g_6(\zeta^*, \zeta_0^*) ds +$$

$$+ \int_C \left[\frac{dU_3}{ds} \right] g_7(\zeta, \zeta_0^*) ds + \int_C [U_3] g_8(\zeta, \zeta_0^*) ds = \Phi^*(\zeta_0^*), \quad \zeta_0^* \in C_0 \quad (3.2)$$

$$\int_C f'(\zeta^*) g_9(\zeta^*, \zeta_0^*) ds + \int_L \left[\frac{dU_3}{ds} \right] g_{10}(\zeta, \zeta_0^*) ds = 0, \quad \zeta_0^* \in C \setminus C_0$$

$$\int_C p(\zeta^*) g_{11}(\zeta^*, \zeta_0) ds + \int_C f'(\zeta^*) g_{12}(\zeta^*, \zeta_0) ds + \int_L \left[\frac{dU_3}{ds} \right] g_{13}(\zeta, \zeta_0) ds +$$

$$+ \int_L [U_3] g_{14}(\zeta, \zeta_0) ds = 0$$

в которой ядра g_m ($m=1,14$) определяются следующими выражениями:

$$g_1(\zeta^*, \zeta_0^*) = \frac{2}{\pi i} \operatorname{Re} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^* - \zeta_0^*} + \gamma H_1(\gamma r_{10}) \cos(\psi_{10} - \alpha_{10})$$

$$g_2(\zeta^*, \zeta_0^*) = \frac{e_{15}}{c_{44}^c (1 + k_{15}^2)} \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^* - \zeta_0^*}, \quad g_3(\zeta, \zeta_0^*) = \frac{1}{2\pi(1 + k_{15}^2)} \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta - \zeta_0^*}$$

$$g_4(\zeta, \zeta_0^*) = \frac{i\gamma^2}{8} \left[H_2(\gamma r_{20}) \cos(\psi + \psi_{10} - 2\alpha_{20}) - H_0^{(1)}(\gamma r_{20}) \cos(\psi - \psi_{10}) \right]$$

$$\begin{aligned}
g_5(\zeta^*, \zeta_0^*) &= \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^e} H_0^{(1)}(\gamma r_{10}), \quad g_6(\zeta^*, \zeta_0^*) = \operatorname{Re} \frac{e^{i\psi_1}}{\zeta^* - \zeta_0^*} \\
g_7(\zeta, \zeta_0) &= \frac{e_{15}}{2\pi \varepsilon_{11}^e} \alpha_{20}, \quad g_8(\zeta, \zeta_0) = -\frac{ie_{15}}{4 \varepsilon_{11}^e} \gamma H_1^{(1)}(\gamma r_{20}) \cos(\psi - \alpha_{20}) \\
g_9(\zeta^*, \zeta_0^*) &= \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^* - \zeta_0^*}, \quad g_{10}(\zeta, \zeta_0) = -\frac{e_{15}}{2\pi \varepsilon_{11}^e} \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta - \zeta_0} \\
g_{11}(\zeta^*, \zeta_0^*) &= \frac{2}{\pi i} \operatorname{Re} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^* - \zeta_0^*} + \gamma H_1(\gamma r_{30}) \cos(\psi_0 - \alpha_{30}) \\
g_{12}(\zeta^*, \zeta_0^*) &= \frac{e_{15}}{c_{44}^e (1 + k_{15}^2)} \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^* - \zeta_0^*}, \quad g_{13}(\zeta, \zeta_0) = \frac{1}{2\pi(1 + k_{15}^2)} \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta - \zeta_0} \\
g_{14}(\zeta, \zeta_0) &= \frac{i\gamma^2}{8} [H_2(\gamma r_0) \cos(\psi + \psi_0 - 2\alpha_0) - H_0^{(1)}(\gamma r_0) \cos(\psi - \psi_0)] \\
H_1(x) &= \frac{2i}{\pi x} + H_1^{(1)}(x), \quad H_2(x) = \frac{4i}{\pi x^2} + H_2^{(1)}(x) \\
r_0 &= |\zeta_0 - \zeta|, \quad \alpha_0 = \arg(\zeta_0 - \zeta), \quad r_{10} = |\zeta^* - \zeta_0^*|, \quad \alpha_{10} = \arg(\zeta^* - \zeta_0^*) \\
r_{20} &= |\zeta_0^* - \zeta|, \quad \alpha_{20} = \arg(\zeta_0^* - \zeta), \quad r_{30} = |\zeta^* - \zeta_0|, \quad \alpha_{30} = \arg(\zeta^* - \zeta_0) \\
\psi &= \psi(\zeta), \quad \psi_1 = \psi(\zeta^*), \quad \psi_0 = \psi(\zeta_0), \quad \psi_{10} = \psi(\zeta_0^*), \quad \zeta, \zeta_0 \in L, \quad \zeta^*, \zeta_0^* \in C
\end{aligned}$$

