ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №3, 2004 Механика

УДК 539.3

# О РЕШЕНИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

Оганесян Р. Ж.

Ռ. Ժ. Հովհաննիսյան
Օրթոտրոպ սալի սեփական տատանումների խնդրում սահմանային շերտի լուծման մասին

Լուծված է օրթոտրոպ սալի սեփական տատանումների խնդրում սահմանային շերտի որոշման խնդիրը, երբ դիմային մակերևույթների վրա տրված են առաձգականության մաթեմատիկական տեսության խառը եզրային խնդրի պայմանները: Դուրս է բերված է տրանսցենդենտ հավասարում, որի արմատները բնութագրում են սահմանային շերտի մեծությունների մարման արագությունը: Որոշված են սահմանային շերտի բնութագրիչ ֆունկցիաները:

**R. Zh. Hovhannisyan**
**About solution of boundary layer in problem of free vibrations of plate**

Определено решение пограничного слоя в задаче о собственных колебаниях ортотропной пластинки, когда на лицевых поверхностях заданы смешанные условия краевых задач математической теории упругости. Выведено трансцендентное уравнение, корни которого характеризуют скорость затухания величин пограничного слоя. Определены соответствующие характеристические функции погранслоя.

1. Частоты собственных колебаний и соответствующие им собственные функции для ортотропной пластинки $D = \{(x, y, z): (x, y) \in D_0, \ |z| \le h, \ h << l\}$, когда на лицевых поверхностях $z = \pm h$ заданы условия

$$\begin{gathered} \sigma_{xz}(h) = \sigma_{yz}(h) = \sigma_{zz}(h) = 0 \\ u(-h) = v(-h) = w(-h) = 0 \end{gathered} \tag{1.1}$$

определены в работе [1].

Доказано, что в пластинке могут возникнуть собственные колебания трёх видов: два сдвиговых и одно продольное. Главными значениями частот являются

$$\omega_{0n}^{xz} = \frac{\pi}{4h}\sqrt{\frac{G_{13}}{\rho}}(2n+1) = \frac{\pi}{4h}v_c^{xz}(2n+1) \tag{1.2}$$

$$\omega_{0n}^{yz} = \frac{\pi}{4h}\sqrt{\frac{G_{23}}{\rho}}(2n+1) = \frac{\pi}{4h}v_c^{yz}(2n+1) \qquad n \in N \tag{1.3}$$

$$\omega_{0n}^{p} = \frac{\pi}{4h}\sqrt{\frac{A_{11}}{\rho}}(2n+1) = \frac{\pi}{4h}v_p(2n+1) \tag{1.4}$$

где $v_c^{xz}$ и $v_c^{yz}$ –известные скорости распространения сейсмических сдвиговых волн, а $v_p$ –скорость распространения продольных волн в пластинке.

Соответствующее (1.1)–(1.4) решение удовлетворяет всем уравнениям пространственной задачи математической теории упругости и граничным условиям (1.1). Однако оно, как правило, не удовлетворяет условиям при $x = 0, l$. Возникающая неувязка устраняется решением пограничного слоя. Чтобы построить это решение, в динамических уравнениях теории упругости введём новые переменные $\alpha = x/h$, $\eta = y/l$, $\zeta = z/h$ и безразмерные перемещения $U = u_x/l$, $V = u_y/l$,

$W = u_z/l$. Решение этой системы будем искать в виде

$$
\begin{gathered}
\sigma_{\beta\gamma} = \sigma_{jk}(\alpha,\eta,\zeta)\exp(i\omega t) \\
\beta,\gamma = x,y,z; \quad j,k = 1,2,3 \\
(u_x,u_y,u_z) = (U,V,W)\exp(i\omega t)
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

