ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №4, 2004 Механика

УДК 539.3

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Амбарцумян С. А., Гнуни В. Ц.

Ս. Ա. Համբարձումյան, Վ. Ց. Գնունի

Լայնական սահքերի հաշվառմամբ տարամոդուլ սալի գլանային մակերևույթով ծռումը

Աշխատանքում քննարկվում է սալի նյութի տարամոդուլության և լայնական սահքերի հաշվառման ազդեցությունը սալի հաշվարկային մեծությունների վրա: Դիտարկվում են սալի երկար կողերի ամրացման տարբեր դեպքեր: Բացահայտվում են տարամոդուլության և լայնական սահքերի հաշվառման ազդեցությունները սալի ճկվածքի և լարվածության (ձգող, սեղմող) գոտիների վրա:

S.A. Hambartsumyan, V.Ts. Gnuni

Clyindrical Bending of Different-modulus Plate with Regard to Transversal Shears

Различные задачи прочности, устойчивости и колебаний стержней, пластин и оболочек на основе разномодульной теории упругости [1] были рассмотрены в работах многих авторов (см.литературу в [1], а также литературу и краткий обзор в [2]). Однако, сложности, связанные с общей теорией, требуют иных подходов для решения многих конкретных задач.

Здесь рассматривается задача цилиндрического изгиба пластинки с учетом влияния поперечных сдвигов, с помощью новой (несколько упрощенной) четырехконстантной теории разномодульных материалов [3].

1. Пусть для материала пластинки имеем: E^+ — модуль упругости при чистом растяжении; E^- — модуль упругости при чистом сжатии; G_p — модуль сдвига при чистом сдвиге; ν^+ и ν^- — соответствующие коэффициенты Пуассона ($E^+\nu^- = E^-\nu^+$). Предполагается, что постоянные упругости остаются неизменными при любых сложных напряженных состояниях [3].

Согласно [1,3,4] принимается, что в зависимости от знаков нормальных напряжений σ_x^i и σ_y^i пластинка по толщине h разделяется на две зоны ("слоя") с постоянными толщинами h_i $(h_1 + h_2 = h)$.

В основу ставятся следующие известные предположения [4]: нормальные к срединной плоскости перемещения u_z^i не зависят от координаты z, нормальные напряжения σ_z^i пренебрежительно малы; поперечные касательные напряжения τ_{xz}^i и τ_{yz}^i по толщине слоя меняются по заданному закону.

Обобщенный закон упругости примет следующий вид [1,3,4]:

$$\begin{gathered} e_x^i = a_{11}^i \sigma_x^i + a_{12}^i \sigma_y^i \quad , \quad e_y^i = a_{22}^i \sigma_y^i + a_{12}^i \sigma_x^i \\ e_{xy}^i = a_{66}^i \tau_{xy}^i \ , \ e_{xz}^i = a_{66}^i \tau_{xz}^i \ , \quad e_{yz}^i = a_{66}^i \tau_{yz}^i \end{gathered} \qquad (1.1)$$

где для коэффициентов упругости в зависимости от знаков нормальных напряжений имеем

$$\text{при } \sigma_x^i > 0, \quad \sigma_y^i > 0 \qquad a_{11}^i = a_{22}^i = \frac{1}{E^+}$$

$$\text{при } \sigma_x^i < 0, \quad \sigma_y^i < 0 \qquad a_{11}^i = a_{22}^i = \frac{1}{E^-}$$

$$\text{при } \sigma_x^i > 0, \quad \sigma_y^i < 0 \qquad a_{11}^i = \frac{1}{E^+}, \; a_{22}^i = \frac{1}{E^-}$$

$$\text{при } \sigma_x^i < 0, \quad \sigma_y^i > 0 \qquad a_{11}^i = \frac{1}{E^-}, \; a_{22}^i = \frac{1}{E^+}$$

для коэффициентов a_{12} и a_{66} в независимости от знаков напряжений имеем

$$a_{12} = -\frac{\nu^+}{E^+} = -\frac{\nu^-}{E^-}, \qquad a_{66} = \frac{1}{G_p}$$

