ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №2, 2004 Механика

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ МОМЕНТНОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Мовсисян Л.А.

Լ. Ա. Մովսիսյան
Անհամասեռ գլանային թաղանթի մոմենտային վիճակի կայունության մասին

Ըստ բարձրության անհամասեռ գլանային թաղանթի համար մոմենտային վիճակի կայունության միաչափ հավասարումները բերվում են նախնական վիճակի բոլոր ուժային մեծությունների հաշվառումով: Դիտարկված մի քանի խնդիրներում ցույց է տրվում անհամասեռության և մոմենտայնության ազդեցությունը կրիտիկական պարամետրերի վրա:

L.A.Movsisyan
On the Stability of Momentically State of Nonhomogeneous Cylindrical Shell

Классические уравнения устойчивости оболочек выводятся в предположении, что начальное состояние безмоментное. Даже в задачах с начально-моментным состоянием члены— моментного происхождения, моменты и перерезывающие усилия обычно не учитываются. Для однородной пластинки система уравнений с учетом поперечных сдвигов получена в [1].

В настоящей работе приводятся уравнения устойчивости моментного состояния для неоднородной цилиндрической оболочки: неоднородность может быть как естественной, так и связана с изменением свойства материала, находящегося в температурном поле. Целью является исследование влияния новых членов и неоднородности на значения критических параметров. Так как рассмотренные примеры одномерные, то общие уравнения также записываются для этого случая (кольцо).

1.Линеаризованные уравнения устойчивости получим из трехмерных уравнений статики, записанных в полярных координатах [2] обычным образом, принимая гипотезу прямых нормалей, моментность начального состояния и сообщая ему возмущения. При сохранении основных членов они имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{d}{dx}\left(T+T^0\varepsilon+M^0\kappa-N^0\frac{dw}{dx}\right)+\frac{1}{R}\frac{dM}{dx}=0\\ \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(M+M^0\varepsilon\right)+T^0\frac{dw}{dx}\right]-\frac{1}{R}\left(T+N^0\frac{d^2\mathrm{v}}{dx^2}\right)=0\end{gathered}\tag{1.1}$$

Нулевыми индексами обозначены величины невозмущенного состояния. Обозначения обычные. В предположении того, что неоднородность материала меняется только по высоте, соотношения упругости будут

$$T=J_1\varepsilon+J_2\kappa,\qquad M=J_2\varepsilon+J_3\kappa\tag{1.2}$$

где

$$\varepsilon=\frac{dv}{dx}+\frac{w}{R},\qquad \kappa=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\qquad J_i=\int_{-h/2}^{h/2}E(z)\left(1,z,z^2\right)dz\tag{1.3}$$

2.Рассмотрим устойчивость кольца под совместным равномерным внешним давлением q и сдвигающими усилиями S на внешнем и внутреннем поверхностях. Тогда начальное состояние будет характеризоваться усилиями

$$T^0 = -Rq, \quad N^0 = Sh, \quad M^0 = 0 \tag{2.1}$$

Уравнения устойчивости в перемещениях будут

$$\left(J_1 + \frac{1}{R}J_2\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx} + \frac{w}{R}\right) - \left(J_2 + \frac{1}{R}J_3\right)\frac{d^3w}{dx^3} - Sh\frac{d^2w}{dx^2} = 0 \tag{2.2}$$

$$\left(J_2\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{R}J_1\right)\left(\frac{dv}{dx} + \frac{w}{R}\right) - \left(J_3\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{R}J_2\right)\frac{d^2w}{dx^2} - Rq\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{Sh}{R}\frac{d^2v}{dx^2} = 0$$

Решение (2.2) будем искать в виде

$$\begin{aligned} v &= \varphi_1 \sin\frac{nx}{R} + \varphi_2\cos\frac{nx}{R} \\ w &= f_1\cos\frac{nx}{R} + f_2\sin\frac{nx}{R} \end{aligned} \tag{2.3}$$

где n – целое число. Подставляя (2.3) в (2.2) из условия разрешимости однородной системы относительно φ_i и f_i получим (при пренебрежении $\frac{1}{R}J_2$ по сравнению с J_1, см. чуть ниже $\frac{h}{R} < 1$)

$$Rq + \frac{S^2h^2}{RJ_1} = \frac{J_3}{R^2}\left\{\left[1 - \frac{J_2}{J_1J_3}\left(J_2 + \frac{1}{R}J_3\right)\right]n^2 - 1\right\} \tag{2.4}$$

Критическое сочетание S и q будет

$$Rq_{\text{кр}} + \frac{S_{\text{кр}}^2h^2}{RJ_1} = J_3\frac{1}{R^2}\left\{4\left[1 - \frac{J_2}{J_1J_3}\left(J_2 + \frac{1}{R}J_3\right)\right] - 1\right\} \tag{2.5}$$

Надо заметить, что здесь $n = 2$ вовсе не значит, что потеря устойчивости происходит по двум волнам.

