ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №3, 2004 Механика

УДК 531.8

О КЛАССИЧЕСКОЙ И УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИЯХ В ЗАДАЧАХ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Геворкян Г.З., Гнуни В.Ц., Киракосян Р.М.

Գ.Զ. Գևորգյան, Վ. Ց. Գնունի, Ռ.Մ. Կիրակոսյան
Օրթոտրոպ սալերի ստատիկ կայունության խնդիրներում դասական և ճշգրտված տեսությունների մասին

Բազմաթիվ ուսումնասիրություններ կան նվիրված անիզոտրոպ սալերի կայունության հարցերին, որոնցում հաշվի են առնված ընդլայնական սահքերի, ինչպես նաև սեփական չափերի փոփոխության ազդեցությունները ([1]–[6] և այլն): Այս աշխատանքում [1] ճշգրտված տեսության շրջանակներում բերվում են հաստատուն հաստության օրթոտրոպ ուղղանկյուն սալերի ստատիկ կայունության խնդրի հավասարումները՝ ընդլայնական սահքերի, սալի չափերի փոփոխության և նորմալ σ_z լարման ազդեցությունների հաշվառմամբ: Որպես մասնավոր դեպք լուծվում է եզրերով հոդակապորեն հենված սալ-գոտու խնդիրը: Դիտարկվում է չորս տարբերակ, որոնցից երեքում հաշվի է առնվում վերը նշված գործոններից յուրաքանչյուրի ազդեցությունը առանձին, իսկ չորրորդ տարբերակում՝ բոլորի ազդեցությունները միասին: Ցույց է տրվում, որ իզոտրոպ սալ-գոտու դեպքում ընդլայնական սահքի, չափերի փոփոխության և σ_z լարման ազդեցությունները իրար համակշռում են և սեղմող ուժերի կրիտիկական արժեքները գործնականում համընկնում են դասական տեսության համապատասխան արժեքների հետ: Հետևաբար իզոտրոպ սալերի համար իմաստ չունի կիրառել ճշգրտված տեսություն և կարելի է բավարարվել դասական տեսությամբ: Մինչդեռ օրթոտրոպ սալերի համար այս եզրակացությունը ընդհանուր առմամբ ճիշտ չէ: Զգալի անիզոտրոպության դեպքում պետք է դիմել ճշգրտված տեսության, ընդ որում, սահքի և σ_z լարման ազդեցությունները հաշվի առնելիս չի կարելի արհամարհել սկզբնական չափերի փոփոխության ազդեցությունը:

G.Z. Gevorgyan, V. Ts. Gnuni, R.M. Kirakosyan
On the Classical and Refined Theory in the Statical Stability Problem of Orthotropic Plates

Многие исследования посвящены вопросам устойчивости анизотропных пластин, где учитываются влияния поперечных сдвигов, а также изменения размеров ([1] – [6] и т.д.). В настоящей работе в рамках уточненной теории [1] приводятся уравнения задачи статической устойчивости ортотропных пластин постоянной толщины при учете влияний поперечных сдвигов, изменения размеров и нормального напряжения σ_z. В качестве примера решается задача шарнирно опертой по краям пластинки-полосы. Рассматриваются четыре варианта. В трех из них учитываются влияния отмеченных факторов в отдельности. В четвертом варианте учитываются влияния всех факторов вместе. Показывается, что в случае изотропной полосы факторы поперечного сдвига, изменения размеров и напряжения σ_z с большой точностью компенсируют друг друга и критические значения сжимающих сил практически совпадают с соответствующими значениями классической теории. В случае ортотропных пластин со значительной анизотропией это утверждение неверно. Тогда необходимо обратиться к уточненной теории. Однако, при учете влияния поперечного сдвига и напряжения σ_z в обязательном порядке надо учитывать и влияние изменения размеров.