Разрешая (1.1) относительно напряжений, получим

$$\sigma_x^i = b_{11}^i e_x^i + b_{12}^i e_y^i, \quad \sigma_y^i = b_{22}^i e_y^i + b_{12}^i e_x^i$$
$$\tau_{xy}^i = b_{66} e_{xy}^i, \quad \tau_{xz}^i = b_{66} e_{xz}^i, \quad \tau_{yz}^i = b_{66} e_{yz}^i \tag{1.2}$$

где для упругих постоянных имеем

$$b_{11}^i = \frac{a_{22}^i}{\Omega^i}, \quad b_{22}^i = \frac{a_{11}^i}{\Omega^i}, \quad b_{12}^i = \frac{a_{12}}{\Omega^i}$$
$$\Omega^i = a_{11}^i a_{22}^i - a_{12}^2, \quad b_{66} = \frac{1}{a_{66}} = G_p \tag{1.3}$$

Полагая, что пластинка загружена лишь нормально приложенной к лицевым поверхностям ($z = h_1, z = -h_2$) нагрузками Z^+ и Z^- соответственно для поперечных касательных напряжений, запишем [4]

$$\tau_{xz}^i = \left(1 - \frac{z^2}{h_i^2}\right)\varphi, \quad \tau_{yz}^i = \left(1 - \frac{z^2}{h_i^2}\right)\psi \tag{1.4}$$

где $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$ – искомые функции.

Для деформаций в случае цилиндрического изгиба по координате x имеем

$$e_x^i = \frac{\partial u_x^i}{\partial x}, \; e_y^i = 0, \; e_z^i = \frac{\partial u_z^i}{\partial z} = 0$$
$$e_{xy}^i = \frac{\partial u_y^i}{\partial x}, \quad e_{yz}^i = \frac{\partial u_y^i}{\partial z}, \quad e_{xz}^i = \frac{\partial u_x^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial x} \tag{1.5}$$

где $u_x^i(x,z)$, $u_y^i(x,z)$, $u_z(x)$ – перемещения какой-либо точки пластинки.

Пусть при $z = 0$ (координатная плоскость $x0y$ совпадает с плоскостью разделения "слоев") $u_z^i = w(x)$, $u_x^i = u(x)$, $u_y^i = \nu(x)$, где

w, u, v — искомые перемещения координатной плоскости $x0y$.

Согласно (1.2), (1.4), (1.5), а также при предыдущем предположении, для компонент любой точки пластинки получим

$$u_x^i = u - z\frac{\partial w}{\partial x} + za_{66}\left(1 - \frac{z^2}{3h_i^2}\right)\varphi$$

$$u_y^i = v + za_{66}\left(1 - \frac{z^2}{3h_i^2}\right)\psi, \quad u_z^i = w \tag{1.6}$$

Далее, согласно (1.5) и (1.2), наряду с (1.4), для отличных от нуля напряжений получим

$$\sigma_x^i = b_{11}^i\left[\frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + za_{66}\left(1 - \frac{z^2}{3h_i^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]$$

$$\sigma_y^i = \frac{a_{12}}{a_{22}^i}\sigma_x^i \quad \tau_{xy}^i = b_{66}\left[\frac{\partial v}{\partial x} + za_{66}\left(1 - \frac{z^2}{3h_i^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] \tag{1.7}$$

Согласно определению при $z = 0$ σ_x^i, откуда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.8}$$

Теперь, окончательно для напряжений имеем (1.4) и

$$\sigma_x^i = -zb_{11}^i\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + zb_{11}^i a_{66}\left(1 - \frac{z^2}{3h_i^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$\sigma_y^i = \frac{a_{12}}{a_{22}^i}\sigma_x^i, \ \tau_{xy} = b_{66}\frac{\partial v}{\partial x} + z\left(1 - \frac{z^2}{3h_i^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.9}$$

Эти напряжения вызывают внутренние усилия и моменты, которые запишутся следующим образом:

$$T_1 = K_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{5}{6}a_{66}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$$

$$T_2 = K_{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{5}{6}a_{66}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \tag{1.10}$$

$$S = b_{66}h\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{5}{12}\left(h_2^2 - h_1^2\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$N_1 = \frac{2}{3}h\varphi, \quad N_2 = \frac{2}{3}h\psi \tag{1.11}$$

$$M_1 = -D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{4}{5}D_{11}a_{66}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$M_2 = -D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{4}{5}D_{12}a_{66}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{1.12}$$

$$H = -\frac{1}{2} b_{66} \left(h_2^2 - h_1^2\right) \frac{\partial \nu}{\partial x} - \frac{4}{15} \left(h_2^3 - h_1^3\right) \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

