ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №3, 2004 Механика

УДК 539.3

РАСЧЕТ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ – КОНСОЛИ

Белубекян М.В., Саноян Ю.Г.

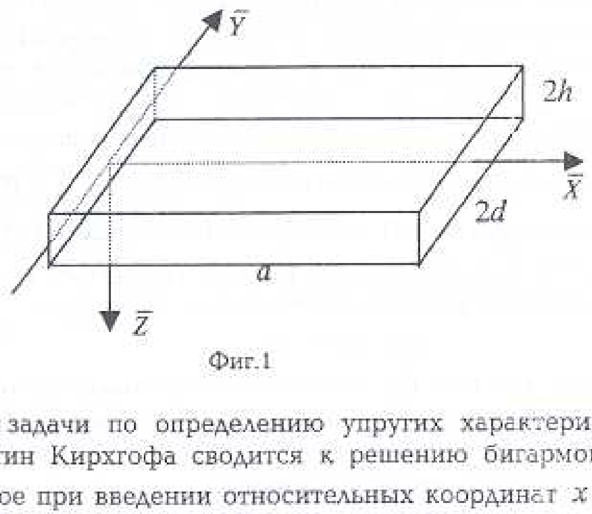
Մ. Վ. Բելուբեկյան, Յու. Գ. Սանոյան
Բարձակային սալի ծռման հաշվարկը

Ուղղանկյան սալի ծռման խնդիրները լուծվում են անալիտիկ կերպով այն դեպքերում, երբ սալի երկու հանդիպակաց կողմերը ազատ են, և կիրառվում է փոփոխականների բաժանման մեթոդը: Մյուս դեպքում խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ է թվային և մոտավոր մեթոդների կիրառումը [1]: Տվյալ հոդվածում այդպիսի խնդրի լուծման համար առաջարկվում է կիրառել թվային մեթոդ [2,3]:

M. W. Belubekyan, Yu. G. Sanoyan
Calculation of Cantilever Plate Bending

Задачи изгиба прямоугольной пластины решаются аналитически в случаях, когда две противоположные стороны пластины свободно оперты. В остальных случаях для решения задачи необходимо применение численных и приближенных методов [1]. В настоящей статье для решения такого типа задач предлагается использовать численный метод, основанный на разложении в ряды Фурье [2,3].

Рассмотрим консоль в виде пластины, левый конец которой закреплен. Координатная плоскость xoy совпадает со средней плоскостью. На верхнюю поверхность действует равномерная нагрузка q. Правый конец находится под воздействием момента силы $\overline{M}_x$ и поперечной силы $\overline{N}_x$, а каждая боковая сторона консоли – под воздействием момента сил $\overline{M}_y$. Размеры консоли: длина – a, ширина – $2d$, толщина – $2h$. Расположение координатных осей относительно пластины показано на фиг.1. Рассчитаем изгиб пластины под воздействием указанных выше сил.



Фиг.1

Решение задачи по определению упругих характеристик на основе теории пластин Кирхгофа сводится к решению бигармонического уравнения, которое при введении относительных координат $x = \overline{x}/a$, $y = \overline{y}/a$ и безразмерной функции перемещений $w(x, y) = \overline{w}(x, y)/2h$ имеет вид

$$\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4}=q\gamma^{-4} \quad (1)$$

при следующих краевых условиях:

$$x=0,\ \ w(0,y)=0,\ w_x(0,y)=0 \ \text{ при } -\alpha\le y\le\alpha \quad (2)$$

$$x=1,\ \partial_{x,x}w(x,y)+\nu\partial_{y,y}w(x,y)=-M_x\gamma^{-2} \ \text{ при } -\alpha\le y\le\alpha \quad (3)$$

$$x=1,\ \partial_{x,x,x}(w(x,y)+(2-\nu)\partial_{x,y,y}w(x,y)=-N_x\gamma^{-3} \ \text{ при } -\alpha\le y\le\alpha \quad (4)$$

$$y=\alpha,\ \partial_{y,y}w(x,y)+\nu\partial_{x,x}w(x,y)=-M_y\gamma^{-2} \ \text{ при } 0\le x\le 1 \quad (5)$$

$$y=\alpha,\ \partial_{y,y,y}(w(x,y)+(2-\nu)\partial_{y,x,x}w(x,y)=0 \ \text{ при } 0\le x\le 1 \quad (6)$$

где

$q=12(1-\nu^2)\bar{q}/E,\ \gamma=2h/a,\ M_x=3(1-\nu^2)\overline{M}_x/h^2E$,

$M_y=3(1-\nu^2)\overline{M}_y/h^2E,\quad N=6(1-\nu^2)\overline{N}/hE,\quad \alpha=d/a,\quad E-$ модуль упругости, $\nu-$ коэффициент Пуассона.