Здесь ψ и ψ_1 — углы между нормальными к контурам L и C и осью Ox_1 соответственно; $\Phi(\zeta_0^*)$ — кусочно-постоянная функция, задающая значения амплитуд электрических потенциалов на электродах.

Для однозначной разрешимости системы (3.2) в классе функций с производными, неограниченными вблизи концов трещины L [20], ее необходимо рассматривать в совокупности с дополнительным условием

$$\int_L \left[\frac{dU_3}{ds} \right] ds = 0 \quad (3.3)$$

выражающим равенство нулю скачков перемещения в вершинах L . Кроме того, условие (3.3) обеспечивает однозначность интегрального представления функции $F^*(z)$ в (3.1).

Необходимо отметить, что, поскольку возникающие в процессе колебаний отраженные от трещины электроупругие волны превносят дополнительные заряды на парные (питаемые от отдельного генератора) электроды, расположение последних, а также взаимное расположение отверстия и трещины и их конфигурации должны быть таковыми, чтобы эти дополнительные заряды (по абсолютной величине) были одинаковыми. В противном случае система (3.2) становится неразрешимой.

Определив функции $[U_3]$, $p(\zeta^*)$ и $f(\zeta^*)$ из системы (3.2), по формулам (2.5), (2.6) с использованием представлений (3.1) можно

определить все компоненты электроупругого поля в кусочно-однородном пространстве.

Вводя параметризацию контура C с помощью равенств $\zeta^* = \zeta^*(\beta)$, $\zeta_0^* = \zeta^*(\beta_0)$ ($0 \leq \beta, \beta_0 \leq 2\pi$), найдем выражение для амплитуды плотности распределения электрических зарядов $q_k(\beta)$ на k -м электроде. Принимая во внимание то, что отверстие сопряжено с вакуумом, запишем

$$q_k(\beta) = D_n^{(k)*}(\beta), \quad \beta_{2k-1} < \beta < \beta_{2k} \quad (3.4)$$

Здесь $D_n^{(k)*}(\beta)$ представляет собой амплитуду нормальной компоненты вектора электрической индукции на участке поверхности отверстия, покрытом k -м электродом. Привлекая интегральное представление (3.1) для функции $F^*(z)$, с учетом равенств (3.4), (2.6) находим

$$q_k(\beta_0) = -\varepsilon_{11} \int_C f'(\zeta^*) \operatorname{Im} \frac{e^{i\eta\beta_0}}{\zeta^* - \zeta_0^*} ds, \quad \zeta_0^* \in C_{\beta_0} \quad (3.5)$$

где C_{β_0} — часть контура C , на которой расположен k -й электрод.

Интегрируя выражение (3.5) по переменной β_0 в пределах от β_{2k-1} до β_{2k} , получим амплитудное значение суммарного заряда Q_k k -го электрода, отнесенное к единице его длины. Ток, протекающий через данный электрод и равный току проводимости в цепи генератора, можно определить по формуле

$$I_k(t) = \operatorname{Re} \left\{ i\omega e^{-i\omega t} \int_{\beta_{2k-1}}^{\beta_{2k}} q_k(\beta_0) s'(\beta_0) d\beta_0 \right\}, \quad s'(\beta_0) = \frac{ds}{d\beta_0} \quad (3.6)$$

Отметим, что в случае антиплоской деформации напряжения продольного сдвига на свободной от механической нагрузки поверхности не имеют особенности на краях электродов [7]. Вместе с тем, компоненты вектора электрической индукции обладают особенностями корневого типа на краях электродов, что непосредственно следует из асимптотического анализа сингулярных интегральных уравнений (3.2) и выражений (3.4), (3.5).