где

$$K_{11} = \frac{1}{2}\left(b_{11}'' h_2^2 - b_{11}' h_1^2\right), \quad K_{12} = \frac{1}{2}\left(b_{12}'' h_2^2 - b_{12}' h_1^2\right)$$
$$D_{11} = \frac{1}{3}\left(b_{11}'' h_2^3 - b_{11}' h_1^3\right), \quad D_{11} = \frac{1}{3}\left(b_{12}'' h_2^3 - b_{12}' h_1^3\right) \tag{1.13}$$

Здесь мы имеем лишь жесткости взаимовлияния K_{ik} и жесткости изгиба D_{ik}. Отсутствие жесткостей ратяжения-сжатия C_{ik}, которые имеют вид [5]

$$C_{11} = b_{11}'' h_2 + b_{11}' h_1 \quad , \quad C_{12} = b_{12}'' h_2 + b_{12}' h_1 \tag{1.14}$$

обусловлено равенством (1.8).

Отметим, что в формулах (1.13) и (1.14) штрихами отмечены соответствующие "слои".

2. Уравнения равновесия дифференциального элемента пластинки $(Z = Z^+ + Z^-)$ имеют следующий вид [1-4]:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = 0 \;, \; \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial N_1}{\partial x} = -Z$$
$$\frac{\partial M_1}{\partial x} = N_1, \; \frac{\partial H}{\partial x} = N_2 \tag{2.1}$$

Согласно первому уравнению равновесия (2.1) и первой формуле (1.10), полагая $K_{11} = 0$, с учетом равенства $h_1 + h_2 = h$, для искомых толщин образованных "слоев" h_i имеем

$$h_1 = \frac{\sqrt{b_{11}''}}{\sqrt{b_{11}''} + \sqrt{b_{11}'}} h \;, \quad h_2 = \frac{\sqrt{b_{11}'}}{\sqrt{b_{11}''} + \sqrt{b_{11}'}} h \tag{2.2}$$

Подставляя значения внутренних усилий и моментов из (1.10)-(1.12) в оставленные уравнения (2.1), совместно с (1.8) получим следующую систему пяти дифференциальных уравнений относительно пяти искомых функций $w(x), u(x), \nu(x), \varphi(x), \psi(x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \,, \quad \frac{2}{3} h \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -Z$$
$$b_{66} h \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \frac{5}{12}\left(h_2^2 - h_1^2\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$
$$D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{4}{5} D_{11} a_{66} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{2}{3} h\varphi = 0 \tag{2.3}$$
$$\left(h_2^3 + h_1^3\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{15}{8} b_{66} \left(h_2^2 - h_1^2\right) \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \frac{5}{2} h\psi = 0$$

В этих уравнениях разномодульность материала пластинки отражается в упругих постоянных a_{66} и b_{66}, в жесткости изгиба D_{11} и в геометрических параметрах h_i.

Из (2.3) после очевидных преобразований получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - k^2 \psi = 0 \, , \; \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{5}{12} \frac{h_2^2 - h_1^2}{h b_{66}} k^2 \psi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{3}{2h} Z \quad , \qquad \varphi = -\frac{3}{2h} \int Z dx - \frac{3}{2h} C_1 \tag{2.4}$$

$$D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{6}{5h} D_{11} a_{66} \frac{\partial Z}{dx} = \int Z dx + C_1 \, , \, u = C_9$$

где C_i – постоянные интегрирования

$$k^2 = 80 h^2 \left[32h \left(h_2^3 + h_1^3 \right) - 25 \left(h_2^2 - h_1^2 \right)^2 \right]^{-1} \tag{2.5}$$

К уравнениям (2.3) и (2.4) должны быть присоединены граничные условия, которые ничем не отличаются от граничных условий уточненной теории пластин [4].

3. Рассмотрим длинную прямоугольную пластинку, несущую поперечную, равномерно распределенную нагрузку с интенсивностью $Z = q$. Пусть пластинка имеет ширину l и шарнирно оперта по своим длинным сторонам $x = l, x = 0$. В этом случае изогнутая поверхность участка пластинки, достаточно удаленного от ее коротких сторон, будет близка к цилиндрической.

