Մեխանիկա 57, №3, 2004 Механика

539.4, 621.891

О СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПРИ СЛУЧАЙНОМ НАГРУЖЕНИИ С ПИКОВЫМИ ПЕРЕГРУЗКАМИ

Гаспарян С А., Саркисян Н. Н, Шекян Л. А.

Ս. Հ. Գասպարյան, Ն.Ն. Սարգսյան, Լ.Ա. Շեկյան

Գագաթնային գերբեռնվածքով պատահական բեռնավորման դեպքում երկարակեցության վիճակագրական նմանակների վերաբերյալ

Առաջարկվում է հոգնածային երկարակեցության վիճակագրական նմանակ Վեյբուլի ամենաթույլ օղակի սկզբունքի հիման վրա՝ երկարակեցության գնահատման դեպքում կարճատև գագաթնային գերբեռնվածքի ազդեցության մեկնաբանման համար: Մեթոդը մշակված է կառուցվածքի բեռնավորման պատահական պրոցեսի համար՝ փոփոխական լարումների Ռեյլեյի և նորմալ բաշխումներով նկարագրման ենթադրությամբ:

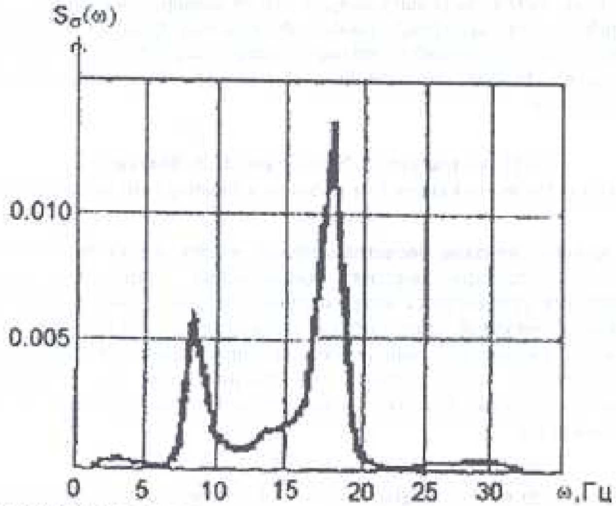
S. H. Gasparyan, N. N. Sargsyan, L. A. Shekyan

On Statistical Models of Fatigue Life at Random Loading with Single Overloads

Основой современных методов расчетов деталей машин и конструкций на усталостную прочность и долговечность при действии циклических напряжений является условие линейного суммирования усталостных повреждений с мерой, принимаемой равной единице к моменту исчерпания несущей способности, предложенное Пальмгреном – Майнером. При этом, как правило, параметры, определяющие напряжения при случайном нагружении, вызывающие усталостное повреждение, рассматриваются как детерминированные, зависящие от статистических характеристик процесса нагружения в виде функции распределения напряжений.

По обширным эксплуатационным данным, обработанным в [1] для стальных образцов, значение меры повреждения $D = 0,75...1,19$, что вполне соответствует оценке случайных колебаний о правомерности линейной гипотезы. Определение оптимальных конструктивных параметров усталостной долговечности представляет интерес особенно для случаев неблагоприятных режимов нагружения, когда расширение полосы нагружения, особенно при спектрах с пиковыми, весьма кратковременными перегрузками, приводит к значениям $D = 0,1...0,2$ и менее.

Известно, что нагрузочные условия, наблюдаемые как узко- и широкополосые случайные процессы изменения напряжений по времени, у большинства машин и оборудования в областях энергетики, транспортных средств и разнородных производств в подавляющих случаях носят стохастический характер. При рассмотрении проблемы надежности конструкций необходимо учитывать влияние кратковременных пиковых перегрузок. Решение этой проблемы требует определения вероятностных характеристик этого процесса, особенно распределение частоты перегрузок. В случае узкополосого случайного процесса амплитуды напряжений описываются функцией распределения максимумов этого процесса. При рассмотрении характерных видов энергетических спектров нагруженности конструкций (фиг. 1) при различных условиях их эксплуатации видно, что положение и величина пиков спектров определяются динамическими свойствами масс механических систем и скорости движения объекта, и случайный процесс нагружения можно считать узкополосным [2]. Поэтому случай нагружения широкополосого спектра заменяется узкополосым процессом на основе выделения амплитуд напряжений, причиняющих накопление усталостных повреждений посредством хорошо известных методов максимумов, или "дождя" [1] – более удобного для программирования и автоматизации обработки экспериментальных данных нагружения. Продолжительное представление влияний среды на нагружение рассматривается как нормальный стационарный случайный процесс, удовлетворяющий эргодической гипотезе и может быть описан нормальным распределением стохастических значений переменных напряжений.