Пусть изменение $E(z)$ по толщине задано

$$E(z) = E\left(1 + \frac{2z}{h}, \beta\right), \quad E = \frac{E_1 + E_2}{2}, \quad \beta = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \tag{2.6}$$

$(0 \le \beta \le 1)$, $\beta = 0$ – однородное тело.

Кстати, даже в общем случае изменение $E(z)$ естественнее его представления в линейной форме, что вполне соответствует принятию гипотезы прямых нормалей. Тогда

$$J_1 = Eh, \quad J_2 = E\beta\frac{h^2}{6}, \quad J_3 = E\frac{h^3}{12} \tag{2.7}$$

тогда для предельных случаев

$$Rq_{\text{кр}} + \frac{S_{\text{кр}}^2 h}{RE} = \frac{Eh^3}{12R^2}\begin{cases} 3 & \text{при} \quad \beta = 0 \\ \frac{5}{3} & \text{при} \quad \beta = 1 \end{cases} \tag{2.8}$$

Из (2.8) получится известная формула для кольца при внешнем давлении [3]

$$q_{\text{кр}} = \frac{Eh^3}{4R^3}$$

3. Для выяснения влияния неоднородности на значение критической силы рассмотрим обычную задачу устойчивости стержня при осевом сжатии $\left(T^0 = -p\right)$:

$$\frac{d}{dx}\left(T - p\frac{dv}{dx}\right) = 0, \qquad \frac{d^2}{dx^2}(M - pw) = 0 \tag{3.1}$$

или

$$\begin{aligned} J_1\frac{d^2v}{dx^2} - J_2\frac{d^3w}{dx^3} - p\frac{d^2v}{dx^2} = 0 \\ J_2\frac{d^3v}{dx^3} - J_3\frac{d^4w}{dx^4} - p\frac{d^2w}{dx^2} = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Между прочим, так как здесь уравнение для стержня (пластинки) оболочечного типа (плоская задача и задача изгиба не распадаются), то тангенциальные граничные условия, т.е. условия относительно v или T имеют существенное влияние на значения критической силы.

При условиях

$$w = M = T = 0 \ \text{при}\ x = 0 \quad \text{и} \quad x = l \tag{3.3}$$

решение (3.2) будем искать

$$w = f\sin\lambda x, \qquad v = \varphi\cos\lambda x, \qquad \lambda = \frac{m\pi}{l} \tag{3.4}$$

и для критическй силы будем иметь

$$p = \frac{1}{2}\left\{\left(J_1 + J_3\lambda^2\right) \pm \left[\left(J_1 - J_3\lambda^2\right)^2 + 4\lambda^2 J_2^2\right]^{1/2}\right\} \tag{3.5}$$

Без последнего члена в первом уравнении (т.е. обычная постановка)

$$p = \left(J_3 - \frac{J_2^2}{J_1}\right)\lambda^2 = J\lambda^2 \tag{3.6}$$

Вот значения критической силы по (2.7)

$$p_{\text{кр}} = \begin{cases} J_3 \dfrac{\pi^2}{l^2} & \text{при} \quad \beta = 0 \\ \dfrac{2}{3} J_3 \dfrac{\pi^2}{l^2} & \text{при} \quad \beta = 1 \end{cases} \tag{3.7}$$

Причем значение $p_{\text{кр}}$ при $\beta = 1$ из (3.5) получено при пренебрежении $\frac{k^4}{l^4}$ по сравнению с единицей. Таким образом, как и следовало ожидать, членом $T^0\varepsilon$ в первом уравнении (1.1) можно пренебречь, что и было сделано в п.2.

Теперь рассмотрим случай, когда вместо $T = 0$ в (3.3) заданы $v = 0$.

Система последовательно интегрируется и после удовлетворения всем условиям для определения критической силы получим

$$\operatorname{tg}\frac{kl}{2} + \delta\frac{kl}{2} = 0, \qquad k^2 = \frac{p}{J}, \qquad \delta = \frac{J_1 J_3}{J_2^2} \tag{3.8}$$

Критическая сила, определяемая из (3.8), отлична от (3.7) и, к тому же, при $\beta = 0$ $(\delta \to \infty)$ известная

$$p_{\text{кр}} = J_2 \frac{\pi^2}{l^2} \tag{3.9}$$

т.е. при однородности не имеет значения, какие условия ($T = 0$ или $v = 0$) ставятся на концах.

Интересно, что в задаче устойчивости стержня при сдвигающих усилиях $N^0 = Sh$ получаются критические усилия независимо от вышеприведенных условий

$$S_{\text{кр}} h = \sqrt{J_1 J}\, \frac{\pi}{l} \tag{3.10}$$

Однако формы потери устойчивости различные.