Краевые условия (2) – (6) симметричны относительно оси x. Поэтому и функция перемещений, приведенная ниже и, которая является решением (1), должна быть симметричной относительно этой же оси.

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{ch}(\lambda_n x)}{\text{ch}(\lambda_n)}(A_n(\text{th}(\lambda_n x)-g1_n x)+B_n x(\text{th}(\lambda_n x)-g2_n))\cos(\lambda_n y)+$$

$$+C_n\frac{\text{ch}(\chi_n y)}{\text{ch}(\chi_n\alpha)}(y\chi_n(\nu-1)\text{th}(\chi_n\alpha)\text{th}(\chi_n y)+\chi_n\alpha(1-\nu)-(1+\nu)\text{th}(\chi_n\alpha))\sin(\chi_n x)+$$

$$+F4x^4+F3x^3+F2x^2+F1x \quad (7)$$

где $\lambda_n=\pi n/\alpha,\ \chi_n=\pi n$,

$$g1_n=\frac{\lambda_n(\nu-1)\text{th}(\lambda_n)}{\lambda_n(\nu-1)-2\text{th}(\lambda_n)},\quad g2_n=\frac{\lambda_n(\nu-1)\text{th}(\lambda_n)-2}{\lambda_n(\nu-1)-2\text{th}(\lambda_n)} \quad (8)$$

В решении (7) только член $F4x^4$ является частным решением уравнения (1), а все остальные члены представляют общее решение однородного бигармонического уравнения. Наряду с этим (7) удовлетворяет первому краевому условию (2),условию (6), а сумма обращается в нуль при подстановке в условие (3) благодаря специальному подбору коэффициентов $g1_n$ и $g2_n$. Таким образом, общее решение уравнения содержит только 3 набора неизвестных коэффициентов A_n, B_n, C_n решения бигармонического уравнения и четыре неизвестных $F1$, $F2$, $F3$, $F4$. Для определения $F4$ подставим решение (7) в(1). Учитывая вышесказанное относительно свойств функции перемещения (7), найдем

$$F4=q\gamma^{-4}/24 \quad (9)$$

Первое краевое условие (2) выполняется тривиально, так как при $x=0$ все выражения при A_n, B_n, C_n и полином, в том числе,обращаются в нуль.

Подставим (8) во второе краевое условие (2).

$$w_x(0,y)=F1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n(\lambda_n-g1_n)-B_n g2_n}{\text{ch}(\lambda_n)}\cos(\lambda_n y)+$$

$$+C_n\chi_n\frac{\mathrm{ch}(\chi_n y)}{\mathrm{ch}(\chi_n\alpha)}\{(\nu-1)\chi_n[y\mathrm{th}(\chi_n\alpha)\mathrm{th}(\chi_n y)-\alpha]-(1+\nu)\mathrm{th}(\chi_n\alpha)\}=0 \quad (10)$$

Разложим функцию при C_n в ряд Фурье по $\cos(\lambda_m y)$. Тогда, обозначив через a_n, b_n коэффициенты при A_n и B_n, представим (10) в виде

$$F1+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n a2_n+B_n b2_n)\cos(\lambda_n y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n c02_n}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_n c2_{n,m}\cos(\lambda_m y)=0 \quad (11)$$

где $c02_n$ и $c2_{n,m}$ – коэффициенты разложения в ряд Фурье и равны

$$c02_n=-\frac{4\nu\mathrm{th}(\chi_n\alpha)^2}{\alpha},\; c2_{n,m}=-\frac{4\chi_n^2\cos(\lambda_m a)\mathrm{th}(\chi_n\alpha)^2}{\alpha(\lambda_m^2+\chi_n^2)^2}(\lambda_m^2+\nu\chi_n^2) \quad (12)$$

Разложение по $\cos(\lambda_m y)$ в двойной сумме формулы (11)заменим на разложение по $\cos(\lambda_n y)$, поменяв местами индексы m и n

$$F1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n a2_n+B_n b2_n+\sum_{m=1}^{\infty}C_m c2_{m,n}\right]\cos(\lambda_n y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n c02_n}{2}=0 \quad (13)$$