4. Коэффициент интенсивности напряжений в вершинах трещины

Для определения коэффициента интенсивности напряжений K_{III} [21] получим главную асимптотику сдвигового напряжения на продолжении за вершину трещины. При этом будем исходить из формул, определяющих поведение интегралов типа Коши в окрестности концов L в том случае, когда плотность имеет степенную особенность [20]:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tau(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} \frac{e^{\sigma z} \tau_0(a)(z-a)^{-\sigma}}{2i \sin \pi \sigma} + \Lambda_1(z), & z \in O(a) \\ -\frac{e^{-\sigma z} \tau_0(b)(z-b)^{-\sigma}}{2i \sin \pi \sigma} + \Lambda_2(z), & z \in O(b) \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\tau(\zeta) = \frac{\tau_0(\zeta)}{(z-c)^\sigma}, \quad \sigma = k_1 + ik_2, \quad 0 \leq k_1 \leq 1$$

Для функции $\Lambda_m(z)$ имеют место соотношения

$$\lim_{z \rightarrow a} \Lambda_1(z)(z-a)^\sigma = 0, \quad \lim_{z \rightarrow b} \Lambda_2(z)(z-b)^\sigma = 0.$$

Из асимптотического анализа последнего в (3.2) сингулярного интегродифференциального уравнения в окрестности вершины L следует, что $\sigma = 1/2$. Поэтому, введя параметризацию контура трещины $\zeta = \zeta(\delta)$, можно положить

$$\left[\frac{dU_3}{ds} \right] = \frac{\Omega_0(\delta)}{s'(\delta)\sqrt{1-\delta^2}}, \quad s'(\delta) = \frac{ds}{d\delta} > 0, \quad -1 \leq \delta \leq 1 \quad (4.2)$$

где функция $\Omega_0(\delta)$ является непрерывной по Гельдеру.

Имеем (оставляя лишь члены, дающие вклад в асимптотику)

$$\sigma_n = \operatorname{Re}(S_n e^{-i\omega t}), \quad S_n = c_{44}^E \frac{\partial U_3}{\partial n} + \dots = c_{44}^E \left[e^{i\psi_c} \frac{\partial U_3}{\partial z} + e^{-i\psi_c} \frac{\partial U_3}{\partial z} \right] + \dots \quad (4.3)$$

где c — вершина разреза, $\psi_c = \psi(c)$.

На основании (3.1) выпишем главную часть функции (4.3):

$$S_n^0 = \frac{c_{44}^E}{2\pi} \int_L \left[\frac{dU_3}{ds} \right] \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_c}}{\zeta - z} ds \quad (4.4)$$

Используя асимптотические формулы (4.1), с учетом (4.2) находим

$$S_n^0 = \pm c_{44}^E \frac{\Omega_0(\pm 1)}{2\sqrt{2r^* s'(\pm 1)}}, \quad s'(\pm 1) = \left. \frac{ds}{d\delta} \right|_{\delta=\pm 1} \quad (4.5)$$

Здесь $r^* = |z - c|$, нижний знак относится к вершине $c = 0$, верхний — к $c = b$.

Исходя из (4.5), находим коэффициент интенсивности напряжений

$$K_{III}^z = \lim_{r^* \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r^*} \sigma_n^0 = \pm \frac{c_{44}^E}{2} \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} [\Omega_0(\pm 1) e^{-i\omega t}] \quad (4.6)$$

Асимптотика нормальной составляющей вектора электрической индукции на продолжении за вершину разреза такова:

$$D_n = D_1 \cos \psi(\pm 1) + D_2 \sin \psi(\pm 1) = \pm e_{15} \frac{\operatorname{Re} [\Omega_0(\pm 1) e^{-i\omega t}]}{2\sqrt{2r^* s'(\pm 1)}} \quad (4.7)$$

Остальные электрические величины в окрестности L ограничены. В самом деле, из уравнений состояния (2.2) имеем

$$\sigma_n = c_{44}^E \frac{\partial u_3}{\partial n} - e_{15} E_n, \quad D_n = e_{15} \frac{\partial u_3}{\partial n} + \varepsilon_{11}^E E_n \quad (4.8)$$

где D_n — нормальная компонента электрической индукции на дуге L' , как угодно близкой к L . Поскольку $[\sigma_n] = [D_n] = 0$ и определитель системы (4.8) отличен от нуля, находим $[\partial u_3 / \partial n] = [E_n] = 0$. Таким образом, вектор электрической напряженности E непрерывно продолжим через разрез.