1. Рассмотрим прямоугольную ортотропную пластинку со сторонами a_0, b_0 и постоянной толщины h_0. Пластинку отнесем к декартовой системе координат $Oxyz$. Координатную плоскость Oxy совместим со

срединной плоскостью, направив оси Ox и Oy вдоль сторон пластинки, а ось Oz так, чтобы образовалась правая система координат. Будем считать, что главные направления анизотропии материала параллельны координатным осям. Пусть на пластинку статически прикладываются сжимающие силы и в ней возникает безмоментное напряженно-деформированное состояние с однородными внутренними тангенциальными усилиями

$$T_x^0 = -P, \quad T_y^0 = -\lambda P, \quad S_{xy}^0 = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\lambda = T_y^0 / T_x^0$ – отношение сжимающих усилий.

Из обобщенного закона Гука ортотропного тела [1] имеем:

$$e_x = -\frac{P}{E_1 h_0} + \frac{\nu_{12}}{E_2}\frac{\lambda P}{h_0}, \quad e_y = -\frac{\lambda P}{E_2 h_0} + \frac{\nu_{12}}{E_2}\frac{P}{h_0}, \quad e_z = \frac{\nu_{13} P}{E_3 h_0} + \frac{\nu_{23}}{E_3}\frac{\lambda P}{h_0} \tag{1.2}$$

Здесь e_x, e_y, e_z и E_1, E_2, E_3 – компоненты деформации и модули Юнга материала вдоль координатных осей, $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ – коэффициенты Пуассона.

В результате деформирования размеры пластинки изменятся и в момент наступления потери устойчивости примут значения a, b и h. Пользуясь (1.2) и геометрическими соотношениями, находим:

$$a = a_0\left(1 - \frac{P}{E_1 h_0} + \frac{\nu_{12}\lambda P}{E_2 h_0}\right), \; b = b_0\left(1 - \frac{\lambda P}{E_2 h_0} + \frac{\nu_{12} P}{E_2 h_0}\right) \tag{1.3}$$

$$h = h_0\left(1 + \frac{\nu_{13} P}{E_3 h_0} + \frac{\nu_{23}\lambda P}{E_3 h_0}\right) \tag{1.4}$$

Поступая, как обычно, из системы уравнений изгиба пластинки [1] можно получить следующую систему уравнений статической утойчивости, учитывающую влияния поперечных сдвигов, изменения размеров и напряжения σ_z:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{12P}{h^3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\
D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{h^2}{10}\left[a_{55}\left(D_{11}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + D_{66}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) + \right. \\
\left. + a_{44}(D_{12} + D_{66})\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y}\right] + \frac{h^3\varphi}{12} = \frac{A_1 h^2 P}{10}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \lambda\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) \\
D_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{h^2}{10}\left[a_{44}\left(D_{22}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + D_{66}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) + \right. \\
\left. + a_{55}(D_{12} + D_{66})\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}\right] + \frac{h^3\psi}{12} = \frac{A_2 h^2 P}{10}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \lambda\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь w – прогиб, D_{ij} – жесткости пластинки, A_1, A_2 – коэффициенты, учитывающие влияние напряжения σ_z; φ и ψ − функции, характеризующие распределение поперечных сдвигов.

К системе (1.5) следует присоединить известные граничные условия [1], записанные для измененных краев пластинки $x = 0, a$ и $y = 0, b$. Отметим, что значения a и b соответствуют моменту наступления потери устойчивости пластинки и являются функциями от неизвестного критического значения параметра сжимающих сил P.

2. В качестве примера рассмотрим задачу статической устойчивости шарнирно-опертой по краям $x = 0, a$ ортотропной пластинки-полосы. Полоса сжимается равномерно распределенными силами погонной интенсивности P, приложенными на шарнирно-опертых сторонах. По длине полоса свободна и может беспрепятственно перемещаться вдоль оси Oy, в силу чего усилие T_y отсутствует. Пользуясь формулами (1.3) и (1.4), находим:

$$a = a_0\left(1 - \frac{P}{E_1 h_0}\right), \quad h = h_0\left(1 + \frac{\nu_{13} P}{E_3 h_0}\right) \tag{2.1}$$

где a_0 и h_0 − начальные значения ширины и толщины.