Чтобы левая часть этого выражения была равна нулю, необходимо приравнять нулю все коэффициенты ряда при $\cos(\lambda_n y)$ и сумму двух оставшихся членов, из которой определим $F1$

$$A_n a2_n+B_n b2_n+\sum_{m=1}^{\infty}C_m c2_{m,n}=0,\; F1=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n c02_n}{2} \quad (14)$$

Подставим (6) в краевое условие (3). Учитывая замечание, сделанное выше относительно коэффициентов $g1_n$ и $g2_n$ и, принимая во внимание, что $\sin(\chi_n)=0$, получим

$$6F4+3F3+F2=-M_x\gamma^{-2}/2 \quad (15)$$

Подставим теперь (8) в краевое условие (4)

$$6(F3+4F4)+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\lambda_n^2(g1_n(\lambda_n(1-\nu)\mathrm{th}(\lambda_n)-1-\nu)+\lambda_n(\nu-1))+$$

$$+B_n\lambda_n^2(\lambda_n(\nu-1)+(1+\nu)\mathrm{th}(\lambda_n)+g2_n(\lambda_n(1-\nu)\mathrm{th}(\lambda_n)-1-\nu))\cos(\lambda_n y))+C_n\chi_n^3(\nu-1)\times$$

$$\times\cos(\chi_n)\frac{\mathrm{ch}(\chi_n y)}{\mathrm{ch}(\chi_n\alpha)}(\chi_n\alpha(\nu-1)-(\nu-5+\chi_n y(\nu-1)\mathrm{th}(\chi_n y))\mathrm{th}(\chi_n\alpha)))=-N_x\gamma^{-3} \quad (16)$$

Разложим функцию при неизвестной C_n в ряд Фурье по $\cos(\lambda_m y)$. Тогда, обозначив коэффициенты при A_n и B_n через $a4_n$ и $b4_n$, перепишем (16) в следующем виде:

$$\begin{aligned}&24F4+6F3+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n a4_n+B_n b4_n)\cos(\lambda_n y)+\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n c04_n}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_n c4_{n,m}\cos(\lambda_m y)=-N_x\gamma^{-3}\end{aligned} \quad (17)$$

где коэффициенты разложения в ряд Фурье $c4_{n,m}$ и постоянные $c04_n$ при $m=0$ приведены ниже

$$c4_{n,m} = \frac{4\chi_n^4(\nu-1)\cos(\chi_n)\cos(\lambda_m\alpha)\mathrm{th}(\chi_n\alpha)^2}{\alpha(\lambda_m^2+\chi_n^2)}((3-\nu)\lambda_m^2+2\chi_n^2) \quad (18)$$

$$c04_n = \frac{8\chi_n^2(\nu-1)\cos(\chi_n)\mathrm{th}(\chi_n\alpha)^2}{\alpha} \quad (19)$$

Разложение по $\cos(\lambda_m y)$ в (17) заменим на разложение $\cos(\lambda_n y)$, поменяв местами индексы m и n, и, приравняв затем к нулю сумму при $\cos(\lambda_n y)$, а оставшиеся постоянные члены к правой части уравнения, получим вторую группу N уравнений (если ограничиться числом членов разложения в ряд Фурье равным N) и выражение для определения значения $F3$

$$A_n a4_n + B_n b4_n + \sum_{m=1}^{\infty} C_m 4_{m,n} = 0 \quad (20)$$

$$F3 = -\frac{N_x}{6\gamma^3} - 4F4 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n c04_n}{12} \quad (21)$$

Подставим (7) в краевое условие (5)

$$\begin{aligned} &2(F2+3F3x+6F4x^2)\nu + \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\cos(\lambda_n\alpha)\frac{\mathrm{ch}(\lambda_n x)}{\mathrm{ch}(\lambda_n)}(A_n(\lambda_n(\nu-1)(\mathrm{th}(\lambda_n x)-xg1_n)-2\nu g1_n\mathrm{th}(\lambda_n x))+ \\ &+B_n(2\nu(1-g2_n\mathrm{th}(\lambda_n x))+x\lambda_n g2_n(\nu-1)(\mathrm{th}(\lambda_n x)-g2_n))+ \\ &+C_n\chi_n^2(\nu-1)\sin(\chi_n x)(\alpha\chi_n(\nu-1)\mathrm{sh}(\alpha\chi_n)^2+(3+\nu)\mathrm{th}(\alpha\chi_n)) = -\frac{M_y}{\gamma^2} \end{aligned} \quad (22)$$