В результате получим следующую систему уравнений:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\alpha} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\zeta} + \omega_*^2\varepsilon^{-2}U = 0, \quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\alpha} = a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33} \\
\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\alpha} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\zeta} + \omega_*^2\varepsilon^{-2}V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial\eta} = a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + a_{23}\sigma_{33} \\
\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\alpha} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\zeta} + \omega_*^2\varepsilon^{-2}W = 0, \quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial W}{\partial\zeta} = a_{13}\sigma_{11} + a_{23}\sigma_{22} + a_{33}\sigma_{33} \\
\frac{\partial U}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\alpha} = a_{66}\sigma_{12}, \quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial W}{\partial\alpha} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta} = a_{55}\sigma_{13}, \quad \frac{\partial W}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta} = a_{44}\sigma_{23} \\
\omega_*^2 = \rho h^2\omega^2.
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

где $\omega$–частота собственных колебаний.

Решение этой системы разыскивается в виде функций типа погранслоя [2 - 4]:

$$
R_p = R_p^{(s)}(\eta,\zeta)\varepsilon^{\chi_{R_p}+s}\exp(-\lambda\alpha), \quad s=\overline{0,N}
\tag{1.7}
$$

Здесь $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\chi_{\sigma_{\alpha\beta p}} = -1$, $\chi_{U_p,V_p,W_p} = 0$, обозначение $s=\overline{0,N}$ здесь и далее означает, что по повторяющемуся (немому) индексу $s$ происходит суммирование в пределах всех целых значений $[0, N]$. Напряжения $\sigma_{13p},\sigma_{23p},\sigma_{33p}$ при $\zeta = 1$ и перемещения $U_p,V_p,W_p$ при $\zeta = -1$ должны обращаться в нуль, а само решение затухать при удалении от края $\xi = 0$ в глубь пластинки.

Подставив (1.6) в (1.5) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$ (в правых и левых частях, начиная с наинизшей), получим непротиворечивую систему относительно величин $R_p^{(s)}$:

$$
\begin{gathered}
-\lambda\sigma_{11p}^{(s)} + \frac{\partial\sigma_{12p}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{13p}^{(s)}}{\partial\zeta} + \omega_{*k}^2 U_p^{(s-k)} = 0 \\
-\lambda\sigma_{12p}^{(s)} + \frac{\partial\sigma_{22p}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{23p}^{(s)}}{\partial\zeta} + \omega_{*k}^2 V_p^{(s-k)} = 0 \\
-\lambda\sigma_{13p}^{(s)} + \frac{\partial\sigma_{23p}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{33p}^{(s)}}{\partial\zeta} + \omega_{*k}^2 W_p^{(s-k)} = 0 \qquad k=\overline{0,s} \\
-\lambda U_p^{(s)} = a_{11}\sigma_{11p}^{(s)} + a_{12}\sigma_{22p}^{(s)} + a_{13}\sigma_{33p}^{(s)} \\
\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta} = a_{12}\sigma_{11p}^{(s)} + a_{22}\sigma_{22p}^{(s)} + a_{23}\sigma_{33p}^{(s)} \\
\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta} = a_{13}\sigma_{11p}^{(s)} + a_{23}\sigma_{22p}^{(s)} + a_{33}\sigma_{33p}^{(s)} \\
\frac{\partial U_p^{(s-1)}}{\partial\eta} - \lambda V_p^{(s)} = a_{66}\sigma_{12p}^{(s)}, \quad -\lambda W_p^{(s)} + \frac{\partial U_p^{(s)}}{\partial\zeta} = a_{55}\sigma_{13p}^{(s)}, \quad \frac{\partial W_p^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial V_p^{(s)}}{\partial\zeta} = a_{44}\sigma_{23}^{(s)}
\end{gathered}
\tag{1.8}
$$

Здесь $R_p^{(s)} \equiv 0$ при $s<0$.