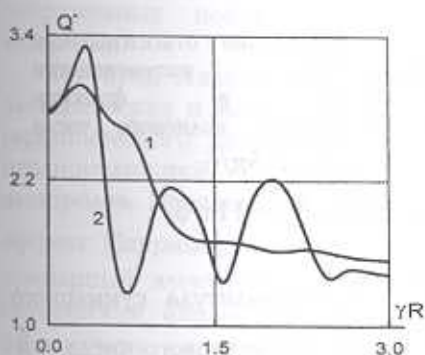
5. Численные результаты

Рассмотрим пьезокерамическое пространство (материал-PZT-4 [22]), содержащее отверстие эллиптического поперечного сечения и трещину, контур которой представляет собой параболу. Допустим, что возбуждение пространства осуществляется двумя электродами с разностью амплитуд потенциалов $2\Phi^*$. Параметрические уравнения контуров L и C соответственно имеют вид

$$\begin{aligned}\zeta &= \delta e^{i\theta} (p_1 + ip_2 \delta) + h, \quad \delta \in [-1.1] \\ \zeta^* &= R_1 \cos \beta + iR_2 \sin \beta, \quad \beta \in [0, 2\pi]\end{aligned}\quad (5.1)$$

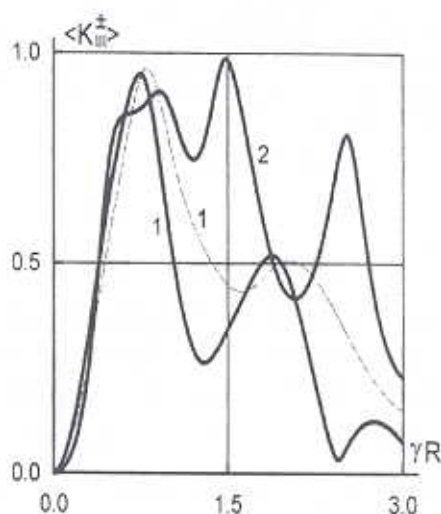
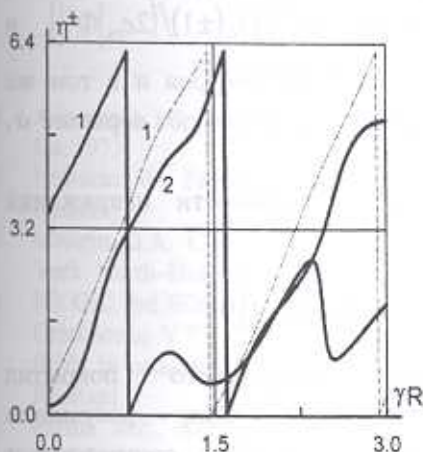
где θ — угол, характеризующий ориентацию трещины в пространстве.

Решение системы интегродифференциальных уравнений (3.2) совместно с (3.3) с учетом (5.1) проводилось по специальной схеме метода квадратур [13].



Фиг. 2. Изменение относительного суммарного электрического заряда на электроде в функции нормализованного волнового числа

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 5\pi/14, \quad \beta_2 = 9\pi/14, \\ \beta_3 &= 19\pi/14, \quad \beta_4 = 23\pi/14\end{aligned}$$

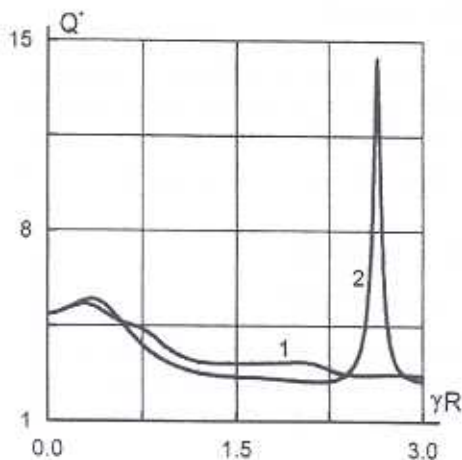


Фиг. 3. Изменение относительного коэффициента интенсивности напряжений в функции нормализованного волнового числа

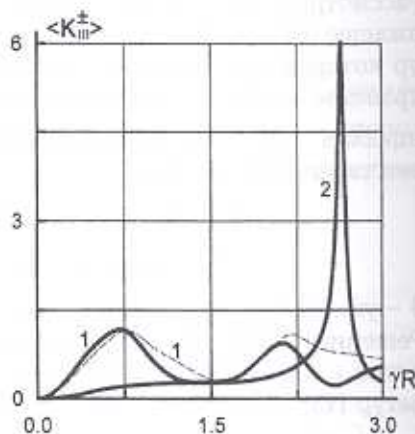
$$\begin{aligned}\beta_1 &= 5\pi/14, \quad \beta_2 = 9\pi/14, \\ \beta_3 &= 19\pi/14, \quad \beta_4 = 23\pi/14\end{aligned}$$