Разложим функции при A_n и B_n в ряд Фурье по $\sin(\chi_m x)$, а функцию $2(F2+3F3x+6F4x^2)\nu$ и постоянный член справа от равенства по $\sin(\chi_n x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} m5_n\sin(\chi_n x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{m=1}^{\infty} A_n a5_{n,m} + B_n b5_{n,m}\right)\sin(\chi_m x) + C_n c5_n\sin(\chi_n x)\right] = \\ = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_y(1-\cos(\chi_n))}{\gamma^2\chi_n}\sin(\chi_n x) \quad (23)$$

где коэффициенты разложения соответственно равны

$$\begin{aligned} a5_{n,m} = &\frac{2\chi_m\lambda_n\cos(\chi_m)\cos(\lambda_n\alpha)}{(\lambda_n^2+\chi_m^2)^2}\times \\ &\times\left[2g1_n(\lambda_n^2+\nu\chi_m^2)\mathrm{th}(\lambda_n)+\lambda_n(\nu-1)(g1_n-\mathrm{th}(\lambda_n))(\lambda_n^2+\chi_m^2)\right] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} b5_{n,m} = &\frac{2\chi_m\lambda_n\cos(\lambda_n\alpha)}{(\lambda_n^2+\chi_m^2)^2}(2(\lambda_n^2+\nu\chi_m^2)(\mathrm{sh}(\lambda_n)+\cos(\chi_m)(g2_n\mathrm{th}(\lambda_n)-1))+ \\ &+\lambda_n(\nu-1)\cos(\chi_m)(\lambda_n^2+\chi_m^2)(g2_n-\mathrm{th}(\lambda_n))) \end{aligned} \quad (25)$$

$$c5_n = (\nu - 1)\chi_n^2\left(\frac{\alpha\chi_n(\nu-1)}{\mathrm{ch}(\chi_n\alpha)^2} + (3+\nu)\mathrm{th}(\chi_n\alpha)\right) \tag{26}$$

$$m5_n = \frac{4\nu}{\chi_n^3}\left(12F4(\cos(\chi_n)-1) + (F2 - (F2 + 3F3 + 6F4)\cos(\chi_n))\chi_n^2\right) \tag{27}$$

В $m5_n$ входит неизвестная константа C_n, которая содержится в $F2$ и $F3$. Ее необходимо выделить и перенести во вторую сумму выражения (23). Для этого определим сперва $F2$ из (15), подставив в него значение $F3$ из (21)

$$F2 = -\frac{M_x}{2\gamma^2} + \frac{N_x}{2\gamma^3} + 6F4 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n c04_n}{4} \tag{28}$$

Полученное значение $F2$ подставим в (27) и, заменив в ней сумму при коэффициенте $\cos(\chi_n)$ на равное ему значение из (15), после несложных преобразований получим

$$m5_n = m51_n + \frac{\nu}{\chi_n}\sum_{m=1}^{\infty} C_m c04_m \tag{29}$$

где $$m51_n = \frac{4\nu}{\chi^3}\left[\left(12F4 + \chi_n^2\frac{M_x}{2\gamma^2}\right)(\cos(\chi_n)-1) + \chi_n^2\left(6F4 + \frac{N_x}{2\gamma^3}\right)\right] \tag{30}$$

Подставим полученное значение $m5_n$ в (23) и оставив сумму с неизвестными C_m в левой части уравнения, перенесем оставшиеся члены в правую часть.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} A_m a5_{m,n} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m b5_{m,n} + C_n c5_n + \frac{\nu}{\chi_n}\sum_{m=1}^{\infty} C_m c04_m\right)\sin(\chi_n x) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(m51_n + \frac{M_y(1-\cos(\chi_n))}{2\gamma^2\chi_n}\right)\sin(\chi_n x) \tag{31}$$

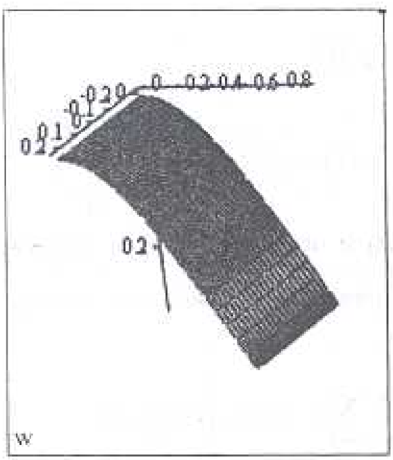
Приравняв коэффициенты разложений в ряд Фурье обеих частей этого равенства, получим последнюю группу из N уравнений с $3N$ неизвестными