Интегрируя первое и второе уравнения системы (1.5) по x и имея в виду условия шарнирного опирания пластинки, приходим к одному уравнению. Пользуясь выражением коэффициента A_1 [1], это уравнение можно привести к виду:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{60 E_3 G_{13} P}{B_{11} h^2 \{5 E_3 G_{13} h + 6P[(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}) G_{13} - E_3]\}} w = 0 \tag{2.2}$$

Здесь G_{13} − модуль поперечного сдвига, а B_{11} выражается через упругие постоянные материала по известной формуле [1].

Отметим, что уравнение (2.2) относится к общему случаю, при котором одновременно учитываются влияния всех факторов: поперечного сдвига, изменения размеров полосы и напряжения σ_z. Краевые условия задачи в этом случае имеют вид:

$$w\big|_{x=0} = w\big|_{x=a} = 0 \tag{2.3}$$

Рассмотрим частные случаи.

а) Влияния всех перечисленных факторов пренебрегаются (классическая постановка). Разрешающее уравнение (2.2) и краевые условия в этом случае имеют вид:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{12P}{B_{11} h_0^3} w = 0 \tag{2.4}$$

$$w\big|_{x=0} = w\big|_{x=a_0} = 0 \tag{2.5}$$

б) Учитывается только влияние поперечного сдвига. Краевые условия совпадают с (2.5), а разрешающее уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{60 G_{13} P}{B_{11} h_0^2 (5 G_{13} h_0 - 6P)} w = 0 \tag{2.6}$$

в) Учитывается только влияние напряжения σ_z. Краевые условия совпадают с (2.5). Разрешающее уравнение будет:

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{60E_3P}{B_{11}h_0^2\left[5E_3h_0+6P\left(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}\right)\right]}w=0 \qquad (2.7)$$

г) Учитывается только влияние изменения размеров полосы. Краевые условия совпадают с (2.3), а разрешающее уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{12P}{B_{11}h^3}w=0 \qquad (2.8)$$

В дальнейшем будем пользоваться безразмерными величинами:

$$\overline{x}=x/a_0,\ \overline{w}=w/h_0,\ n_1=E_1/\sigma_0,\ n_3=E_3/\sigma_0,\ n_{11}=B_{11}/\sigma_0$$

$$n_{13}=G_{13}/\sigma_0,\ \varepsilon=a_0/h_0,\ \overline{P}=P/(\sigma_0h_0) \qquad (2.9)$$

σ_0 – характерное напряжение, играющее роль масштаба.

Отметим, что разрешающее уравнение всех случаев с учетом (2.9) можно записать в единой безразмерной форме:

$$\frac{d^2\overline{w}}{d\overline{x}^2}+k^2\overline{w}=0 \qquad (2.10)$$

где k^2 для различных случаев имеет различные выражения. Подчинив общее решение уравнения (2.10) краевым условиям, для определения критических значений сжимающих усилий $\overline{P}$ получим

$$\sin k\overline{a}=0 \qquad (2.11)$$

Здесь

$$\overline{a}=\begin{cases}1-\text{при неучете влияния изменения размеров}\\ 1-\overline{P}/n_1-\text{при учете влияния изменения размеров}\end{cases} \qquad (2.12)$$

Из (2.11) следует

$$k\overline{a}=j\pi,\quad j=1,2,... \qquad (2.13)$$

где j – номер формы потери устойчивости. В случаях неучета влияния изменения размеров уравнение (2.13) линейно относительно $\overline{P}_j$. В случаях же учета этого влияния оно становится кубическим.

В табл. 1 приведены выражения k^2 для всех случаев, значения $\overline{P}_j$ в случаях а), б), в) и кубическое уравнение относительно $\overline{P}_j$ для остальных случаев. Из выражения $\overline{P}_j$ для случаев а) и в) заключаем, что учет влияния только напряжения σ_z приводит к увеличению значений критических сил по сравнению с классическими. Исходя из физических соображений, можно ожидать, что учет изменения размеров (уменьшение ширины и увеличение толщины) полосы также должен привести к росту критических значений сжимающих сил. С другой стороны, как видно из выражения $\overline{P}_j$ для случая б), учет поперечных сдвигов, наоборот, уменьшает значения критических сил. Возникает вопрос: в какой мере влияния отмеченных факторов будут взаимокомпенсировать друг друга при их одновременном учете.