Граничные условия запишем следующим образом (возможны и иные варианты) [4]:

$$\text{при } x = 0 \quad w = 0, \; u = 0, \; v = 0, \; M_1 = 0, \psi = 0$$

$$\text{при } x = l \quad w = 0, \; u = 0, \; v = 0, \; M_1 = 0, \psi = 0 \tag{3.1}$$

Из (2.4) для искомых функций легко записать

$$u = c_9 \, , \; \psi = c_5 e^{kx} + c_6 e^{-kx} \, , \; T_1 = c_{10} \equiv 0$$

$$v = -\frac{5}{12} \frac{h_2^2 - h_1^2}{h b_{66}} \left(c_5 e^{kx} + c_6 e^{-kx} \right) c_7 x + c_8 \tag{3.2}$$

$$D_{11} w = q \frac{x^4}{2\varphi} + c_1 \frac{x^3}{6} c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 \quad , \quad \varphi = -\frac{3q}{2h} x - \frac{3c_1}{2h}$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.1), определим постоянные интегрирования.

Далее для искомых функций получим:

$$u = 0 \, , \; v = 0 \, , \; \psi = 0 \, , \; \varphi = \frac{3q}{2h} \left(\frac{l}{2} - h \right)$$

$$w = \frac{qx}{D_{11}} \left(\frac{x^3}{24} - \frac{x^2 l}{12} + \frac{l^3}{24} \right) + \frac{3q}{5h} a_{66} \, x \, (l - x) \tag{3.3}$$

Имея значения искомых функций с помощью формул (1.4), (1.9)-(1.13) и (2.2), легко найти все расчетные величины задачи.

Формулы (3.3) внешне ничем не отличаются от соответствующих формул уточненной теории [4]. Однако D_{11} и a_{66} имеют иное содержание. В частности, подставляя в (1.13) значения h_i из (2.2), для жесткости изгиба D_{11} получим

$$D_{11} = \frac{b''_{11} b'_{11}}{\left(\sqrt{b''_{11}} + \sqrt{b'_{11}}\right)^2} \tag{3.4}$$

В частности, полагая $\nu^+ = 0$, $\nu^- = 0$, $E^+ = 2E$, $E^- = E$, $b_{66} = 0{,}5E$, получим

$h_1 = 0{,}4142h$, $h_2 = 0{,}5858h$, $D_{11} = 0{,}1144Eh^3$

$h_1 = h_2 = 0{,}5h$, $D_{11} = 0{,}1667\,Eh^3$

Если же полагать $\nu^+ = \nu^- = 0$, $E^+ = E^- = E$, $b_{66} = 0{,}5E$, то получим

$$h_1 = h_2 = 0{,}5h\,, \quad D_{11} = 0{,}0833\,Eh^3$$

Сравнивая эти результаты, заключаем, что неучет разномодульности может привести к ошибкам по h_i от 17% до 20%, а по жесткости D_{11} – от 27-46%.

Что же касается напряжений, то, естественно, значительное перемещение нейтрального слоя и непосредственное влияние модулей упругости существенно изменяют качественную и количественную картины напряженного состояния пластинки.

4. Рассмотрим длинную прямоугольную пластинку, несущую поперечную и равномерно распределенную нагрузки с интенсивностью $Z = q$. Пластина имеет ширину l и заделана по своим длинным сторонам $x = 0, x = l$.

Рассмотрим два варианта заделки.

а) при $x = 0, x = l$

$$w = 0\,,\ \nu = 0,\ u = 0\,,\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0\,,\ \psi = 0 \tag{4.1}$$

б) при $x = 0$, $x = l$

$$w = 0\,,\ u = 0\,,\ \nu = 0\,,\ \left.\frac{\partial u_x^i}{\partial x} = 0\right|_{z=0}\,,\ \psi = 0 \tag{4.2}$$

Согласно (3.2), удовлетворяя граничным условиям (4.1), окончательно для искомых функций получим

$$u = 0,\ \nu = 0,\ \psi = 0,\ \varphi = \frac{3q}{2h}\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

$$w = \frac{qx^2}{24D_n}(x-l)^2\,,\ w_{\max} = \frac{ql^4}{384D_n} \tag{4.3}$$

Отметим, что здесь для u, v, ψ и φ получим тот же результат, что и в (3.3), а для нормального перемещения – классическую формулу с новой жесткостью изгиба D_{11}. Как известно, в этой задаче пластинка разделяется на отдельные зоны по координате x. Вблизи от краев растянутые зоны находятся в слоях, где $z<0$, а в середине – в слоях, где $z>0$. Однако, элементарной подстановкой h_i из (2.2) в D_{11} (1.13) легко показать, что жесткость изгиба по ширине пластинки (по координате x) остается неизменной.