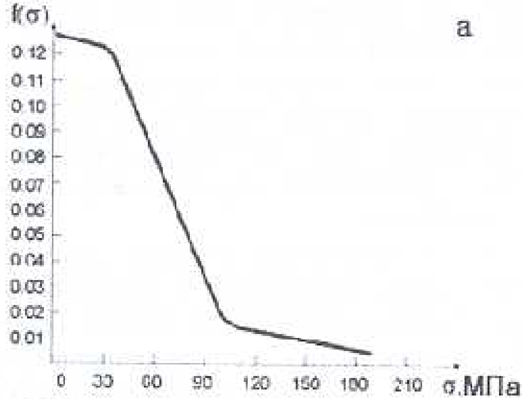


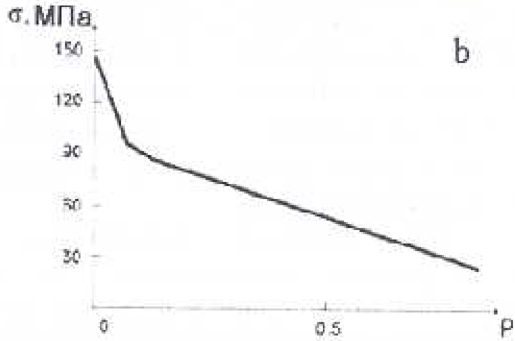
Фиг. 1 Характерный вид энергетических спектров нагруженности конструкций.

При схематизации случайного стационарного процесса изменение напряжений в детали во времени по одному из вышеупомянутых методов по определяемой плотности вероятности распределения максимумов напряжений, а также по среднему числу их в единицу времени можно рассчитать долговечность детали.

Оценка долговечности может быть осуществлена посредством опытов, производимых на вибрационных стендах, симулирующих реальные условия заданного процесса нагружения, используя условие эквивалентности реального $S^r_\sigma(\omega)$ и экспериментального $S^t_\sigma(\omega)$ спектров нагружения, посредством $S^r_\sigma(\omega) = S^t_\sigma(\omega)$, полученным определением спектральной плотности процесса, стандартного отклонения переменных напряжений и функции вероятностной плотности распределения мгновенных значений напряжений в элементе конструкции как результат статистической обработки данных для конкретной реальной системы. Подобные испытания проводились на установке программного нагружения, разработанной и изготовленной в институте механики АН Украины, работающей по низкочастотному (до 30

Гц) резонансному принципу. В результате соответствующей статистической обработки данные аппроксимированы нормальным законом распределения случайной величины посредством проверки критерием согласия χ^2 Пирсона с выбранным уровнем значимости $P_Б$ в пределах 0,01...0,1 [2]. В качестве примера на фиг. 2 иллюстрирована функция плотности напряжений, возникающих в раме конструкции типа цистерна автомобильного транспорта по дорогам различного покрова на основе исследований, проведенных в зависимости от скорости движения в пределах $v = 4...20$ м/сек, что подтверждает правомерность использования нормального закона распределения. Предположение о нормальном распределении напряжений оправдывается результатами непосредственных измерений напряжений в рамах тележек локомотивов, электровозов и в полуосях автомобилей [1].





Фиг. 2 Функция плотности (a) и функция нормального распределения (b), построенные при $\sqrt{\left\langle \sigma^2 \right\rangle} = 60\text{МПа}$.