Таблица 1

Случаи	k^2	$\overline{P}_j$
а)	$\dfrac{12\varepsilon^2\overline{P}_j}{n_{11}}$	$\dfrac{n_{11}j^2\pi^2}{12\varepsilon^2}$
б)	$\dfrac{60\varepsilon^2 n_{13}\overline{P}_j}{n_{11}(5n_{13}-6\overline{P}_j)}$	$\dfrac{5n_{11}n_{13}j^2\pi^2}{6(10n_{13}\varepsilon^2+n_{11}j^2\pi^2)}$
в)	$\dfrac{60\varepsilon^2 n_3\overline{P}_j}{n_{11}[5n_3+6\overline{P}_j(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23})]}$	$\dfrac{5n_{11}n_3 j^2\pi^2}{6[10n_3\varepsilon^2-n_{11}(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23})j^2\pi^2]}$
г)	$\dfrac{12\varepsilon^2 n_3^3\overline{P}_j}{n_{11}(n_3+\nu_{13}\overline{P}_j)^3}$	$k^2(n_1-\overline{P}_j)^2=j^2\pi^2n_1^2$
общий	$\dfrac{60\varepsilon^2 n_{13}n_3^3\overline{P}_j}{n_{11}(n_3+\nu_{13}\overline{P})^2\left[5n_{13}n_3+(11\nu_{13}n_{13}-6n_3+6\nu_{12}\nu_{23}n_{13})\overline{P}_j\right]}$	$k^2(n_1-\overline{P}_j)^2=j^2\pi^2n_1^2$

3. Рассмотрим примеры изотропных и ортотропных полос со значениями геометрического параметра

$$\varepsilon=40;\ 30;\ 20;\ 15;\ 12;\ 10 \tag{3.1}$$

Для изотропных полос примем

$$n_1=n_3=1000;\ n_{13}=400;\ \nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0{,}25;\ n_{11}=1066{,}7 \tag{3.2}$$

Для ортотропных

$$n_1=1000;\ n_3=50;\ n_{13}=25;\ \nu_{12}=0{,}1;\ \nu_{13}=0{,}2;\ \nu_{23}=0{,}3;\ n_{11}=1200 \tag{3.3}$$

В табл.2 представлены первые критические значения сжимающей силы $\overline{P}_1^{(l)}$ в случаях учета каждого из факторов в отдельности и при одновременном их учете. Представлены также процентные отклонения от соответствующих классических значений $\overline{P}_1^{(0)}$

$$\Delta_l=\frac{\overline{P}_1^{(0)}-\overline{P}_1^{(l)}}{\overline{P}_1^{(0)}}100\%,\quad l=1,2,3,4 \tag{3.4}$$

Здесь l указывает постановку задачи. При $l=1$ учитывается только влияние поперечного сдвига, $l=2$ – только напряжения σ_z, $l=3$ – только изменение размеров полосы, а при $l=4$ учитываются влияния всех отмеченных факторов одновременно.

Данные табл.2 приводят к следующим заключениям.

1. В случае изотропных полос учет влияния любого фактора в отдельности приводит к незначительным поправкам критических значений сжимающих сил. Например, при достаточно большой относительной толщине $h_0/a_0=0{,}1$ $(\varepsilon=10)$ поправки от поперечного сдвига, напряжения σ_z и изменения размеров в отдельности составляют

2,56%, $-0,33\%$ и $-2,51\%$ соответственно. При одновременном же учете этих факторов происходит почти полная взаимокомпенсация их влияний и общая поправка практически исчезает (составляет лишь $-0,09\%$). Поэтому в задачах статической устойчивости изотропных полос, особенно настолько тонких, которые теряют устойчивость в пределах пропорциональности, можно ограничиться классической теорией пластин.