Следует отметить также, что величины (длины) крайних (а) и центральной (в) зон пластинки, (которые определяются из условия $M_1=0$), в отличие от классической теории, существенно зависят от жесткости изгиба D_{11} (содержащей особенности разномодульности) и постоянной упругости b_{66}, характеризующего деформации сдвига.

В частности, имеем

$$a=\frac{l}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}\left(1-\frac{144D_{11}}{5b_{66}hl^2}\right)}\right)$$
$$b=l\sqrt{\frac{1}{3}\left(1-\frac{144D_{11}}{5b_{66}hl^2}\right)} \tag{4.4}$$

Согласно (3.2), удовлетворяя граничным условиям (4.2), получим

$$u=0,\quad v=0,\quad \psi=0,\quad \varphi=\frac{3q}{2h}\left(\frac{l}{2}-x\right)$$
$$w=\frac{qx^2}{24D_{11}}(x-l)^2+\frac{3a_{66}qx}{4h}(l-x),\quad w_{\max}=\frac{ql^4}{384D_{11}}\left(1+\frac{72D_{11}}{b_{66}hl^2}\right) \tag{4.5}$$

В этом случае имеем иную картину. Нормальное перемещение зависит также от деформаций поперечных сдвигов. При этом количественно изменяются также размеры зон по координате x. В частности, в этом случае имеем

$$a=\frac{l}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}\left(1-\frac{324D_{11}}{5b_{66}hl^2}\right)}\right)$$
$$b=l\sqrt{\frac{1}{3}\left(1-\frac{324D_{11}}{5b_{66}hl^2}\right)} \tag{4.6}$$

5. Рассмотрим длинную прямоугольную пластинку, несущую поперечную равномерно распределенную нагрузку с интенсивностью $Z=q$. Пластинка имеет ширину l и в отличие от предыдущих задач, по длинным сторонам $x=0$, $x=l$ имеет различные типы закрепления. Считается, что при $x=0$ пластинка шарнирно оперта, а при $x=l$ заделана, т.е. имеет следующие граничные условия:

при $x=0$ $\quad u=0,\ v=0,\ w=0,\ M_1=0,\ \psi=0$

$$\text{при } x = l \quad u = 0\,,\ v = 0\,,\ w = 0\,,\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0\,,\ \psi = 0 \tag{5.1}$$

Согласно (3.2), удовлетворяя граничным условиям (5.1), для искомых функций получим

$$u = 0,\ v = 0\ ,\ \psi = 0$$
$$\varphi = \frac{3q}{2h}\left(\frac{3}{8}l - x\right) - \frac{27q}{10}\frac{a_{66}D_{11}}{h^2 l} \tag{5.2}$$
$$w = \frac{qx}{48D_{11}}\left(2x^3 - 3x^2 l + l^3\right) + \frac{3q}{10}\frac{a_{66}x}{hl}(x-l)^2$$

Рассматривая (5.2), замечаем, что несимметричность граничных условий существенно изменяет влияние как разномодульности, так и учета поперечных сдвигов.

В этой задаче пластинка по ширине разделяется на две зоны. В первой зоне $0 \le x \le c$ верхние слои пластинки сжаты, а нижние растянуты, а во второй зоне $c \le x \le l$ – наоборот. Однако, как и раньше, D_{11} остается постоянным. Приравнивая к нулю M_1 (для этой задачи см. (1.12) и (5.2)), для c получим

$$c = \frac{3}{4}l\left(1 - \frac{24}{5}\frac{a_{66}D_{11}}{l^2 h}\right)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. М.:Наука, 1982. 317с.
2. Саркисян К.С. Устойчивость элементов конструкций из разномодульных материалов с учетом поперечных сдвигов. – Ереван. 1987. Кандидатская диссертация.
3. Амбарцумян С.А. Сопротивление материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Ереван: Из-во РАУ, 2004. 187 с.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
11.10.2004