Все напряжения можно выразить через $U_p^{(s)}, V_p^{(s)}, W_p^{(s)}$:

$$\sigma_{11p}^{(s)} = -\lambda A_{22} U_p^{(s)} - A_{23}\frac{\partial W_p^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{12}\frac{\partial V_p^{(s-1)}}{\partial \eta}$$

$$\sigma_{22p}^{(s)} = \lambda A_{12} U_p^{(s)} - A_{13}\frac{\partial W_p^{(s)}}{\partial \zeta} + A_{33}\frac{\partial V_p^{(s-1)}}{\partial \eta}$$

$$\sigma_{33p}^{(s)} = \lambda A_{23} U_p^{(s)} + A_{11}\frac{\partial W_p^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{13}\frac{\partial V_p^{(s-1)}}{\partial \eta} \tag{1.9}$$

$$\sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}}\left[-\lambda V_p^{(s)} + \frac{\partial U_p^{(s-1)}}{\partial \eta}\right], \qquad \sigma_{13}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}}\left[-\lambda W_p^{(s)} + \frac{\partial U_p^{(s)}}{\partial \zeta}\right]$$

$$\sigma_{23}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}}\left[\frac{\partial W_p^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V_p^{(s)}}{\partial \zeta}\right]$$

где

$$A_{11} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2}{\Delta}, \qquad A_{22} = \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}{}^2}{\Delta}, \qquad A_{33} = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}{}^2}{\Delta}$$

$$A_{12} = \frac{a_{33}a_{12} - a_{13}a_{23}}{\Delta}, \quad A_{13} = \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{\Delta}, \quad A_{23} = \frac{a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}}{\Delta} \tag{1.10}$$

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{22}a_{13}{}^2 - a_{11}a_{23}{}^2 - a_{33}a_{12}{}^2$$

Подставив (1.9) в первые три уравнения (1.8), получим:

$$\frac{1}{a_{55}}\frac{\partial^2 U_p^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \lambda\left(\frac{1}{a_{55}} - A_{23}\right)\frac{\partial W_p^{(s)}}{\partial \zeta} + \lambda^2 A_{22} U_p^{(s)} + \omega_{*k}^2 U_p^{(s-k)} = R_{1p}^{(s)}$$

$$\frac{1}{a_{44}}\frac{\partial^2 V_p^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \lambda^2 \frac{1}{a_{66}} V_p^{(s)} + \omega_{*k}^2 V_p^{(s-k)} = R_{2p}^{(s)} \tag{1.11}$$

$$A_{11}\frac{\partial^2 W_p^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \lambda\left(\frac{1}{a_{55}} - A_{23}\right)\frac{\partial U_p^{(s)}}{\partial \zeta} + \lambda^2 \frac{1}{a_{55}} W_p^{(s)} + \omega_{*k}^2 W_p^{(s-k)} = R_{3p}^{(s)}$$

$$k = \overline{0,s}$$

где

$$R_{1p}^{(s)} = \lambda A_{12}\frac{\partial V_p^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{12p}^{(s-1)}}{\partial \eta}$$

$$R_{2p}^{(s)} = -\lambda\frac{1}{a_{66}}\frac{\partial U_p^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{22p}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{1}{a_{44}}\frac{\partial^2 W_p^{(s-1)}}{\partial \eta^2} \tag{1.12}$$

$$R_{3p}^{(s)} = \frac{\partial \sigma_{23p}^{(s-1)}}{\partial \eta} - A_{13}\frac{\partial^2 V_p^{(s-1)}}{\partial \eta^2}$$

Очевидно, что величины $R_{ip}^{(s)} \equiv 0$ при $s \le 0$, а при $s>0$ $R_{ip}^{(s)}$ известны.