Таблица 2

	$\varepsilon=40$	$\varepsilon=30$	$\varepsilon=20$	$\varepsilon=15$	$\varepsilon=12$	$\varepsilon=10$
	Изотропная полоса					
$\overline{P}_1^{(0)}$	0,5483	0,9748	2,1933	3,8991	6,0923	8,7730
$\overline{P}_1^{(1)}$	0,5474	0,9719	2,1789	3,8540	5,9830	8,5480
Δ_1	0,16	0,30	0,66	1,16	1,79	2,56
$\overline{P}_1^{(2)}$	0,5484	0,9751	2,1951	3,9048	6,1063	8,8019
Δ_2	-0,02	-0,03	-0,08	-0,15	-0,23	-0,33
$\overline{P}_1^{(3)}$	0,5491	0,9774	2,2066	3,9416	6,1973	8,9933
Δ_3	-0,15	-0,27	-0,61	-1,09	-1,72	-2,51
$\overline{P}_1^{(4)}$	0,5483	0,9749	2,1938	3,9009	6,0966	8,7813
Δ_4	0	-0,01	-0,02	-0,05	-0,07	-0,09
	ортотропная полоса					
$\overline{P}_1^{(0)}$	0,6168	1,0966	2,4674	4,3865	6,8539	9,8696
$\overline{P}_1^{(1)}$	0,5991	1,0418	2,2061	3,6235	5,1572	6,6970
Δ_1	2,87	5,00	10,59	17,39	24,76	32,15
$\overline{P}_1^{(2)}$	0,6190	1,1033	2,5015	4,4953	7,1234	10,438
Δ_2	-0,36	-0,61	-1,38	-2,48	-3,93	-5,76
$\overline{P}_1^{(3)}$	0,6222	1,1138	2,5569	4,6813	7,6150	11,571
Δ_3	-0,88	-1,57	-3,63	-6,72	-11,10	-17,23
$\overline{P}_1^{(4)}$	0,6061	1,0630	2,3011	3,8785	5,6687	7,5463
Δ_4	1,73	3,06	6,74	11,58	17,29	23,54

2. Для ортотропных полос это заключение в общем случае неверно. Например, в рассмотренном случае ортотропии (3.3) при $h_0/a_0=0,1$, $(\varepsilon=10)$ поправки от поперечного сдвига, напряжения σ_z и изменения размеров в отдельности довольно ощутимы и составляют 32,15%,

$-5{,}76\%$ и $-17{,}23\%$ соответственно. При одновременном учете этих факторов полная взаимокомпенсация их влияний не происходит и общая поправка все же ощутима и составляет $23{,}54\%$. Следовательно, для ортотропных полос необходимо обратиться к уточненной теории. Однако, при учете влияния поперечных сдвигов в обязательном порядке надо учитывать также и влияния изменения размеров и напряжения σ_z.

3. Из-за нелинейности взаимовлияний сумма поправок от отдельных факторов не равна поправке от их совместного учета, т.е.

$$\sum_{l=1}^{3} \Delta_l \neq \Delta_4 \tag{3.5}$$

Это неравенство более ощутимо в случае ортотропии и резко усиливается с ростом относительной толщины (с убыванием параметра ε).

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1987. 360с.
2. Томашевский В.Т. Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Баку. 1966. М.: Наука. 1966. С.753-761.
3. Мелконян А.П., Хачатрян А.А. Об устойчивости прямоугольных трансверсально-изотропных пластинок. //ПМ. 1966. Т.2. Вып. 2.
4. Акопян А.С., Киракосян Р.М. Об устойчивости ортотропных пластин переменной толщины с учетом поперечного сдвига. // Изв. НАН РА. Механика. 1995. Т. 48. №4. С.3-9.
5. Гнуни В.Ц. Некоторые соображения о расчетных моделях упругих пластинок. // Изв. НАН РА. Механика. 1999. Т. 52. №3. С.86-89.
6. Белубекян В.М. К задаче устойчивости пластинки с учетом поперечных сдвигов. // Изв. НАН РА. Механика. 2002. Т. 55. №4. С.5-11.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
6.09.2004