Райсом [3] получены формулы для плотности вероятности и среднего числа максимумов в единицу времени, которые для использования расчетов на усталость деталей машин при случайном нагружении приведены в [1]. Приведенная окончательная формула Райса для плотности вероятности максимумов нормального стационарного случайного процесса, выраженная через безразмерную величину $h = \xi_m / \sigma_\xi$, имеет вид

$$f(h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[ve^{-\frac{h^2}{2v^2}}+\sqrt{2\pi\left(1-v^2\right)}he^{-\frac{h^2}{2}}\Phi\left(\frac{\sqrt{1-v^2}}{v}h\right)\right] \tag{1}$$

где ξ_m/σ_ξ – отношение среднего числа нулей процесса к среднему числу экстремумов. Таким образом, плотность распределения максимумов зависит лишь от одного параметра $v^2=1-\dfrac{\sigma_\eta^4}{\sigma_\xi^2\sigma_\zeta^2}$ (см. [1]), который может изменяться от 0 до 1. При $v\to 0$ получается закон распределения Релея $\Phi\left(\dfrac{\sqrt{1-v^2}}{v}h\right)\to 1$ и $f(h)\to h\exp\left(-\dfrac{h^2}{2}\right)$. При $v\to 1$ второе слагаемое в квадратных скобках (1) стремится к нулю, т.е. получается нормальный закон распределения относительных максимумов случайного процесса.

Таким образом, если входной случайный процесс является гауссовским и динамическая система линейна, то функция распределения вероятности долговечности при заданном значении напряжений в элементах конструкции может быть выражена нормальным законом или законом распределения Релея.

Для обеспечения интерпретации влияния приложенных пиковых перегрузок с целью оценки долговечности предложено статистическое исследование усталостного разрушеня на основе концепции Вейбулла "слабого звена" [4]. В соответствии с этой концепцией предполагается, что каждый элемент конструкции состоит из звеньев наподобие цепи. Тогда стохастические модели долговечности элемента (цепи) и его слабейшего звена эквивалентны. В предположении, что усталостные долговечности всех звеньев независимые случайные величины, распределенные одним и тем же законом $F(x)$ с функцией плотности $f(x)$, долговечность элемента определится законом распределения наименьшего значения порядковой статистики выборки размера.

Предполагается, что вариация кумулятивного усталостного повреждения при случайном стационарном линейном процессе динамического нагружения может быть аппроксимирована нормальной функцией распределения мгновенных значений циклических напряжений в элементах конструкций. Исходя из предположения, что ресурс звена распределен нормальным законом с

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx \tag{2}$$

можно использовать результат Крамера [6] для $y=nF(x)$, что плотность $g_1(y)$ распределения наименьших значений для y стремится к e^{-y}, когда число звеньев $n\to\infty$. С учетом того, что плотность распределения ресурса элемента, составленного из n звеньев, $f_1(x)=g_1(y)\cdot\left|dy/dx\right|$, и так как $y = nF(x)$, а $|dy/dx| = nf(x)$, плотность распределения элемента может быть выражена

$$f_1(x) = \frac{1}{A\cdot\sigma}\cdot e^{-nF-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \frac{x-\mu}{\sigma} = t \tag{3}$$

Аппроксимируя кусочно-линейной функцией $F(x)$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \mu - \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2}, & x \in \left[\mu - \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \mu + \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] \\ 1, & x > \mu + \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{cases} \tag{4}$$

которая удовлетворяет условиям $F(-\infty) = 0$, $F'(\mu) = f(\mu)$, $F(\infty) = 1$, получим

$$f_1(t) = \frac{1}{A\cdot\sigma}\begin{cases} e^{-\frac{t^2}{2}}, & t < -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ e^{-\frac{t^2}{2}-n\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\right)}, & t \in \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] \\ e^{-\frac{t^2}{2}-n}, & t > \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{cases} \tag{5}$$

где A определяется из условия $F_1(\infty) = 1$

$$A = \left\{2\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt + \int_{-\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi/2}}\exp\left(-\frac{t^2}{2} - \frac{nt}{\sqrt{2\pi}} - \frac{n}{2}\right)dt\right\} \tag{6}$$