Фиг. 4. Изменение величины $\eta^{\pm} = \arg(\Omega_0(\pm 1))$ в функции нормализованного волнового числа

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 5\pi/14, \quad \beta_2 = 9\pi/14, \\ \beta_3 &= 19\pi/14, \quad \beta_4 = 23\pi/14.\end{aligned}$$



Фиг. 5. Изменение относительного суммарного электрического заряда на электроде в функции нормализованного волнового числа $\beta_1 = \pi/6$, $\beta_2 = 6$, $\beta_3 = 7\pi/6$, $\beta_4 = 11\pi/6$.



Фиг. 6. Изменение относительного коэффициента интенсивности напряжений в функции нормализованного волнового числа $\beta_1 = \pi/6$, $\beta_2 = 5\pi/6$, $\beta_3 = 7\pi/6$, $\beta_4 = 11\pi/6$.

Поведение величины $Q^* = |Q / (\varepsilon_{11}^e \Phi^*)|$ (Q — амплитуда суммарного заряда на электроде) в функции нормализованного волнового числа γR представлено на фиг. 2. Кривая 1 построена для значений параметров $R_1/R_2 = 1$, $p_1/R_1 = 1$, $p_2/R_1 = 0$, $h/R_1 = 3$, $\vartheta = 0$, $\beta_1 = 5\pi/14$, $\beta_2 = 9\pi/14$, $\beta_3 = 19\pi/14$, $\beta_4 = 23\pi/14$; кривая 2 — для тех значений, кроме $p_1/R_1 = 3$, $\vartheta = \pi/2$ ($R = 0.5(R_1 + R_2)$, $2l$ — длина разреза).

На фиг. 3 и 4 приведены зависимости относительного коэффициента интенсивности напряжений $(K_{III}^{\pm}) = c_{44}^E \sqrt{\pi l / s'(\pm 1)} \Omega_0(\pm 1) / (2e_{15} |\Phi^*|)$ и $\eta^{\pm} = \arg(\Omega_0(\pm 1))$ от γR для тех же значений параметров и в том же соответствии, что и на фиг. 2. Сплошные линии соответствуют вершине a , штриховые — вершине b .

Зная величину (K_{III}^{\pm}) , коэффициент интенсивности напряжений можно определить по формуле

$$K_{III}^{\pm} = \pm \frac{e_{15} |\Phi^*|}{\sqrt{l}} (K_{III}^{\pm}) \cos(\omega t - \arg \Omega_0(\pm 1))$$

Для случая большей площади электродного покрытия ($\beta_1 = \pi/6$, $\beta_2 = 5\pi/6$, $\beta_3 = 7\pi/6$, $\beta_4 = 11\pi/6$) аналогичные результаты расчета представлены на фиг. 5–6. Кривые 1 и 2 здесь соответствуют параметрам $R_1/R_2 = 1$, $p_1/R_1 = 1$, $p_2/R_1 = 0$, $h/R_1 = 3$, $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi/2$.

Заключительные замечания

Представленный подход к решению смешанной стационарной динамической задачи электроупругости позволяет эффективно исследовать влияние инерционного эффекта на поведение компонентов электроупругого поля в пьезокерамическом пространстве с туннельными неоднородностями достаточно произвольной конфигурации для различного количества активных электродов. При численном решении системы интегродифференциальных уравнений (3.2) по схеме метода квадратур [13], в силу того, что некоторые ее ядра терпят разрывы, в плотности обладают корневыми особенностями на краях электродов, для достижения удовлетворительной точности следует брать значительное число узлов разбиения контура сечения полости, что приводит к увеличению затрат процессорного времени. Несмотря на это, рассмотренный подход привлекает своей универсальностью, позволяя исследовать различные варианты электрического возбуждения сопряженных полей без какого-либо принципиального изменения алгоритма.

Из представленных результатов расчетов следует, что поведение электрических и механических величин существенно зависит от частоты гармонического нагружения, взаимного расположения и конфигурации неоднородностей, а также расположения и размеров поверхностных электродов. Наличие трещины может значительно усилить динамический эффект. Например, как следует из фиг.5, величина Q^* , характеризующая суммарный электрический заряд на электроде, может превысить свой статический аналог в 2.9 раз (кривая 2). В отсутствие трещины это превышение составляет лишь 9% [13]. Отметим также, что в статике ($\omega = 0$) электрическое нагружение пьезокерамической среды в условиях антиплоской деформации не вызывает в ней механических напряжений и поэтому коэффициент K_{III} равен нулю.