Рассмотрим случай $s=0$, тогда (1.11) примет вид:

$$\frac{1}{a_{55}}\frac{\partial^2 U_p^{(0)}}{\partial\zeta^2}-\lambda\left(\frac{1}{a_{55}}-A_{23}\right)\frac{\partial W_p^{(0)}}{\partial\zeta}+\left(\lambda^2 A_{22}+\omega_{*0}^2\right)U_p^{(0)}=0$$

$$\frac{1}{a_{44}}\frac{\partial^2 V_p^{(0)}}{\partial\zeta^2}+\left(\lambda^2\frac{1}{a_{66}}+\omega_{*0}^2\right)V_p^{(0)}=0 \qquad (1.13)$$

$$A_{11}\frac{\partial^2 W_p^{(0)}}{\partial\zeta^2}-\lambda\left(\frac{1}{a_{55}}-A_{23}\right)\frac{\partial U_p^{(0)}}{\partial\zeta}+\left(\lambda^2\frac{1}{a_{55}}+\omega_{*0}^2\right)W_p^{(0)}=0$$

Решением второго уравнения будет:

$$V_p^{(0)}=C_{V1}^{(0)}(\eta)\sin\sqrt{a_{44}\left(\lambda^2/a_{66}+\omega_{*0}^2\right)}\zeta+C_{V2}^{(0)}(\eta)\cos\sqrt{a_{44}\left(\lambda^2/a_{66}+\omega_{*0}^2\right)}\zeta \qquad (1.14)$$

Это решение должно удовлетворять соответствующим условиям (1.1), откуда получим следующие условия:

$$V_p^{(0)}\bigg|_{\zeta=-1}=0,\quad \sigma_{23}^{(0)}\bigg|_{\zeta=1}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial V_p^{(0)}}{\partial\zeta}\bigg|_{\zeta=1}=0 \qquad (1.15)$$

Подставив (1.14) в (1.15), получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}-C_{V1}^{(0)}(\eta)\sin\sqrt{a_{44}\left(\lambda^2/a_{66}+\omega_{*0}^2\right)}+C_{V2}^{(0)}(\eta)\cos\sqrt{a_{44}\left(\lambda^2/a_{66}+\omega_{*0}^2\right)}=0\\ C_{V1}^{(0)}(\eta)\cos\sqrt{a_{44}\left(\lambda^2/a_{66}+\omega_{*0}^2\right)}-C_{V2}^{(0)}(\eta)\sin\sqrt{a_{44}\left(\lambda^2/a_{66}+\omega_{*0}^2\right)}=0\end{cases}$$

Из существования ненулевого решения этой системы вытекает:

$$\cos 2\sqrt{a_{44}\left(\lambda^2/a_{66}+\omega_{*0}^2\right)}=0 \qquad (1.16)$$

Решив это уравнение, для $\lambda$ получим:

$$\lambda_{k,n}=\sqrt{\frac{a_{66}\left(\pi^2(2k-1)^2-16\omega_{*0n}^2 a_{44}\right)}{16a_{44}}} \qquad k,n\in\mathrm{N} \qquad (1.17)$$

Из (1.17) следует, что значения $\lambda_{k,n}$ зависят от значений $\omega_{*0n}=h\sqrt{\rho}\omega_{0n}$, т.е. от частот собственных колебаний (1.2) - (1.4). Следовательно, каждому значению $\omega_{*0n}$ будет соответствовать совокупность значений $\lambda_{k,n}$, т.е. класс функций пограничного слоя, при этом частоты продольных колебаний (1.4) будут порождать сдвиговой пограничный слой.

**2.** Рассмотрим остальные два уравнения (1.13), в которых выразим $U_p^{(0)}$ через $W_p^{(0)}$:

$$U_p^{(0)}=S_1\frac{\partial^3 W_p^{(0)}}{\partial\zeta^3}+S_2\frac{\partial W_p^{(0)}}{\partial\zeta} \qquad (2.1)$$

где

$$S_1=\frac{A_{11}}{\lambda\left(\lambda^2 A_{22}+\omega_{*0}^2\right)\left(a_{55}A_{23}-1\right)},\quad S_2=\frac{\omega_{*0}^2+\lambda^2 A_{23}\left(2-a_{55}A_{23}\right)}{\lambda\left(\lambda^2 A_{22}+\omega_{*0}^2\right)\left(a_{55}A_{23}-1\right)} \qquad (2.2)$$