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m a5_{m,n} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m b5_{m,n} + C_n c5_n + \frac{\nu}{\chi_n}\sum_{m=1}^{\infty} C_m c04_m = -m51_n - \frac{M_y(1-\cos(\chi_n))}{\gamma^2\chi_m} \tag{32}$$

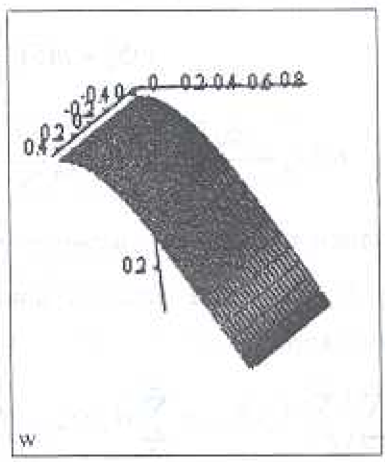
для $n = 1,2,...N$; $m = 1,2,...M$, при этом M необходимо брать равным N. Это уравнение с уравнениями (14) и (20), также состоящих из N уравнений, образуют систему из $3N$ уравнений с $3N$ неизвестными A_n, B_n, C_n. Неизвестные постоянные *F1, F2, F3* получим подстановкой полученных значений C_n в выражения (14), (28) и (21).

Графики функций перемещений для значений $\nu = 0.3,\ \lambda = 0.05,\ M_x = 0,\ M_y = 0,\ N_x = 0,\ q = 10^{-5},\ \alpha = 0.25,\ 0.5, 0.8$ приведены на фиг. 2,3,4, при $N = 20$. Дальнейшее увеличение количества членов разложения функции перемещений не приводит к заметному изменению вида графика. Для нулевых значений M_x, M_y и N_x перемещения консоли определяются в основном полиномом четвертой степени. Значения перемещений, определяемые тригонометрическим рядом формулы (7), вычисленные для $\alpha = 0.8,\ x = 0.5,\ x = 1$ при изменении y от 0 до 0.8 шагом 0.1, приведены в таблице. На фиг. 5 приводится график изгибающего момента M_x на закрепленном и свободном краях, вычисленный при $\alpha = 0.5$ для $N = 100$.

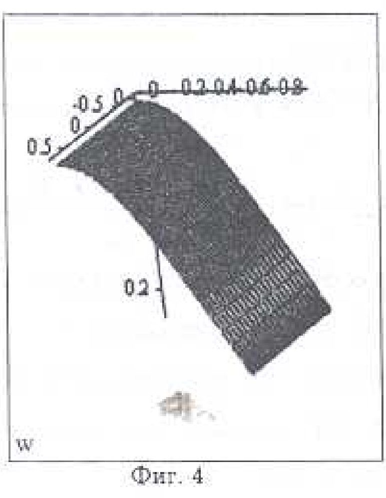
Авторы выражают благодарность профессору Баблояну А. за ценные указания, сделанные им при рецензировании статьи.



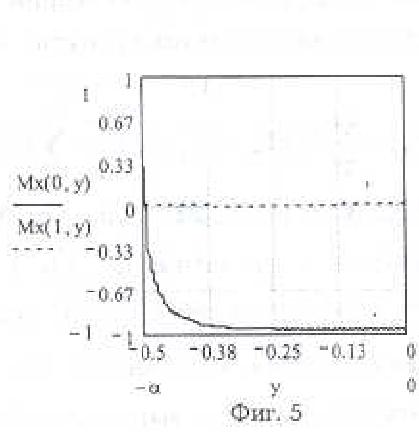
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Таблица

y	$w(0.5, y)\times 10^4$	$w(1, y)\times 10^4$
0	-2.102	-3.733
0.1	-2.061	-3.412
0.2	-2.022	-2.506
0.3	-2.259	-1.194
0.4	-3.285	0.2783
0.5	-5.924	1.616
0.6	-11.39	2.562
0.7	-21.28	2.997
0.8	-37.36	3.055

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука,1987. 360с.
2. Баблоян А.А., Мкртчян А.М. Равновесие прямоугольника, ослабленного крестообразными разрезами. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1974. Т. 27. № 4. С.13-25.
3. Brown C. M., Dreyer W., Muller W.H. Discrete Fourier transforms and their application to stress-strain problems in composite mechanics:a convergence study. Proc. Royal Societe Lond. 2002. 458. P.1967-1987.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
25.02.2004