Работа выполнена в рамках договора о научном сотрудничестве между Афинским национальным Техническим Университетом и Институтом Механики НАН Армении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids.-Amsterdam; North-Holland Publ Co, 1973.
2. Nowacki W. Electromagnetic effects in solid bodies.-M.: Mir, 1986.-160p. [in Russian].
3. Maugin G.A. Continuum mechanics of electromagnetic solids.- Amsterdam-New York: North-Holland, 1988.-488p.
4. Sih G.C. (ed.)Elastodynamic crack problems.-Leyden: Noordhoff; 1977.
5. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shul'ga N.A. Electroelasticity. (Mechanics of coupled fields in construction elements, Vol. 5).-Kyiv, Naukova Dumka, 1989. -280p. [in Russian].
6. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. Electromagnetoelasticity. New York: Gordon and Breach, 1988.
7. Bardzokas D, Kudryavtsev B.A., Senik N.A. Criteria of electromechanical fracture of piezoelectrics initiated by electrode edges.-Strength of Materials, 1994, No. 7, pp. 510-513 [in Russian].

8. Parton V.Z. Fracture mechanics for piezoelectric materials. –Acta Astronautica, 1976, Vol. 3, No 9-10, pp. 671-683.
9. Suo Z., Kuo C.M., Barnett D.M., Willis J.R. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics.–J. Mech. Phys. Solids, 1992, No. 40, pp.739-765.
10. Kudryavtsev B.A. Electroelastic state of a half-plane from piezoceramics with two boundary electrodes. –Probl. Prochnosti, 1982, No. 7, pp. 56-59 [in Russian].
11. Bardzokas D., Kudryavtsev B.A., Senik N.A. The Rayleigh waves in a half-space with a finite system of surface electrodes. –Mech. of Solids, 1996, No 1, p.45-51 [in Russian].
12. Filshitskiy M.L. On an approach to the investigation of electroelastic fields in a cylinder excited by the system of surface electrodes. Sumy (Ukraine), Proceedings of Sumy University, 1998, No 1(9), pp. 3-8 [in Russian].
13. Bardzokas D., Filshitskiy M.L. Electroelasticity of piecewise-uniform bodies.–Sumy (Ukraine): University Book Publ., 2000.-308p. [in Russian].
14. Bardzokas D., Filshitskiy M.L., Rodriguez-Ramos R., Sanchez-Casals O. Oscillations of a hollow piezoceramic cylinder excited by a system of surface electrodes.–VIIIth International Conference “Numerical methods in continuum mechanics”, Liptovsky Jan, Slovak Republic, 2000, pp.161-162.
15. Ссылка на конф. Бреббиа.
16. Фильштинский М.Л. Динамическое нагружение пьезокерамического полупространства с трещиной. // Акуст.журнал. 1993. Т.39. Вып.5. С.921-928 [in Russian].
17. Партон В.З., Фильштинский М.Л. Динамическая задача электроупругости для слоя и полуслоя с туннельными полостями. // Изв. РАН. МТТ. 1993. №5. С.82-88 [in Russian].
18. Parton V.Z., Filshitskiy M.L. The steady-state wave process in a piezoelectric layer and half-layer weakened by tunnel cuts (antiplane deformation). // J. Appl. Maths Mechs, Vol. 56, No 3, 424-431, 1992.
19. Бардозкас Д., Фильштинский М.Л. Дифракция волны сдвига на цилиндрических включениях в пьезоэлектрическом полупространстве. //Изв. РАН. МТТ. 1997. №3. С. 77-84 [in Russian].
20. Muskhelishvili N.I. Singular Integral Equations. Groningen Wolters-Noordhoff Publishing, 1958.
21. Партон В.З., Борисковский В.Г. Динамика хрупкого разрушения. М.: Машиностроение, 1988. 239с.
22. Berlincourt D.A., Curran D.R, Jaffe H. Piezoelectric and piezomagnetic materials and their functions as transducers. In: Physical acoustics, V.1, Part A. Edited by W.P. Mason. Academic Press, New-York, 1964.

Афинский национальный
 технический университет, Греция.
 Сумский государственный
 университет, Украина.

Поступила в редакцию
 6.10.2004