4.Рассмотрим задачи уже с начальным изгибающим моментом. Для начала рассмотрим устойчивость стержня, подвергавшегося чистому изгибу и осевому сжатию

$$T^0 = -p, \qquad M^0 = M_1 \tag{4.1}$$

Тогда из системы (1.1) при граничных условиях (3.3) для критической силы получим

$$p_{\text{кр}} = \left(J_3 - \frac{(M_1 + J_2)^2}{J_1} \right) \frac{\pi^2}{l^2} \tag{4.2}$$

Из формулы (4.2) видно, что, во-первых, не имеет смысла постановка задачи устойчивости только при чистом изгибе [4] и, во-вторых, наличие начального момента играет как бы роль неоднородности и в данном случае уменьшает значение критической силы.

Однако имеет смысл изучить случай динамической устойчивости, т.е. когда изгибающий момент — периодическая функция времени

$$M^0 = M_1 + M_2 \cos\theta t \tag{4.3}$$

В системе (1.1), добавляя инерционные члены и поискав решение по (3.4), но уже с переменными по t коэффициентами, получим

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi - a(1 + 2\mu\cos\theta t)f = 0 \\ &\frac{d^2 f}{dt^2} + \Omega^2 f - a(1 + 2\mu\cos\theta t)\varphi = 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь

$$\omega^2 = \frac{J_1\lambda^2}{\rho h}, \quad \Omega^2 = \frac{J_3\lambda^4}{\rho h}, \quad a = \frac{\lambda^3}{\rho h}(M_1 + J_2), \quad 2\mu = \frac{M_2}{M_1 + J_2}$$

Области главных параметрических колебаний находятся обычным путем [3] и есть

$$\theta = \pm\sqrt{2}\left[\Omega^2 + \omega^2 \pm \sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4a^2(1 \pm \mu)^2}\right]^{1/2} \tag{4.5}$$

5. Еще пару слов о случае вязкоупругого тела. Если вязкоупругое тело находится в стационарном температурном поле и, начиная с некоторого значения температуры, свойства материала меняются [5,6] так, что верна температурно-временная аналогия, то определяющий закон записывается

$$\sigma = E(z)\left[e - \Gamma\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)\psi(z)}\psi(z)e\,d\tau\right] \tag{5.1}$$

здесь t — истинное время, $\psi(z)$ — некоторая функция от температуры [6], а последняя функция — только от координаты z. Так как в теории оболочек перемещения и деформации берутся в линейном приближении по нормальной координате (z), то естественно, что здесь функции $\psi(z)$ и $e^{-\alpha(t-\tau)\psi(z)}$ также следует разложить в ряды по z и довольствоваться только линейными приближениями. Тогда вместо соотношения (1.2), сохраняя только главные члены, будем иметь

$$\begin{aligned} T &= J_1\varepsilon + J_2\kappa - \Gamma a_0\int_0^t b_0\{J_1\varepsilon + [J_2 + \Gamma_1(t-\tau)]\kappa\}d\tau \\ M &= J_2\varepsilon + J_3\kappa - \Gamma a_0\int_0^t b_0\{J_3\kappa + [J_2 + \Gamma_1(t-\tau)]\varepsilon\}d\tau \end{aligned} \tag{5.2}$$

здесь

$$\Gamma_1(t-\tau)=\frac{h^2}{12}\frac{a_1}{a_0}\left[1-a_0\alpha(t-\tau)\right],\ b_0=e^{-\alpha(t-\tau)a_0},$$

а a_0 и a_1 — первых два коэффициента ряда $\psi(z)$ по z.

В вопросах устойчивости наследственно-упругих систем расчетные величины — мгновенная и длительная критическая силы. Так вот, что интересно, но не неожиданно, хотя в (5.2) под интегралом помимо экспоненциального члена есть и член, явно зависящий от времени, однако, длительная критическая сила и для неоднородного тела будет мгновенной, умноженной на коэффициент, т.е. в окончательных выражениях мгновенные модули упругости нужно заменить на длительные. В частности, для стержня при осевом сжатии наряду с мгновенной критической силой имеем длительную по

$$p_{\text{кр}}^{(\text{дл})}=J\left(1-\frac{\Gamma}{\alpha}\right)\frac{\pi^2}{l^2} \tag{5.3}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А., Пештмалджян Д.В. Об уравнениях устойчивости и колебаний анизотропных пластин. //Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1973. Т.26. №6. С.18-29.
2. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.984с.
4. Мовсисян Л.А. К динамической устойчивости пластин с начальным моментным состоянием. Проблемы механики тонких деформируемых тел (Сб. трудов, посвященных 80-летию С.А.Амбарцумяна), Ереван: 2002. С.224-233.
5. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
6. Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Т. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение, 1983. 239 с.
7. Потапов В.Д. Устойчивость вязкоупругих элементов конструкций. М.: Стройиздат, 1986. 312 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
23.01.2004