Подставив (2.1) в третье уравнение (1.13), получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $W_p^{(0)}$:

$$\frac{A_{11}}{a_{55}\left(\omega_{*0}^2+\lambda^2 A_{22}\right)}\frac{\partial^4 W_p^{(0)}}{\partial\zeta^4}+\left(\frac{\omega_{*0}^2+\lambda^2 A_{23}\left(2-a_{55}A_{23}\right)}{a_{55}\left(\omega_{*0}^2+\lambda^2 A_{22}\right)}+A_{11}\right)\frac{\partial^2 W_p^{(0)}}{\partial\zeta^2}+$$
$$+\left(\omega_{*0}^2+\frac{\lambda^2}{a_{55}}\right)W_p^{(0)}=0 \qquad (2.3)$$

Решением этого уравнения является

$$W_p^{(0)}=C_{1p}^{(0)}\cos\lambda\beta_1\zeta+C_{2p}^{(0)}\sin\lambda\beta_1\zeta+C_{3p}^{(0)}\cos\lambda\beta_2\zeta+C_{4p}^{(0)}\sin\lambda\beta_2\zeta \qquad (2.4)$$

где

$$\beta_{1,2}^2=\frac{1}{2A_{11}}\left(\mu^2+A_{23}\left(2-a_{55}A_{23}\right)+a_{55}\left(\mu^2+A_{22}\right)A_{11}\pm\sqrt{D}\right)$$
$$D=\left(\mu^2+A_{23}\left(2-a_{55}A_{23}\right)+a_{55}\left(\mu^2+A_{22}\right)A_{11}\right)^2-4\left(1+\mu^2 a_{55}\right)\left(A_{22}+\mu^2\right)A_{11} \qquad (2.5)$$
$$\mu=\frac{\omega_{*0}}{\lambda}$$

Из (2.1) для $U_p^{(0)}$ получим

$$U_p^{(0)}=\lambda\beta_1\left(S_1\lambda^2\beta_1^{\ 2}-S_2\right)\left(C_{1p}^{(0)}\sin\lambda\beta_1\zeta-C_{2p}^{(0)}\cos\lambda\beta_1\zeta\right)+$$
$$+\lambda\beta_2\left(S_1\lambda^2\beta_2^{\ 2}-S_2\right)\left(C_{3p}^{(0)}\sin\lambda\beta_2\zeta-C_{4p}^{(0)}\cos\lambda\beta_2\zeta\right) \qquad (2.6)$$

Подставляя (2.4) и (2.6) в (1.9) и в граничные условия (1.1), придём к алгебраической системе однородных уравнений, из условия существования ненулевого решения которой получится характеристическое уравнение для определения $\lambda$

$$B_3\cos 2\lambda\beta_2-B_4\cos 2\lambda\beta_1=0 \qquad (2.7)$$

где

$$B_3=\lambda\beta_1^{\ 2}\left(\lambda^2\beta_1^{\ 2}S_1-S_2\right)-1$$
$$B_4=\lambda\beta_2^{\ 2}\left(\lambda^2\beta_2^{\ 2}S_1-S_2\right)-1 \qquad (2.8)$$

В уравнение (2.7) входит $\omega_*$ в качестве параметра, которые были определены из решения внешней задачи и имеют вид (1.2)–(1.4). Каждому значению $\omega_*$ будет соответствовать некоторое множество $\lambda$, из которой в силу свойства пограничного слоя необходимо ограничиться теми значениями, у которых $\mathrm{Re}\lambda>0$. Таким образом, каждому собственному значению $\omega_*$ соответствует своё семейство пограничных функций, при этом частоты сдвиговых колебаний (1.2), (1.3) будут порождать продольный пограничный слой, и наоборот – частотам (1.4) будет соответствовать также сдвиговой пограничный слой.