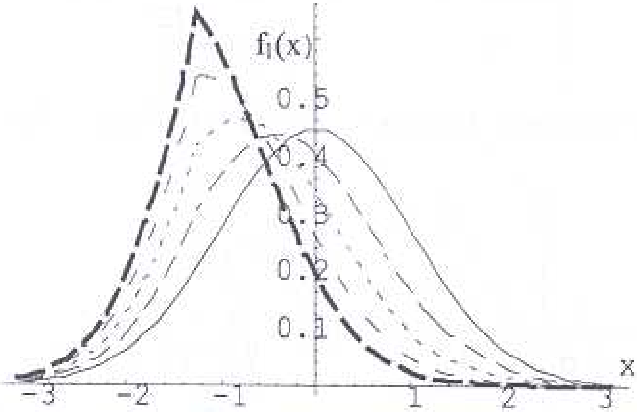
и распределение будет $F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)dx$, откуда усталостная долговечность может быть получена при заданном уровне напряжений.

В соответствии с приведенными в табл. 1 значениями построены кривые плотности полученного распределения при разных значениях числа звеньев n (фиг.3). Очевидно, что в процессе увеличения порядка n кривые распределения плотности перемещаются влево и правдоподобность испытания стремится к определенному значению.

При использовании закона распределения Релея (приводится в общепринятом виде)

Таблица 1

n	0	1	2	3	≥4
t_{max}	0	$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$	$-\frac{3}{\sqrt{2\pi}}$	$-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$f_1(t_{max})$	1	$e^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2\pi}\right)}$	$e^{-\frac{1}{2}\left(2-\frac{4}{2\pi}\right)}$	$e^{-\frac{1}{2}\left(3-\frac{9}{2\pi}\right)}$	$e^{-\frac{\pi}{4}}$



Фиг. 3. Функция плотности распределения при различных значениях *n*.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-\mu}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] & x\geq\mu\\ 0 & x<\mu\end{cases}\tag{7}$$

$$F(x)=\begin{cases}1-\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] & x\geq\mu\\ 0 & x<\mu\end{cases}\tag{8}$$

статистическая модель долговечности с использованием распределения Вейбулла, подобно [5], получится в виде

$$f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{A}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\eta-1}\exp\left[-nF_1(x)-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\eta}\right] & x\geq\mu\\ 0 & x<\mu\end{cases}\tag{9}$$

$$F_2(x)=\begin{cases}\int\limits_{\mu}^{x}f(x)dx & x\geq\mu\\ 0 & x<\mu\end{cases}\tag{10}$$

где A определяется из условия $F_2(\infty)=1$.

Таким образом, предложенные статистические модели для описания распределения долговечностей силовых конструкций и их элементов, работающих в условиях случайных процессов нагружения, построены на достаточно надежных теоретических основаниях. Использование представленных статистических моделей позволяет лучше оценить влияние кратковременных пиковых перегрузок с учетом достижения определенной объективности. При этом имеется возможность прогнозирования долговечности при промежуточных значениях нагрузки, а также получения лучшей оценки при заданных значениях нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. М.: Машиностроение, 1977. 230с.
2. Саркисян Н.Н. Спектральные характеристики нагруженности элементов конструкций при случайном нагружении. // Тр. НАН и ГИУА Армении. Сер. ТН. Т. LIII, № 1. С.22-27, Ереван, 2000.
3. Райс С. Теория флуктуационных шумов. / В кн.: Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. М.: ИЛ. 1953. 157с.
4. Као Дж. Модели долговечности и их применение. / Справочник по надежности , М.: Мир, 1969. Т. 1, 339 с.
5. Гаспарян С.А., Шекян Л.А. Оценка усталостной долговечности валов-шпоночных соединений. // Изв. НАН РА. Механика. 2002. Т.55. № 4. С. 79-84.
6. Крамер Г. Математические методы статистики.М.: ИЛ, 1948.

Государственный инженерный
университет Армении

Поступила в редакцию
16.06.2004