В качестве примера рассмотрен стеклопластик СТЭТ, чьи значения постоянных упругости следующие [2]:

$$E_1=35.2179\cdot 10^9\,Па,\ E_2=28.7433\cdot 10^9\,Па,\ E_3=17.9523\cdot 10^9\,Па$$
$$G_{12}=7.4556\cdot 10^9\,Па,\ G_{23}=6.1803\cdot 10^9\,Па,\ G_{13}=6.4746\cdot 10^9\,Па$$
$$\nu_{12}=0.177,\ \nu_{23}=0.371,\ \nu_{31}=0.157$$

Вычислены первые шесть корня уравнения (2.7), соответствующие частотам (1.2)–(1.4), которые представлены в табл. 1–3.

$$\omega_{*0_n} = \frac{\pi}{4\sqrt{a_{55}}}(2n+1)$$

Таблица 1

| n=1 | n=2 | n=3 |
|---|---|---|
| 2.14832 + 0.63309 i | 0.93364 | 2.06501 + 1.03838 i |
| 2.96673 | 2.34418 + 0.76793 I | 3.20766 |
| 4.38693 + 0.67415 i | 4.36276 + 0.54425 I | 4.5484 + 0.7183 i |
| 5.58037 | 4.89241 | 6.56271 |
| 6.59204 + 0.65866 i | 6.57016 + 0.66338 I | 6.70845 + 0.46469 i |
| 8.05881 | 7.61432 | 9.62226 |

$$\omega_{*0_n} = \frac{\pi}{4\sqrt{a_{44}}}(2n+1)$$

Таблица 2

| n=1 | n=2 | n=3 |
|---|---|---|
| 2.15092 + 0.63927 i | 1.0589 | 2.08898 + 1.02427 i |
| 2.9967 | 2.35403 + 0.74517 I | 3.32027 |
| 4.388 + 0.67425 i | 4.3572 + 0.56477 I | 4.56109 + 0.70249 i |
| 5.5958 | 4.95887 | 6.64072 + 0.46594 i |
| 6.592 + 0.65711 i | 6.57234 + 0.66645 I | 6.77315 |
| 8.07143 | 7.64512 | 12.22275 |

$$\omega_{*0_n} = \pi\sqrt{A_{11}}(2n+1)/4$$

Таблица 3

| n=1 | n=2 | n=3 |
|---|---|---|
| 2.29505 + 0.84699 i | 1.99957 + 1.37303 i | 4.04025 + 1.0959 i |
| 4.43173 | 4.30617 + 0.73736 i | 5.54629 |
| 4.47673 + 0.45353 i | 5.24957 | 6.74924 + 0.74283 i |
| 6.561998 + 0.64499 i | 6.73459 + 0.71648 i | 8.83449 + 0.57389 i |
| 7.48489 | 8.31258 | 9.46195 |
| 10.03485 | 11.56112 | 12.40489 |

На основании полученных результатов можно заключить – если собственные колебания с достаточной для практических приложений точностью можно считать независимыми с частотами (1.2)–(1.4), то в зоне пограничного слоя они взаимосвязаны–собственные колебания одного типа (например, сдвиговые) порождают собственные колебания другого типа (например, продольные).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Агаловян Л. А., Оганесян Р. Ж. Собственные колебания ортотропных пластин при смешанных краевых условиях на лицевых поверхностях. // Известия НАН РА. Механика. 2003. Т 56. № 4. С. 18-28.
2. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997. 415с.
3. Агаловян М. Л. О решении пограничного слоя в задаче на собственные колебания полосы. // В сб. конф.: Современные вопросы оптимального управления и устойчивости систем. Ереван. Изд-во ЕГУ. 1997. С 132-135.
4. Агаловян Л. А., Гулгазарян Л. Г. О частотах собственных колебаний и пограничном слое для ортотропной пластинки в смешанной краевой задаче. // Известия НАН РА. Механика. 2001. Т 54. № 2. С. 32-41.



Институт механики
НАН Армении



Поступила в редакцию
24.06.2004